SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXXIII - ANNO CXLV

(2006)



LIGUORI EDITORE

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LXXIII - ANNO CXLV

(2006)

LIGUORI EDITORE

Il presente volume è stato realizzato con il contributo del Ministero per i Beni Culturali
Regione Campania
Fondazione Sanpaolo Banco di Napoli

SANPAOLO
BANCO DI NAPOLI

Dipartimento di Matematica e
Applicazioni Università degli Studi di Napoli "Federico II"

Università degli Studi di Salerno

Università degli Studi della Basilicata

N. 73 - Dicembre 2006

ISSN 0370-3568

Nessuna parte di questa pubblicazione può essere tradotta, riprodotta, copiata o trasmessa senza l'autorizzazione scritta dell'Editore. Il regolamento per l'uso dei contenuti e dei servizi forniti dalla Casa Editrice Liguori disponibile al seguente indirizzo internet:
http://www.liguori.it/politiche_contatti/default.asp?c=legal
Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascuna pubblicazione. Le riproduzioni ad uso differente da quello personale potranno avvenire, per un numero di pagine non superiore al 15% per pubblicazione, solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, via delle Erbe, n. 2, 20121 Milano, telefax 02 809506, e-mail segreteria@aidro.org

© 2006 by Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche 2006
Tutti i diritti sono riservati
Prima edizione italiana Dicembre 2006
Finito di stampare in Italia nel mese di Dicembre 2006 da OGL - Napoli

ISBN-13 **978 - 88 - 207 - 4048 - 1**

La carta utilizzata per la stampa di questo volume inalterabile, priva di acidi, a PH neutro, conforme alle norme UNI EN ISO 9706 ∝, realizzata con materie prime fibrose vergini provenienti di piantagioni rinnovabili e prodotti ausiliari assolutamente naturali, non inquinanti e totalmente biodegradabili.

INDICE

R. Sersale, G. Frigione - *Solidificazione/stabilizzazione di cationi tossici con matrici cementizie. Nota IV. Immobilizzazione di Cadmio, di Nichel e di Arsenico* pag. 1

R. Sersale - *Rifiuti urbani ed industriali inceneriti come materie prime secondarie, o scarti industriali come combustibili alternativi, per la produzione di clinker. Effetti sulla composizione e sul processo d'idratazione del cemento* » 11

M. De Angelis, E. Mazziotti - *Non linear travelling waves with diffusion* » 23

R. Sersale - *Cementi speciali* » 37

F. Obrizzo, E. Schettino, R. Spadaccini - *Physics instruments in the Royal Palace of Naples: from Collection to Museum* » 47

J.N. Flavin, M.F. McCarthy, S. Rionero - *Stability and other properties for nonlinear double diffusion including cross-diffusion* » 61

F. Capone, M. Piedisacco, S. Rionero - *Non linear stability for reaction-diffusion Lotka-Volterra model with Beddington-DeAngelis functional response* » 85

R. Gatto - *Tradizione e cartesianesimo nella matematica napoletana della prima metà del secolo XVIII* » 99

R. Sersale - *Calcestruzzo fibro-rinforzato* » 251

L. Carbone, A.M. Mercurio, F. Palladino, N. Palladino - *La corrispondenza epistolare Brioschi – Genocchi* » 263

S. Rionero, L. Vergori - *A note nonlinear stability of laminar mhd flows in a porous medium in the presence of brinkman law* » 387

R. Sersale - *Durabilità del calcestruzzo concrete durability* » 403

L. Greco, C. Sbordone, C. Trombetti - *A note on* $W^{1,1}_{loc}$ *planar homeomorphisms* » 419

R. Di Nardo - *Non-uniformly elliptic equations with measure data* » 423

N. Palladino - *L'aritmometro donato da Thomas de Colmar a Ferdinando II di Borbone (Re delle Due Sicilie) Conservato alla Reggia di Caserta* » 457

M. Gentile, S. Rionero, A. Tataranni - *On the stability of a binary chemical reaction diffusion system with Turing instability* » 481

N. Maio, A. Usai, F. Barbagli - *I Falconidi del Museo Zoologico dell'Università di Napoli Federico II (Aves, Falconiformes, Falconidae). Catalogo aggiornato della collezione con note storiche* » 491

A. Mazzarella, R. Di Cristo, R. Viola - *L'Osservatorio Meteorologico di S. Marcellino - Napoli Centro: i dati dell'anno 2006* » 509

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXXIII, (2006) pp. 1-10

Solidificazione/stabilizzazione di cationi tossici con matrici cementizie. Nota IV. Immobilizzazione di Cadmio, di Nichel e di Arsenico

Solidification/Stabilization of toxic cations with cementitious matrices. Part IV. Immobilization of Cadmium, of Nickel and of Arsenic

Nota di R. Sersale e G. Frigione

Presentata dal Socio Riccardo Sersale

(Adunanza del 13 gennaio 2006)

Parole chiave: Arsenico, Cementi di miscela, Cemento d'alto forno, Cemento Portland, Cemento pozzolanico, Cadmio, Nichel, Rifiuti urbani, Scoria d'alto forno, Solidificazione/Stabilizzazione.

Key words: Arsenic, Blast Furnace Cement, Blast Furnace Slag, Blended cement, Cadmium, Municipal Wastes, Nickel, Portland cement, Pozzolanic cement, Solidification/Stabilization.

Riassunto – Proseguendo il programma di ricerca rivolto ad individuare i tipi di cemento più idonei ad immobilizzare gli ioni tossici contenuti nei rifiuti urbani inceneriti, diamo conto dell'andamento alla lisciviazione del cadmio, del nichel e dell'arsenico, inglobati in matrici cementizie costituite da scoria d'alto formo impastata con sola acqua od attivata con alcali, da cementi di miscela e da cemento Portland. I risultati pongono in luce che tutte le matrici impiegate hanno attitudine a fissare il cadmio contenuto nei rifiuti inceneriti. L'andamento alla lisciviazione delle matrici che inglobano il nichel, evidenzia una lieve tendenza di quelle di cemento Portland a cederlo, più delle altre. Tutte le matrici esaminate si rivelano idonee ad immobilizzare l'arsenico, anche se sussiste una qualche perplessità all'impiego di matrici di scoria attivata con alcali. Per esse, dopo macinazione, la cessione di arsenico risulta relativamente più facile, probabilmente per la più alta alcalinità del sistema. Con riferimento ai meccanismi d'intrappolamento degli ioni tossici, esso sembra dominato dal gel di silicato di calcio idrato, attraverso un processo di tipo eminentemente fisico.

Summary – Following up the research program devoted to select the cement types more suitable for the immobilization of toxic cations present in the incinerated municipal wastes, we

report now the results of the leaching tests concerning cadmium nickel and arsenic, entrapped in cement matrices prepared with granulated blast furnace slag mixed only with water or alkali-activated, with blended and Portland cements. The results point out that all the matrices are suitable for cadmium fixation, present in the incinerated wastes. The leaching course of the matrices entrapping nickel, underlines a slight trend of those in Portland cement to give it up, more easily than the others. All the matrices appear to be suitable for arsenic immobilization, even if some uncertainty exists about the use of alkali-activated slag matrices, which, after grinding, release arsenic in a comparatively easier way, likely owing to the higher alkalinity. The entrapping mechanisms of toxic ions appears to be dominated by the hydrated calcium silicate gel, through an eminently physical process.

Premessa

Proseguendo la ricerca rivolta ad individuare le matrici cementizie più idonee ad immobilizzare i principali inquinanti tossici contenuti nei rifiuti solidi urbani inceneriti (1) (2) (3), diamo conto in questa Nota dei risultati dell'immobilizzazione di cadmio, di nichel e di arsenico. Le matrici cementizie sono le solite cinque impiegate nelle precedenti Note (1) (2) (3), preparate con scoria d'alto forno granulata, a contenuto relativamente alto di calcio, impastata con sola acqua od attivata con alcali, con cemento d'alto forno (Tipo III/B), con cemento pozzolanico (Tipo IV/B) e con cemento Portland (Tipo I), rispettivamente (cfr. Norma EN 196-1).

Le indagini sono state condotte su matrici coerenti, o dopo macinazione, preventivamente addizionate del 10% in peso della cenere in esame (1), adottando, anche questa volta, le modalità operative e la procedura di lisciviazione della tossicità raccomandata dall'Agenzia di Protezione Ambientale dell'U.S.A. (EPA).

Riteniamo utile, anche in questo caso, effettuare una breve rassegna della letteratura in proposito.

Il gel di silicato di calcio idrato può ospitare un notevole numero di specie tossiche, sia in forma ionica, che di sale. Il meccanismo di immobilizzazione di specie tossiche è rappresentato dall'attitudine delle matrici cementizie ad intrappolare specie ioniche nel reticolo delle fasi in via d'idratazione.

Carledge *et al.* (4) hanno suggerito che il cadmio viene con successo solidificato/stabilizzato nel cemento Portland in forma di $Cd(OH)_2$, incorporato nella struttura a strati del C-S-H.

Conner (5) e Park (6) hanno invece proposto che il cadmio formi il composto doppio $CdCa(OH)_4$ e Mc Whinney *et al.* (7) hanno posto in luce l'esistenza di ossidi di cadmio, carbonati ed idrossidi, sempre incorporati nel C-S-H.

Anche le fasi ettringite, katoite ecc., possono ospitare un gran numero di ioni tossici. Le sostituzioni avvengono al posto del calcio, dell'alluminio, dell'idrossido e del solfato,

Bonen *et al.* (8) non trovano sostituzione del cadmio nel C-S-H scarsamente cristallino e sostengono che tale elemento venga immobilizzato per precipitazione come idrossido o come carbonato. Suggeriscono anche che la fase ettringite può accomodare Cd^{2+} e Ni^{2+} al posto di M^{2+} nella struttura cristallina.

Nocum-Wczelic *et al.* (9) hanno preparato silicati di calcio idrati a rapporto molare CaO/SiO_2 pari a 0,83 e 1,5 rispettivamente, con aggiunta del 2 % in peso di $CdCl_2$ rispetto al $CaO+SiO_2$ anidro. Ritengono che il cadmio venga immobilizzato nel C-S-H con un'efficienza assai alta, superiore al 99,8 %, indipendentemente dalle condizioni di stagionatura e dal rapporto CaO/SiO_2. In presenza di composti di metalli pesanti viene accelerata la formazione di un C-S-H scarsamente cristallizzato, altamente disordinato e la ricristallizzazione ritardata.

Diez *et al.* (10) hanno studiato l'immobilizzazione del cadmio analizzando la soluzione dei pori di campioni di cemento Portland e caratterizzando le fasi solide via raggi X. Rilevano che il cemento Portland permette l'immobilizzazione sia fisica che chimica del cadmio e segnalano l'esistenza di un composto simile al $Cd(OH)_2$ scarsamente cristallino che incorpora un'alta quantità di calcio, probabilmente un prodotto di tipo $CaCd(OH)_2$.

Pomiés *et al.* (11) hanno sintetizzato due tipi di silicato di calcio idrato contenenti cadmio, uno, ottenuto per co-precipitazione, l'altro, per scambio. Hanno rilevato che quest'ultimo può fissare fino al 30 % in peso del metallo, con una modesta modifica della struttura. La maggior parte degli atomi Cd^{2+} risulta omogeneamente distribuita nella struttura del C-S-H, anche se non è stato possibile individuarne una puntuale collocazione.

Nei silicati idrati preparati per coprecipitazione, la struttura è pressoché amorfa. Il grado di polimerizzazione è più alto di quello del C-S-H, benché l'area intorno al cadmio sembri identica, sia nel C-S-H co-precipitato, sia in quello ottenuto per scambio.

Deja *et al.* (12) confermano l'attitudine delle paste di scoria attivata con alcali ad immobilizzare metalli pesanti. L'efficienza d'immobilizzazione dipende decisamente dalla microstruttura della pasta indurita e, particolarmente, dalla distribuzione delle dimensione dei pori e dalla porosità. L'attivazione alcalina comporta una riduzione della porosità totale e della dimensione media dei pori, i quali risultano più piccoli di quelli del cemento Portland. Per effetto della scomparsa di pori capillari, il movimento delle soluzioni risulta impedito. Dopo 12 mesi, il grado di immobilizzazione degli ioni cadmio è risultato pari al 99,99 %.

Con riferimento agli attivatori impiegati, nelle paste attivate con vetro solubile è stato rilevato un maggior numero di microfessure (12), le quali costituiscono una via di più alta migrazione. Nelle paste attivate con carbonato sodico, la formazione di calcite sigilla la microstruttura ed ioni di metalli pesanti vengono incorporati nella struttura della calcite.

Halim *et al.* (13) hanno esaminato il meccanismo con cui ioni di metalli pesanti – Cd(II), As(V) – vengono incorporati nella matrice del cemento Portland, correlando configurazioni strutturali e lisciviazione di ioni stabilizzati. Rilevano che gli ioni As, Pb e Cr sono distribuiti omogeneamente nel corpo del silicato di calcio idrato (C-S-H) attraverso adsorbimento o precipitazione con calcio o con silicati. Il cadmio, che forma precipitati di $Cd(OH)_2$ accomodati nei pori del cemento, può anch'esso essere adsorbito nel corpo del C-S-H.

La tendenza alla lisciviazione è influenzata dal modo con cui gli ioni metallo sono incorporati nella matrice cementizia (13). Nell'intervallo di pH 6 - 8 la tendenza alla lisciviazione decresce nel seguente ordine: Cr(VI) > Cd(II) > Pb(II) > As(V). Il principale meccanismo di immobilizzazione del cadmio sembra un intrappolamento fisico nel C-S-H.

Gougar *et al.* (14) suggeriscono che Ni^{3+} prende il posto di Al^{3+} nella struttura dei minerali dell'ettringite. Bonen *et al.* (8) avanzano l'ipotesi che l'immobilizzazione del nichel si compia perché prende il posto di Ca^{2+} sulla superficie del C-S-H, invece di dar luogo ad una sostituzione cristallina, come precedentemente supposto.

Stephan *et al.* (15) studiando i possibili effetti che nichel, cromo e zinco determinano nel clinker e nei prodotti di idratazione, attraverso prove di lisciviazione di malte di cemento Portland, hanno posto in luce che la concentrazione del nichel nel lisciviato risulta al di sotto dei limiti imposti per l'acqua potabile. Ciò si è verificato anche per contenuti di 5000 ppm e con rapporto liquido/solido pari a 5, per effetto dell'alto pH della soluzione e per l'incorporazione del metallo nelle fasi C-S-H.

Moudilou *et al.* (16) hanno caratterizzato la distribuzione di metalli tossici entro uno strato lisciviato di pasta di cemento Portland (CEM I Tipo 52,5). Hanno posto in luce che il C-S-H della zona interessata costituisce un'importante fase ospitante per il nichel. Possono esser patrocinati anche meccanismi di adsorbimento e sostituzione ionica del catione bivalente Ni^{2+}.

Rifiuti che contengono arsenico costituiscono sottoprodotti di vari processi industriali. Poiché l'arsenico è molto tossico, la sua solidificazione/stabilizzazione diviene un'esigenza primaria. Il suo meccanismo di inclusione nel cemento non è ancora del tutto chiarito. Kumarathasan *et al.* (17) avanzano l'ipotesi che AsO_4 prenda il posto di $(SO_4)^{2+}$ nei minerali del gruppo dell'ettringite.

Akhter *et al.* (18) impiegando la diffrazione dei raggi X hanno rilevato che nel cemento l'arsenico forma un precipitato $NaCaAsO_4 \cdot 7{,}5\ H_2O$, mentre Mollah *et al.* (19) hanno osservato la presenza di $Ca_3(AsO_4)_2$ insolubile sulla superficie del cemento in via d'idratazione.

Stronach *et al.* (20) hanno impiegato cemento Portland per immobilizzare chimicamente la forma più ricorrente dell'arsenico: As(III).

Parte sperimentale

La Fig. 1 riporta l'andamento della cessione di cadmio da parte di matrici, sia coerenti sia macinate, preparate con scoria d'altoforno granulata, a contenuto relativamente elevato di CaO, impastate con sola acqua od attivate con alcali. I risultati di prove di lisciviazione della durata di dieci giorni delle matrici coerenti di scoria impastata con sola acqua e di quelle attivate con alcali, pongono in luce una fissazione completa di cadmio. Le prove di lisciviazione delle matrici macinate mostrano risultati equivalenti e rilasci assai contenuti.

Le prove di lisciviazione della durata di sessanta giorni, tanto delle matrici coerenti, quanto dei loro prodotti di macinazione, confermano i risultati rilevati dopo dieci giorni di lisciviazione.

La Fig. 2 riproduce i risultati delle prove di lisciviazione di matrici preparate con i cementi di miscela, termine di riferimento quelle di cemento Portland. Le prove di lisciviazione della durata di dieci giorni di tutte le matrici coerenti indicano una totale fissazione del cadmio. Le prove sulle stesse matrici, dopo macinazione, forniscono tutte risultati molto contenuti e lievemente più alti per le matrici di cemento Portland.

Le prove di lisciviazione della durata di sessanta giorni denunziano risultati contenuti e pressoché equivalenti per tutte e tre le matrici.

La Fig. 3 riporta l'andamento della cessione del nichel da parte delle stesse matrici di scoria. Lisciviazioni della durata di dieci giorni delle matrici coerenti indicano una fissazione totale del nichel ed una cessione di nichel assai limitata da parte delle stesse, dopo macinazione. Lisciviazioni della durata di sessanta giorni delle stesse matrici, sia coerenti, sia dopo macinazione, indicano una cessione assai contenuta di nichel.

La Fig. 4 si riferisce alle prove di lisciviazione delle matrici di cementi di miscela e di cemento Portland. Le prove della durata di dieci giorni delle matrici coerenti indicano una fissazione totale di nichel e quelle macinate, una cessione di nichel contenuta e più alta per quelle di cemento Portland. Prove della durata di sessanta giorni sia delle matrici coerenti, sia di quelle dopo macinazione, confermano una cessione di nichel più elevata da parte delle matrici in Portland.

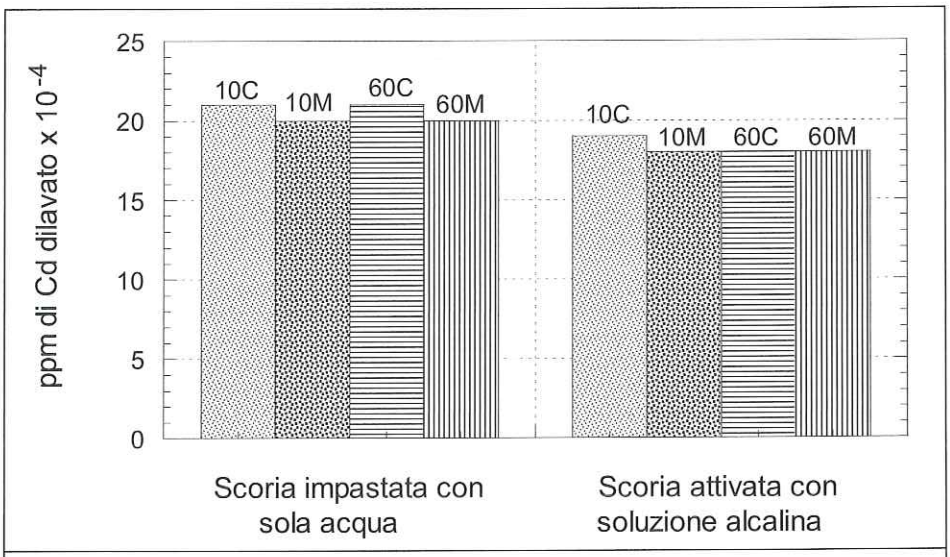


Fig. 1. Cessione di Cadmio da parte di matrici confezionate con scoria impastata con sola acqua e scoria attivata con alcali, rispettivamente.
C = provini coerenti. M = granulato proveniente dalla macinazione dei provini.
Cessioni dopo 10 giorni (10) e 60 giorni (60).

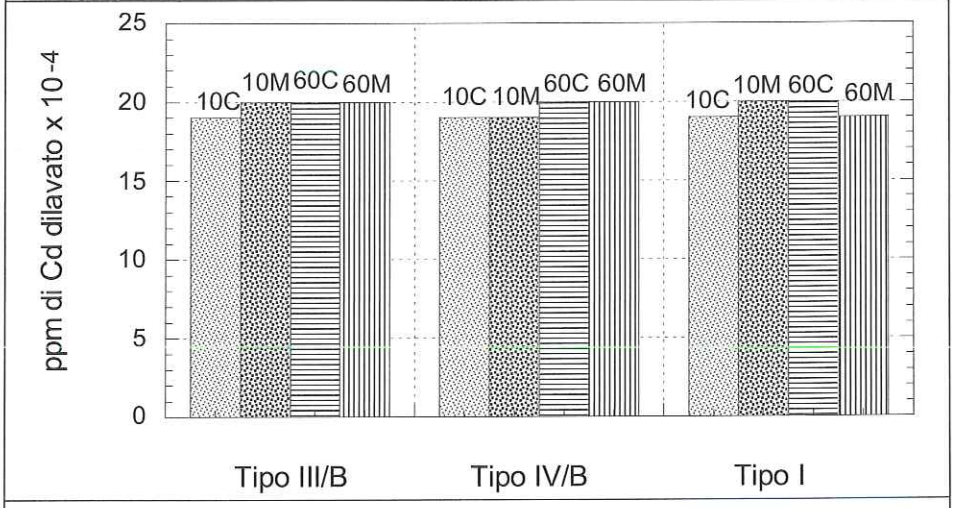


Fig. 2. Cessione di Cadmio da parte di matrici confezionate con cementi Tipo III/B, Tipo IV/B e Tipo I.
C = provini coerenti. M = granulato proveniente dalla macinazione dei provini.
Cessioni dopo 10 giorni (10) e 60 giorni (60).

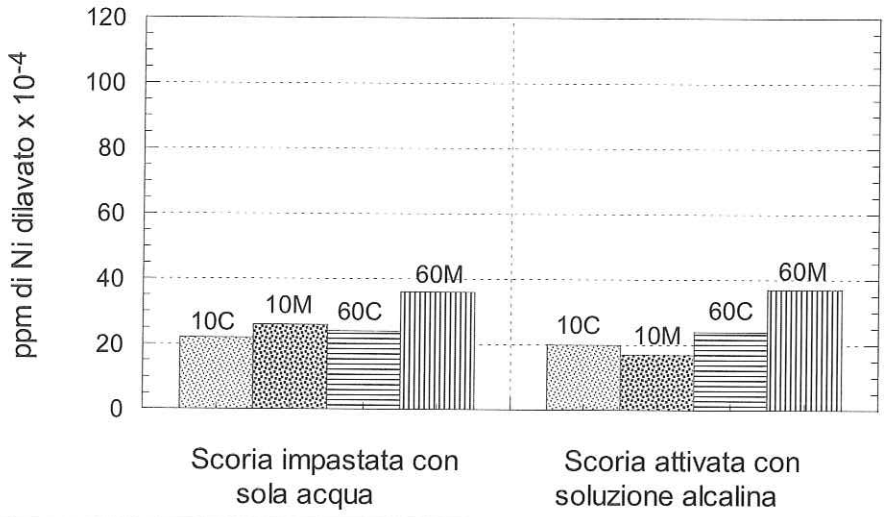


Fig. 3. Cessione di Nichel da parte di matrici confezionate con scoria impastata con sola acqua e scoria attivata con alcali, rispettivamente.
C = provini coerenti. M = granulato proveniente dalla macinazione dei provini.
Cessioni dopo 10 giorni (10) e 60 giorni (60).

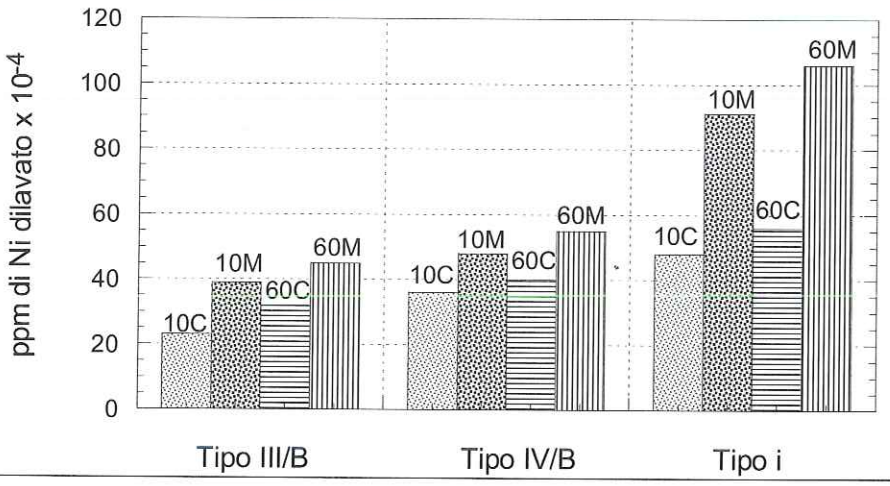


Fig. 4. Cessione di Nichel da parte di matrici confezionate con cementi Tipo III/B, Tipo IV/B e Tipo I.
C = provini coerenti. M = granulato proveniente dalla macinazione dei provini.
Cessioni dopo 10 giorni (10) e 60 giorni (60).

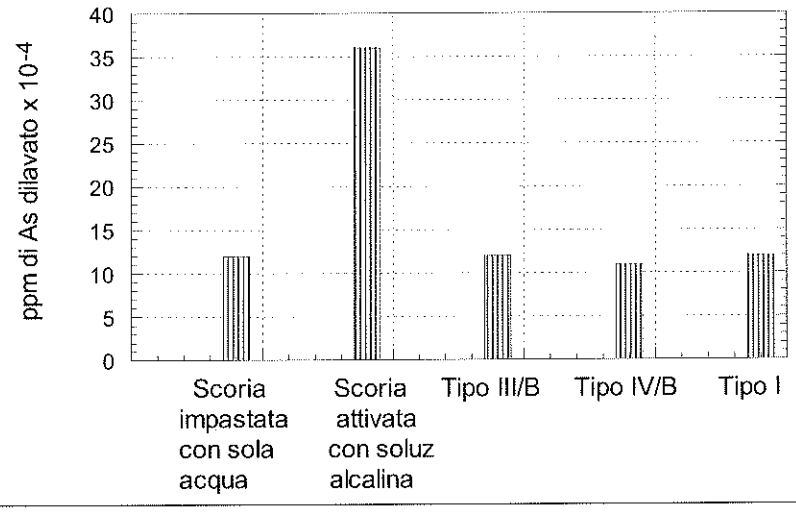


Fig. 5. Cessione di Arsenico da parte di matrici confezionate con scoria impastata con sola acqua, scoria attivata con alcali e con cementi Tipo III/B, Tipo IV/B e Tipo I, rispettivamente. Granulato proveniente dalla macinazione dei provini. Cessione dopo 60 giorni

La Fig. 5 si riferisce all'andamento della cessione di arsenico da parte di tutte e cinque le matrici prese in esame, dopo prove di lisciviazione della durata di sessanta giorni. Le matrici di scoria impastata con sola acqua e quelle di cementi di miscela e di Portland dopo macinazione, denunziano risultati molto contenuti e pressoché equivalenti di cessione dell'arsenico. Meno buono il comportamento delle matrici macinate di scoria attivata con alcali.

Le matrici coerenti dei cinque cementi esaminati, dopo prove di lisciviazione della durata di dieci e sessanta giorni, denunziano tutte una totale fissazione dell'arsenico.

Conclusioni

L'insieme delle risultanze sperimentali converge nell'indicare una totale immobilizzazione del cadmio da parte di tutte le matrici cementizie esaminate, ponendo in luce la loro idoneità a solidificarlo/immobilizzarlo. Il dilavamento del nichel sembra relativamente più facile quando le matrici cementizie sono preparate con cemento Portland.

Tutte e cinque le matrici cementizie esaminate si rivelano idonee ad immobilizzare l'arsenico. Qualche perplessità sussiste per l'impiego di matrici di scoria attivata con soluzione alcalina, secondo quanto risulta dalle prove di

lisciviazione delle matrici macinate della durata di sessanta giorni. La maggiore cessione di arsenico potrebbe essere attribuita alla microstruttura della pasta indurita e ad una più alta alcalinità del sistema.

A nostro avviso resta comunque confermato che il meccanismo di immobilizzazione di ioni tossici da parte di matrici cementizie appare dominato dal gelo di silicato di calcio idrato e dalla sua attitudine ad intrappolare tali ioni attraverso un processo di tipo eminentemente fisico, in considerazione della scarsa disponibilità allo scambio di ioni di un sistema scarsamente cristallino. L'intrappolamento viene altresì completato da una sostituzione cristallochimica di ioni tossici nei minerali del gruppo dell'ettringite, attraverso reazioni di scambio ionico.

Bibliografia

1. Sersale R., Frigione G.; *Solidificazione/stabilizzazione di cationi tossici con matrici cementizie. Nota I. Immobilizzazione di Bario e di Cromo.* Rend. Acc. Sci. Fis. Mat., Napoli, LXXII (2005).
2. Sersale R., Frigione G.; *Solidificazione/stabilizzazione di cationi tossici con matrici cementizie. Nota II. Immobilizzazione di Zinco e di Piombo.* Rend. Acc. Sci. Fis. Mat., Napoli, LXXII (2005).
3. Sersale R., Frigione G.; *Solidificazione/stabilizzazione di cationi tossici con matrici cementizie. Nota III. Immobilizzazione di Rame e di Cobalto.* Rend. Acc. Sci. Fis. Mat., Napoli, LXXII (2005).
4. Carledge F.K., Butler L.G., Chalasani D., Eaton H.C., Frey F.P., Herrera E., Tittlebaum M.E., Yang S.L.; *Immobilization mechanisms in solidification/stabilization of Cd and Pb salts using Portland cement fixing agents.* Environ. Sci. Techn. 24, 867-873 (1990).
5. Conner J.R.; *Chemical fixation and solidification of hazardous wastes.* Van Nostrand Reinhold. New York (1990).
6. Park C.K.; *Hydration and solidification of hazardous wastes containing heavy metals using modified cementitious materials.* Cement Concr. Res., 30, 3, 429-435 (2000).
7. Mc Whinney H.G., Cocke D.L.;*A surface study of the chemistry of zinc, cadmium and mercury in Portland cement.* Waste Management, 13, 117-123 (1993).
8. Bonen D., Sarkar S.L.; *The present state-of-the-art of immobilization of hazardous heavy metals in cement-based materials.* Proc. Eng. Foundation Conf., 481-498. Amer. Soc. Civil Eng., New York (1994).
9. Nocum-Wczelic W., Mololepszy I.; *Studies on immobilization of heavy metals in cement paste. C-S-H leaching behaviour.* Proc. 10th ICCC. 4, Paper 41v 043. Gothenburg (1997).
10. Diez J.M., Madrid J., Macias A.; *Characterization of cement-stabilized Cd wastes.* Cement Concr. Res., 27, 3, 337-343 (1997).
13. Halim C.E., Amal R., Beydoun D., Scott A., LOW G.; *Implications of the*

structure of cementitious wastes containing Pb(II), Cd(II), As(V) and Cr(VI) on the leaching of metals. Cement Concr. Res., 34, 7, 1093-1102 (2004).

14. Gougar M.D.L., Scheetz B.E., ROY D.M.; *Ettringite and C-S-H Portland cement phases for waste ion immobilization: a review.* Waste Management, 16, 4, 295-303 (1996).
15. Stephan D., Knöfel D., Härdtl R.; *Influence of heavy metals on the properties of cement and concrete-binding mechanism and fixation.* 11th ICCC, 4, 2178-2186. Durban (2003).
16. Moudilou E., Defosse C., Bollotte B., Scardi P., Touray J.C.; *Trapping mechanisms of trace metals (Cr, Cu, Ni, Pb, V, Zn) in the leached layer of pure cement pastes: evidences from in situ studies (SEM-EDS, local XRD, ICP-MS with laser ablation).* 11th ICCC, 4, 2254-2262. Durban (2003).
17. Kumarathasan P., Mc Carthy G.J., Hasset D.J., Pflughoeft-Hasset D.F.; *Oxyanion substituted ettringites: synthesis and characterization and their potential role in immobilization of As, B, Cr, Se and V. Fly ash and coal conversion by products: characterization, utilization, disposal.* VI, Materials Research Soc. Symp. Proceed. 178, 83-104 (1990).
18. Akhter H., Cartledge F.K., ROY A., Tittlebaum M.E.; *Solidification/stabilization of arsenic salts: effects of long cure times.* J. Hazard. Mater. 52, 247-264 (1997).
19. Mollah M.Y.A., Lu F., Cocke D.L.; *An X-ray diffraction (XRD) and Fourier transform infrared spectroscopic (FT-IR) characterization of the speciation of arsenic (V) in Portland cement type V.* Sci. Total Environ. , 224, 57-68 (1998).
20. Stronach S., Walker N.L., MacPhee D.E., Glasser F.P.; *Reactions between cement and As (III) oxide: the system CaO-SiO_2-As_2O_3-H_2O at 25 °C.* Waste Management, 17, 1, 9-13 (1997).

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXXIII, (2006) pp. 11-21

Rifiuti urbani ed industriali inceneriti come materie prime secondarie, o scarti industriali come combustibili alternativi, per la produzione di clinker. Effetti sulla composizione e sul processo d'idratazione del cemento.

Municipal and industrial waste incineration ashes as secondary materials, or industrial wastes as alternative fuels, for clinker preparation. Effect on composition and on cement hydration process.

Nota di Riccardo Sersale

(Adunanza del dì 3 febbraio 2006)

Riassunto. Si esamina la possibile utilizzazione di ceneri di rifiuti solidi urbani od industriali come materie prime secondarie per la preparazione delle miscele generatrici di clinker di Portland e di scarti industriali come combustibili alternativi per l'alimentazione dei forni a cemento.Si passano in rassegna gli effetti dei metalli pesanti, contenuti nei prodotti inceneriti, sul processo di clinkerizzazione, sulla composizione e sul processo d'idratazione del cemento.

Si conclude che l'impiego di tali prodotti sussidiari, a contenuto corrente di metalli pesanti, non esplica influenza significativa sulla struttura delle fasi tipiche del clinker prodotto, sul processo d'idratazione del cemento e sul comportamento meccanico dei relativi manufatti.

Parole chiave: Clinkerizzazione. Prodotti supplementari. Metalli pesanti.

Summary. The possible use of municipal or industrial waste incineration ashes as secondary materials for Portland clinker production, as well of industrial returns as alternative fuels in cement kilns, have been examined.

The effects of heavy metals contained in the waste ashes on clinkerization process, on phases composition and on cement hydration process, have been reviewed.

It has been stated that the use of such supplementary products, with normal heavy metals content, does not significantly affect the structure of clinker ordinary phases, the cement hydration process and the mechanical behaviour of the related works

Key words: Clinkerization. Secondary products. Heavy metals.

Premessa.

Com'è noto, i leganti idraulici si preparano per cottura ad alta temperatura di prodotti naturali: calcari, argille, bauxiti, ecc., contenenti: calcio, silicio, alluminio. ferro, sodio, potassio, ecc., come elementi predominanti. Oggigiorno, però, differenti tipi di scarti industriali vengono sempre più impiegati dall'industria cementiera per la preparazione delle miscele generatrici di clinkers, specie in quelle aree dove scarseggiano le materie prime tradizionali.

La composizione chimica del clinker prodotto dipende principalmente dalla composizione delle materie prime impiegate. Accanto alle variazioni determinate dalle diverse formazioni geologiche dalle quali le materie prime provengono, l'impiego di prodotti sussidiari, quali rifiuti urbani od industriali inceneriti, unitamente all'impiego di scarti come combustibili alternativi, influenza la composizione del clinker attraverso gli elementi minori che può incorporare.

I rifiuti urbani inceneriti recano infatti modeste quantità di metalli pesanti: zinco, nichel, piombo, cromo, ecc. Altri metalli pesanti derivano dall'utilizzo nei forni a cemento di combustibili di sostituzione, quali: pneumatici già adoperati, il cui incenerimento con produzione di energia nelle cementerie è passato dal 14% del 1992, al 21% del 2000, su di un totale annuale di pneumatici inceneriti dell'ordine di 30.000 tonnellate (1).

I rifiuti industriali, come combustibili, comprendono ancora scarti di olii e, come materie prime sussidiarie, scorie di metalli non ferrosi o cascami di sabbie di fonderia.

Rifiuti provenienti da processi termici normalmente contengono ossidi metallici come principali costituenti. Ossidi di zinco, ferro, piombo, si trovano nelle polveri e nei fanghi raccolti nel trattamento dei gas nelle acciaierie e nelle fonderie che impiegano rottami come materie prime. L'ossido di cromo è contenuto nelle polveri provenienti dalle officine di produzione di acciaio inossidabile. La principale fonte di cadmio è infine la galvanotecnica.

Sul processo di sinterizzazione, sulla struttura cristallina, sulla tessitura delle fasi del clinker e sulle reazioni d'idratazione, esercitano un effetto considerevole i composti degli elementi di transizione (2). Rame, zinco, stagno, se addizionati alle miscele generatrici di clinker, funzionano da mineralizzatori.

I tre metalli predominanti nella struttura delle fasi del clinker sono: il vanadio, lo zinco ed il piombo, il primo, presente nel carbone e nel coke di petrolio, il secondo, un elemento minore costituente dei pneumatici e di altri prodotti della gomma ed anche delle polveri di forno, il terzo, presente in tracce nelle materie prime. Essi vengono incorporati nelle fasi del clinker e la loro

presenza determina modificazioni nel processo d'idratazione e può anche influenzare la salubrità dell'ambiente se passano nel lisciviato (3).

Lo zinco, uno dei metalli più comuni nelle paste di cemento, può esser presente nel clinker, incorporato nel C_3S ed MgO, o come $Ca_6Al_4Zn_3O_{15}$ (4). Fino al 4% in peso può esser incorporato nel reticolo cristallino di un C_3S sintetico.

In un assortimento di residui provenienti dal medesimo inceneritore (5) è stato rilevato che piombo e cromo si concentrano in piccoli noduli, occlusi in particelle più grandi, costituite da silicati o alluminati di calcio, magnesio o potassio. Lo zinco è abbondantemente disperso in piccole o grandi particelle (10-100 μm), associate a Si, Al, O, Ca, Mg, Fe, Na o K (5). I cloruri alcalini e forse $ZnCl_2$ si collocano preferenzialmente sulla superficie della cenere. Per il piombo, le possibili forme chimiche presenti nell'intero assortimento di residui, sono risultate: il metallo puro, l'ossido, forse il solfato e silicati complessi.

La matrice di silicato di calcio del clinker può accomodare grandi quantità di Cd, Pb, Cr e Zn, con una modifica del comportamento all'idratazione. Il cadmio, che si rinviene in tracce nei rifiuti industriali ed urbani, nelle materie prime e nei combustibili, risulta principalmente intrappolato nell'alite e nella belite del clinker. Assai poco piombo risulta intrappolato nel clinker, ciò che ne riduce l'influenza sull'idratazione (6).

Il cromo viene fissato in notevole quantità ed è stato rilevato nell'alite e nella belite. Anche lo zinco viene intrappolato nell'alite.

Effetto dei metalli pesanti sulla reattività delle miscele generatrici di clinker.

Gli effetti di alcuni anioni estranei sulla reattività del sistema CaO-SiO_2-Al_2O_3-Fe_2O_3 hanno posto in luce che composti contenenti zolfo o fluoro migliorano la reattività della miscela generatrice di clinker ed accelerano la combinazione con CaO, specialmente nello stadio finale della sinterizzazione (7). Composti contenenti cloro migliorano la reattività a 1200°C, quelli contenenti fosforo esercitano un effetto più complesso che merita ulteriori indagini.

Ad alta temperatura, l'effetto sulla reattività del sistema è direttamente collegato alla configurazione elettronica dei cationi (8). A 1200°C la reattività della miscela aumenta considerevolmente in presenza di ossidi di rame e di litio. Addizioni di W, Ta, Cu, Ti, Mo mostrano a 1450°C l'effetto più deciso, diminuendo il contenuto di CaO del 30-60% rispetto al sistema puro.

Cromo e boro aumentano il contenuto di CaO libero, mentre gli altri elementi producono un marginale effetto positivo.

Lo studio dell'influenza dello zinco, del nichel, del piombo e del cromo sul processo di cottura e quello delle ricadute sulla formazione e sulle proprietà del clinker (9), hanno evidenziato che ZnO e PbO, in tenori da 0.05 a 2 m/m%, favoriscono la cottura della farina cruda e la clinkerizzazione.

Lo zinco è principalmente incorporato nelle fasi alite e ferrica, mentre Ni e Pb principalmente nella fase ferrica ed anche nelle fasi silicato.

Il cromo, in tenori da 0.05 a 2.50 m/m% di Cr_2O_3 peggiora il processo di cottura e la formazione di alite, probabilmente per il passaggio da Cr (III) a Cr (VI) per effetto dell'ambiente ossidante. $[CrO_4]^{2-}$ ed anche Cr^{3+} possono entrare nel reticolo dei silicati tri e bicalcico. Quando si impieghino, però, prodotti ausiliari a contenuto corrente di zinco, piombo e nichel, formazione di clinker e proprietà del cemento prodotto non vengono disturbate. Solo se in concentrazioni più elevate di quelle usuali, cromo, nichel e zinco possono influenzare la formazione delle fasi del clinker e la sua attività idraulica (10). Generalmente fino a 1000 ppm, cromo, nichel e zinco non hanno, o hanno influenza trascurabile, sulle proprietà del clinker e del relativo cemento.

L'aggiunta di composti di stagno, rame, litio, zolfo e cloro alla miscela generatrice di clinker provoca a 1200°C un aumento della reattività (11). Raggiunto lo stadio finale della sinterizzazione, i composti del ferro, zolfo, tungsteno, tantalio, stagno e rame, mostrano un effetto più positivo sulla cottura del clinker ed hanno un effetto comune sulla sua tessitura. Distribuiti nella fase liquida, sembra favoriscano la formazione di cristalli tondeggianti di alite. Composti di cromo e stronzio hanno un effetto negativo sulla cottura del clinker (11).

Il vanadio mostra una ripartizione preferenziale nel C_2S, lo zinco nel periclasio e C_3S può incorporare un tenore di zinco maggiore del C_2S (3).

Il piombo si situa ai bordi dei cristalli di C_3S, si concentra in minute sferule e si ripartisce in modeste quantità nel C_3S, poiché a 750°C va in buona parte perduto per volatizzazione (3),(12).

Cromo, nichel e zinco esercitano un considerevole effetto sul processo di cottura della miscela generatrice di clinker e sulla reattività delle fasi principali solo se contenuti in tenori ben più alti (2.5-5% in peso) di quelli del cemento Portland ordinario.

Zinco e, in minor misura il vanadio, aumentano il fuso nel forno e riducono la porosità del clinker e, conseguentemente, la macinabilità.

L'addizione di 0.5-2% in peso di biossido di stagno (13) alla miscela generatrice di clinker di Portland migliora la cottura e favorisce la combinazione della calce libera, senza influenzare significativamente la velocità d'idratazione delle paste di cemento. La struttura è quella di un clinker tipico e le fasi, ben cristallizzate, sono: alite, belite, alluminato di calcio e fase ferrica. È stata pure individuata una fase $2CaO\ SnO_2$ in cristalli aghiformi.

Nella miscela generatrice di clinker sono state anche utilizzate ceneri di rifiuti solidi urbani, in modeste quantità, per rimpiazzo parziale di prodotti

naturali in via di esaurimento, recanti silicati, allumina e calcio (14). È consigliato un setacciamento, seguito da macinazione e separazione magnetica per rimuovere i detriti. Il cemento ottenuto rispetta gli standards di resistenza a compressione. All'aumentare della quantità di rifiuto addizionato, l'insufficiente formazione di silicato di calcio richiede un'aggiunta di CaO.

Nelle miscele generatrici di clinker i componenti minerali, fornitori di silice, argilla, allumina, ossido di ferro, possono esser sostituiti fino al 20% con ceneri di fanghi da acque luride, ceneri di fanghi da purificazione di acque, ceneri di fanghi di acque di rifiuto contenenti alluminio e scorie di acciaieria (15). Principali componenti del clinker sono risultati: SiO_2, CaO, Al_2O_3. Talvolta il contenuto di C_3S è risultato prossimo a quello del cemento Portland ordinario. Un tenore di P_2O_5 inferiore al 0.5% nel clinker, non influenza la qualità dell'ecocemento prodotto, né lo sviluppo di resistenza a compressione che aumenta con la durata della stagionatura. Talvolta il più alto contenuto di α-C_2S formato abbassa la resistenza alle brevi stagionature. Con il procedere dell'idratazione fino a 90 giorni, aumenta il contenuto di silicato di calcio idrato gelatinoso e di portlandite.

È stato anche proposto di addizionare direttamente alla miscela generatrice di clinker fino al 20% di scarti combustibili, pellettizzarla e clinkerizzarla (16). È stato rilevato che la miscela con combustibile genera una più alta cristallinità delle principali fasi del clinker, richiedendo maggior impiego di energia nella macinazione. Il C_3S meglio cristallizzato innalza la resistenza a compressione a tempi brevi.

Alternativa alla gestione dei rifiuti industriali può anche essere l'utilizzo di fanghi provenienti da trattamenti di rifinitura di superfici, o da industrie galvaniche, come materiale supplementare per la preparazione di miscele generatrici di clinker (12). I metalli pesanti recati, se in tenore non superiore ad 1.5% nella miscela generatrice di clinker, favoriscono la formazione di silicato tricalcico cristallino e consentono un rimpiazzo di materiali tradizionali dell'ordine del 15%.

Effetto dei metalli pesanti sul processo d'idratazione del cemento prodotto.

Il processo d'idratazione del cemento risulta influenzato, più o meno marcatamente, dalla presenza di sali di metalli pesanti. Cationi metallici, in tenori compresi fra 0.2 e 4%, aumentano i tempi di presa e d'idratazione. Anioni, quali cloruri, bromuri, nitrati, solfati ed altri accelerano l'idratazione. Gli effetti complessivi sul processo d'idratazione devono pertanto esser considerati come risultato cumulativo dell'azione di cationi ed anioni (17).

La presenza di metalli pesanti in seno al clinker ritarda, in generale, le prime reazioni d'idratazione del cemento e l'indurimento, a seguito di un ricoprimento della superficie dei granelli in via d'idratazione con composti amorfi, neoformati subito dopo il contatto con l'acqua (2),(18). Tale effetto dipende dal pH della pasta di cemento (18). Il ricoprimento della superficie dei granelli è dovuto a composti di calcio ed il ritardo dell'indurimento a zinco e cadmio (19). Le reazioni d'idratazione riprendono l'avvio dopo cristallizzazione e sedimentazione di tali composti, quando la concentrazione di Ca^{2+} ed OH^- diviene abbastanza alta (2).

Si ritiene che lo zinco ritardi l'idratazione del cemento per effetto della formazione di uno strato di $Zn(OH)_2$ amorfo o di $Ca[Zn(OH)_3.H_2O]_2$, un calcio triossizincato idrato, durante il periodo di ritardo (20).

Vanadio, cobalto, manganese, cromo, titanio e molibdeno, ritardano debolmente la velocità d'idratazione durante le prime due ore ed il loro effetto diventa trascurabile a ventotto giorni.

Lo zinco ritarda la formazione di $Ca(OH)_2$ soltanto durante il primo giorno.

L'ossido di rame determina il ritardo all'idratazione più di tutti gli altri elementi, anche a ventotto giorni (2).

L'effetto ritardante della presa da parte di modeste quantità di ossidi di: piombo, zinco e di altri metalli (< 0.1%), dipende dall'area superficiale specifica del cemento e soltanto dal contenuto di C_3S, mentre alluminato e ferrito reagiscono normalmente con il gesso (20).

Il cadmio ritarda il tempo di presa ed abbassa leggermente la resistenza a compressione. Nel corso dell'idratazione viene fisicamente intrappolato come $Cd(OH)_2$ nel C-S-H (6). La diffrazione di raggi X delle fasi solide rivela la presenza di un composto simile al $Cd(OH)_2$ di bassa cristallinità, con incorporazione di calcio, probabilmente un prodotto di tipo $CaCd(OH)_2$. La precipitazione iniziale di $Cd(OH)_2$ causa un irrigidimento della pasta contenente cadmio, che determina una riduzione del tempo di presa iniziale, senza modifica dello stato finale. La resistenza a flessione non viene significativamente modificata, mentre quella a compressione, per effetto del cadmio, si abbassa di poco (21).

Il cromo, rilevato nell'alite e nella belite, abbrevia il tempo di presa del cemento Portland, determinando un rapido indurimento ed un incremento della resistenza alle brevi stagionature (6).

Lo zinco, intrappolato nell'alite, ritarda la presa ed abbassa la resistenza meccanica (6).

Basse concentrazioni, prossime allo 0.1%, di cromo, di nichel e di zinco, non influenzano modifiche strutturali della fase principale del clinker: il silicato tricalcico, né il processo d'idratazione. Sono necessari tenori di nichel, di zinco e particolarmente di cromo, almeno del 0.5% in peso, accumulati nel C-S-H, per provocarne decomposizione.

Nichel e cromo generano aree più ampie di portlandite e di fasi C-S-H, che risultano invece meno ampie a partire da clinker con poco zinco (22). Dosaggi venti volte maggiori di cromo e di nichel e dieci volte di zinco, rispetto a quelli del cemento Portland ordinario, distribuiti omogeneamente nel clinker, non hanno influenza sul silicato tricalcico, né sulla presa iniziale e sull'idratazione del cemento, né sulla resistenza meccanica (23).

Ferro, zolfo, tungsteno, tantalio, stagno e rame non influenzano in modo evidente il tempo di presa del cemento e lo sviluppo di resistenza (11).

Cr (VI), la forma più pericolosa del cromo per caratteristiche di solubilità e mobilità, interferisce con il normale processo d'idratazione, perché un'aliquota di Ca^{2+} reagisce con $(CrO_4)^{2-}$ e ritarda la presa iniziale e finale del cemento (24).

Cadmio, cromo e piombo non originano nuove fasi per reazione con la pasta di cemento, fatta eccezione per lo zinco che forma calcioidrossizincato.

L'addizione di cloruri di cadmio, cromo, piombo e zinco aumenta la resistenza a compressione a ventotto giorni delle relative malte (17).

L'ossido di zinco, addizionato al cemento Portland (CEM I, 42.5 R), ritarda fortemente il tempo di presa iniziale e finale ed abbassa la resistenza a compressione a breve termine (7-28 giorni). Il suo effetto si attenua con il trascorrere del tempo (25).

Fe_2O_3 non influenza presa e resistenza a breve termine, mentre la abbassa a lungo termine, assai più del ZnO.

Cr_2O_3 non influenza la resistenza a compressione finale e la sua interazione con altri ossidi metallici ritarda la presa.

PbO ha un effetto trascurabile sulla presa e non influenza la resistenza meccanica finale (25).

L'addizione a paste o malte di cemento di 0.5-5% in peso di PbO e ZnO determina un ritardo della presa proporzionale alla quantità aggiunta (26) e un effetto ritardante del PbO a seconda del tipo di cemento.

Il piombo prolunga il tempo di presa iniziale e finale del cemento (27), interferendo con le normali reazioni d'idratazione (6). Se però l'aggiunta di PbO non supera 0.5%, i tempi di presa rispettano le prescrizioni delle Norme Europee.

L'effetto del PbO sullo sviluppo di calore differisce secondo il tipo di cemento. PbO, al contrario di ZnO, non impedisce lo sviluppo di calore che accompagna l'idratazione dell'alite e provoca un notevole sviluppo di calore, funzionando, presumibilmente, da agente nucleante. In presenza di gesso, il PbO impedisce l'idratazione dell'alite, per probabile formazione di $PbSO_4$ (26).

Come materiali supplementari da addizionare, però direttamente al cemento Portland, è stato proposto l'impiego di rifiuti solidi inceneriti e vetrificati (28). La vetrificazione genera un prodotto a basso contenuto di sodio, potassio, cloro, zolfo e piombo, per effetto della loro volatilizzazione ad alta temperatura. La cenere vetrificata reagisce con il cemento Portland e forma C-S-H gelo.

A ventotto giorni, la resistenza di malte contenenti fino al 20% di ceneri vetrificate esibisce risultati paragonabili a quelli delle malte di cemento Portland ordinario. I prodotti d'idratazione sono gli stessi di quelli che costituiscono il cemento Portland ordinario, con una leggera prevalenza per gli alluminati di calcio idrati (28).

È stato anche proposto di incorporare ceneri di rifiuti solidi urbani direttamente nelle paste e malte di cemento ed accertarne l'evoluzione a lungo termine (29). Tali ceneri, accanto ad altri componenti, recano alte quantità (circa 2%) di metalli pesanti, fra i quali zinco e piombo sono i più abbondanti. Nelle paste è stata rilevata la presenza di sali di Friedel ($C_3A\ CaCl_2\ H_{10}$), ettringite (fasi Aft, $3CaO\ Al_2O_3\ 3CaSO_4\ 31H_2O$) e thenardite ($Na_2SO_4$). La struttura del C-S-H è risultata prossima a quella delle paste prive di cenere (29). Le malte contenenti fino al 20% di ceneri hanno denunziato un aumento del tempo di presa, dovuto probabilmente alla presenza di zinco e piombo. L'incorporazione di ceneri fino al 15%, (con un optimum collocato al 10%), aumenta la resistenza meccanica, probabilmente per effetto della presenza di cloruri. In tutte le malte è stata osservata un decremento di resistenza a lungo termine (565 giorni) (29).

Conclusioni.

La sostituzione parziale di materie prime naturali per la produzione di clinker di Portland è divenuta una tematica sempre più approfondita per le sue ricadute sulla collocazione di rifiuti solidi urbani ed industriali inceneriti, o di scarti industriali per il recupero di energia.

L'insieme dei risultati ottenuti dai differenti sperimentatori, in larga parte concordanti, converge nell'indicare l'idoneità dei rifiuti urbani ed industriali inceneriti, a contenuto corrente di metalli pesanti, ad esser impiegati come materie prime secondarie nella preparazione delle miscele generatrici di clinker di Portland, o di scarti industriali, ad esser utilizzati come combustibili alternativi per l'alimentazione dei forni a cemento.

Il modesto contenuto di alcuni metalli pesanti che essi contengono, non pregiudica significativamente la struttura delle fasi del clinker, né la resistenza meccanica del manufatto alla cui realizzazione hanno concorso. Esercita soltanto un modesto effetto ritardante della presa del cemento, limitato, però, alle primissime reazioni d'idratazione, a seguito della formazione di un ricoprimento protettivo di precipitati di idrossidi gelatinosi che rivestono i grani in via d'idratazione. Tale effetto di ritardo, che si conclude quando il pH della pasta di cemento diviene sufficientemente alto, viene esercitato nel seguente ordine: Zn>Pb>Cu>Sn>Cd.

Notevole importanza assumono gli stati di ossidazione del cromo. Nello stato (III) l'elemento è meno solubile, oltre ad esser meno tossico, rispetto allo

stato (VI). È consigliabile pertanto procedere ad una preventiva riduzione del cromo esavalente, utilizzando uno dei comuni additivi che riducono gli effetti negativi dei metalli polivalenti.

Formazione del clinker e proprietà del cemento prodotto non destano pertanto alcuna preoccupazione quando si impieghino, come materie prime secondarie, rifiuti solidi urbani od industriali inceneriti, o scarti industriali come combustibili alternativi.

Bibliografia

(1) Damien A. *Guide du traitement des déchets*. Dunod, Paris, p. 65 (2004).

(2) Kakali G., Tsivilis S.,Tsialtas A. *Hydration of ordinary Portland cement made from raw mix containing transition element oxides*. Cement Concrete Res., 28, 335-340 (1998).

(3) Andrade F.R.D., Maringolo V., Kihara Y. *Incorporation of V, Zn and Pb into the crystalline phases of Portland clinker*. Cement Concrete Res., 33, 63-71 (2003).

(4) Bolio-Arceo H., Glasser F.P. *Zinc oxide in cement clinkering. Part I. System CaO-ZnO-Al_2O_3 and CaO-ZnO-Fe_2O_3*. Advances in Cement Res., I, 10, 25-32 (1998).

(5) Gagnepain B., Flamand R., Gauthier D., Flamant G. *Characterisation of Cr, Pb and Zn in municipal waste incineration ashes by microscopic and spectroscopic methods*. In: Use of incineration ash. Dhir, Dyer, Paine Rds. T. Telford, 55-65. London (2000).

(6) Murat M., Sorrentino F. *Effect of large additions of Cd, Pb, Cr, Zn to cement raw meal on the composition and the properties of the clinker and the cement*. Cement Concrete Res., 26, 377-385 (1996).

(7) Kolosov K., Loutsi P., Tsivilis S., Kakali G. *The effect of foreign ions on the reactivity of the CaO-SiO_2-Al_2O_3-Fe_2O_3 system. Part I. Anions.* Cement Concrete Res., 31, 425-429 (2001).

(8) Kolosov K., Tsivilis S., Kakali G. *The effect of foreign ions on the reactivity of the CaO-SiO_2-Al_2O_3-Fe_2O_3 system. Part II. Cations*. Cement Concrete Res., 32, 463-469 (2002).

(9) Opoczky L., Fodor M.,Tamas D.F. Tritthart J. *Chemical and environmental aspects of heavy metals in cement connection with the use of wastes*. 11th ICCC, 4, 2156-2165. Durban (2003).

(10) Stephan D., Knofel D., Hardtl R. *Influence of heavy metals on the properties of cement and concrete binding mechanisms and fixation*. 11th ICCC. 4, 2178-2186. Durban (2003).

(11) Kakali G., Kolosov K., Tsivilis S. *Incorporation of minor elements in clinker: their effect on the reactivity of the raw mix and the microstructure of clinker.* 11th ICCC, 4, 1993-2001. Durban (2003).

(12) Shih P-H., Chang J-E., Lu H-C., Chiang L-C. *Reuse of heavy metal containing sludges in cement production.* Cement Concrete Res., 35, 2110-2115 (2005).

(13) Kolosov K.G., Dousis G., Tsivilis S., Kakali G. *The effect of SnO_2 on the burnability of raw meal, the structure and the properties of cement clinker.* Zement-Kalk- Gips Intern., 58, 2, 81-87 (2005).

(14) Shih P-H., Chang J- E, Chiang L-C. *Replacement of raw mix in cement production by municipal solid waste incineration ash.* Cement Concrete Res., 11, 1831-1836 (2003).

(15) Lin K.L., Lin C. Yi. *Hydration characteristics of waste sludge ash utilized as raw cement material.* Cement Concrete Res., 35, 1999-2007 (2005).

(16) Trezza M.A., Scian A.N. *Waste fuels: their effect on Portland cement clinker.* Cement Concrete Res., 35, 438-444 (2005).

(17) Alunno Rossetti V., Medici F. *Inertization of toxic metals in cement matrices: effects on hydration, setting and hardening.* Cement Concrete Res., 25, 1147-1152 (1995).

(18) Lee D., Swarbrick G., Waite T.D. *Effect of calcite on lead-rich cementitious solid waste form.* Cement Concrete Res., 35, 1027-1037 (2005).

(19) Yousuf M., Mollah A., Rajan K., Vempati T-C., Cocke L.D.L. *The interfacial chemistry of solidification/stabilization of metals in cement and pozzolanic materials systems.* Waste Management, 15, 2, 137-148 (1995).

(20) Lieber W. *The influence of lead and zinc compounds on the hydration of Portland cement.* Proc. 5th ICCC, II, 444-453. Tokyo (1968).

(21) Diez J., M., Madrid J., Macias A. *Characterization of cement-stabilized Cd wastes.* Cement Concrete Res., 27, 337-343 (1997).

(22) Stephan D., Maleki H., Knofel D., Eber B., Hardtl R. *Influence of Cr, Ni and Zn on the properties of pure clinker phases. Part I. C_3S,* Cement Concrete Res., 29, 545-552 (1999).

(23) Stephan D., Mallmann R., Knofel D., Hardtl R. *High intakes of Cr, Ni, Zn in clinkers. Part II. Influence on hydration properties.* Cement Concrete Res., 29, 1959-1967 (1999).

(24) Wang S., Vipulanandan C. *Solidification/stabilization of Cr(VI) with cement. Leachability and XRD analyses.* Cement Concrete Res., 30, 385-389 (2000).

(25) Fernandez Olmo I., Chacon E., Irabien A. *Influence of lead, zinc, iron (III) and chromium (III) oxides on the setting time and strength*

development of Portland cement. Cement Concrete Res., 31, 1213-1219 (2001).

(26) Nocum-Wczelik W., Loj G. *Mechanism of PbO and ZnO interaction with cement paste*. Proc. 11th ICCC, 4, 1803-1811, Durban (2003).

(27) Wang S.Y.,Vipulanandan C. *Leachability of lead from solidified cement-fly ash binders*. Cement Concrete Res., 26, 895-905 (1996).

(28) Dyer T.D., Dhir R.K. *Hydration reactions of combinations containing vitrified incinerator fly ash*. Cement Concrete Res., 34, 849-856 (2004).

(29) Rémond S. Pimienta P., Bentz D.P. *Effect of the incorporation of municipal solid waste incineration fly ash in cement pastes and mortars. I. Experimental study*. Cement Concrete Res., 12, 303-311 (2002).

end. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
ol. L III, (2006) pp. 23 36

Non linear travelling waves with diffusion

Nota di M. De Angelis, E. Mazziotti [1]

Presentata dal Socio Pasquale Renno
(Adunanza del 3 Marzo 2006)

Key words: Viscoelastic models, Superconductivity, Boundary layer, Partial differential equations

Abstract - A third order parabolic operator $\mathcal{L}_\varepsilon$, typical of a non linear wave operator $\mathcal{L}_0$ perturbed by viscous terms, is analyzed. Some particular solutions related to $\mathcal{L}_0$ are explicitly determined and the initial value problem for $\mathcal{L}_\varepsilon$ is considered. The parabolic hyperbolic behaviour is analyzed and rigorous approximations of the solution are achieved.

Riassunto - Si prende in esame un operatore parabolico del terzo ordine $\mathcal{L}_\varepsilon$ tipico di perturbazioni introdotte su equazioni iperboliche non lineari. Si ricavano anzitutto classi di soluzioni dell'equazione non pertubata e si considera per $\mathcal{L}_\varepsilon$ il problema di valori iniziali in tutto lo spazio. Mediante una opportuna equazione integrale si determinano stime utili alla valutazione rigorosa di approssimazioni di strato limite.

[1]Facolta di Ingegneria, Dip. Mat. Appl. . Caccioppoli , via Claudio 21, 80125, Napoli.
E mail: modeange unina.it

1 Introduction

In a vast number of realistic mathematical models (ecology, superconductivity, spread of epidemics, neurobiology, viscoelasticity), the evolution is characterized by deep interactions between wave propagation and diffusion. These models are generally given by non linear hyperbolic equations perturbed by viscous terms described by higher - order derivatives with small diffusion coefficients ε. Such small parameters imply very long times for the transmission of signals, at least when the diffusion is the principle process involved.

In order to have an enough knowledge of the dynamic response, the order of diffusion effects and the time - intervals where the wave behavior prevails must be estimated. The valuation of these aspects leads to the analysis of non linear parabolic - hyperbolic boundary layers. A typical example is related to equations such as:

$$(1.1) \qquad \mathcal{L}_\varepsilon\, u \equiv [\,\varepsilon\partial_{xxt} + c^2\,\partial_{xx} - \partial_{tt} - a\partial_t\,]\,u = f(x,t,u,u_x,u_t)$$

where $u = u(x,t)$ and ε, a, c are positive constants.

The parabolic equation (1.1) includes models of the viscoelasticity [1]-[3] and biology [4]. In particular, when $f = \gamma + sen\, u$, one has the perturbed sine - Gordon equation (PSGE)which is basic in superconductivity [5],[6].

In this paper, the initial value problem $\mathcal{P}_\varepsilon$ for the PSGE in all of the space is considered and the fundamental solution $K_\varepsilon(x,t)$ of the linear operator $\mathcal{L}_\varepsilon$ is explicitly determined. So, when f is *linear* $(f = f(x,t))$, the problem $\mathcal{P}_\varepsilon$ is quite solved. More, K_ε is a C^∞ function endowed with properties like those of the fundamental solution of the heat operator [7]. For this, when f is *not linear*, it is convenient to reduce the problem $\mathcal{P}_\varepsilon$ to an integral equation whose kernel is just K_ε.

The qualitative analysis of this equation allows not only existence and uniqueness results, but rigorous estimates when $\varepsilon \to 0$ too. Let $\mathcal{L}_0$ the operator to which $\mathcal{L}_\varepsilon$ is reduced for $\varepsilon \equiv 0$ and let w the solution of the following initial value problem $\mathcal{P}_0$:

$$(1.2) \qquad \mathcal{L}_0\, w = \bar{f}(x,t,u) \quad with \quad w(x,0) = f_0(x), \quad w_t(x,0) = f_1(x).$$

In the superconductive case, it results [8]

$$f(u) - \bar{f}(w) = sen\, w - sen\, u \tag{1.3}$$

and the *error* $v = u - w$ related to the approximation of u by means of the wave solution w, is the solution of a problem $\mathcal{P}_\varepsilon$ with initial data vanishing and a source term given by

$$F_w(v) = sen\, w - sen\, u - \varepsilon w_{xxt}. \tag{1.4}$$

Then, according to several classes of special initial data $(f_0, f_1,)$, the solution w of the reduced problem $\mathcal{P}_0$ is explicitly determined and, in corrispondence, the remainder term $v = u - w$ is rigorously estimated, together with the time - interval where the diffusion effects are neglegible for $\varepsilon \to 0$. As meamingful result one can see that whatever a positive constant $k < 1$ is prefixed, the evolution is characterized by the travelling wave w and by diffusion effects of the order of ε^k, in each interval- time $[0, T_\varepsilon]$, with T_ε defined in (6.12).

2 Statement of the problem

If T is a positive constant and

$$\Omega_T = \{(x,t) : x \in R,\ 0 < t \leq T\},$$

let consider the following initial value problem $\mathcal{P}_\varepsilon$:

$$\begin{cases} \partial_{xx}(\varepsilon u_t + c^2 u) - \partial_t(u_t + au) = f(x,t,u),\ (x,t) \in \Omega_T, \\ u(x,0) = f_0(x),\ u_t(x,0) = f_1(x), \qquad x \in R, \end{cases} \tag{2.1}$$

where f, f_0, f_1 are arbitrary specified functions, and ε, a, c, are positive constants.

When $\varepsilon \equiv 0$, the parabolic equation $(2.1)_1$ turns into the hyperbolic telegraph equation

$$(c^2\, \partial_{xx} - \partial_{tt} - a\, \partial_t)w = \bar{f}(x,t,w) \tag{2.2}$$

and the problem $\mathcal{P}_\varepsilon$ changes into a problem $\mathcal{P}_0$ for $w(x,t)$ which has *the same initial conditions of* $\mathcal{P}_\varepsilon$.

When ε is neglegible, a possible boundary - layer region could appear for $T = \infty$.

In order to estimate the influence of the dissipative term $\varepsilon\, u_{xxt}$ on the wave behavior of w, the difference

$$u(x,t,\varepsilon) - w(x,t) = v(x,t,\varepsilon) \tag{2.3}$$

is to be evaluated. For this, one has the following problem $\mathcal{P}_v$ related to the *remainder* term v :

$$\begin{cases} \varepsilon\, v_{xxt} + c^2\, v_{xx} - v_{tt} - a v_t = F_w(x,t,v) \ (x,t) \in \ \Omega_T, \\ v(x,0) = 0, \ \ v_t(x,0) = 0, \qquad\qquad x \in R, \end{cases} \tag{2.4}$$

where the source term F_w is given by:

$$F_w(x,t,v) = f(x,t,w+v) - \bar{f}(x,t,w) - \varepsilon\, w_{xxt}. \tag{2.5}$$

3 Linear case : fundamental solution and properties

When $F_w = F(x,t)$ is linear and the Laplace transform is applied to the problem (2.4), the transform $\hat{v}(x,s)$ of the solution $v(x,t)$ is:

$$\hat{v}(x,s) = \int_R \hat{K}_\varepsilon(x-\xi,s)\, \hat{F}(\xi,s)\, d\xi, \tag{3.1}$$

where $\hat{F}$ is the transform of F and

$$\hat{K}_\varepsilon(x,s) = \frac{e^{-|x|\sqrt{s(s+a)/(\varepsilon s+c^2)}}}{2\sqrt{s(s+a)(\varepsilon s+c^2)}}. \tag{3.2}$$

To obtain the inverse Laplace tranform $\mathcal{L}_t^{-1}$ of the function (3.2), let $r = |x|/\varepsilon$, $b = c^2/\varepsilon$ and

$$\hat{G}(r,s) = \frac{e^{-r\sqrt{s(s+a)/(s+b)}}}{2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{(s+a)(s+b)}}, \tag{3.3}$$

so that:

$$\hat{K}_\varepsilon(x,s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\,\hat{G}(r,s) = \mathcal{L}_t\,[\frac{1}{\sqrt{\pi\,t}} * G(r,t)]. \tag{3.4}$$

If $I_n(z)$ denotes the modified Bessel function, let

$$G(r,t) = \frac{r}{4\sqrt{\pi\,\varepsilon}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2}{4v}}}{v\sqrt{v}}\; e^{-b(t-v)}\; I_0(r\sqrt{(b-a)(t-v)/v}\;\; dv. \tag{3.5}$$

Then, the following theorem holds:

Theorem 3.1- *For all* $r > 0$, *the Laplace integral* $\mathcal{L}_t\, G(r,t)$ *converges absolutely in the half-plane* $\Re e\, s > max(-a, -b)$, *and one has:*

$$\mathcal{L}_t\, G(r,t) = \hat{G}(r,s)\ , \tag{3.6}$$

with $\hat{G}$ *and* G *defined by* (3.3)-(3.5).

Proof - By Fubini- Tonelli theorem it results

$$\mathcal{L}_t\, G = \frac{r}{4\sqrt{\pi\varepsilon}} \int_0^\infty e^{-(sv+\frac{r^2}{4v})} \frac{dv}{v\sqrt{v}} \int_0^\infty e^{-(s+b)\,z} I_0(r\sqrt{(b-a)z/v})dz \tag{3.7}$$

and further [9] it is:

$$\int_0^\infty e^{-(s+b)z}\, I_0\left(r\sqrt{(b-a)z/v}\right) dz = \frac{e^{\frac{r^2}{4v}\,\frac{b-a}{s+b}}}{s+b}. \tag{3.8}$$

By means [9] of known formulae, (3.7) and (3.8) imply (3.6). The absolute convergence holds whatever the constants a, b may be. In fact, when $a > b$, for all real $z \geq 0$, one has:

$$|\, J_0(r\sqrt{(a-b)\,z}\,| \leq 1 \leq I_0\left(r\sqrt{(b-a)\,z}\right). \tag{3.9}$$

Remark 3.1 - The function G(r,t) given by (3.5) is defined also when $r = |x| / \sqrt{\varepsilon} = 0$. In fact, if in the integral of (3.5) one puts : $r^2\,(t-v)/v = z$, one has

$$G(r,t) = \frac{e^{-\frac{r^2}{4t}}}{4\sqrt{\pi\,\varepsilon\,t}} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{4t} - \frac{z}{z+r^2}\,b\,t}\, \frac{I_0\left(\sqrt{(b-a)\,z}\right)}{\sqrt{z+r^2}}\, dz \tag{3.10}$$

and for $r = 0$, it results:

$$G(0,t) = \frac{e^{-bt}}{4\sqrt{\pi\,\varepsilon\,t}} \int_0^\infty e^{-\frac{z}{4t}}\, I_0\left(\sqrt{(b-a)\,z}\right) \frac{dz}{\sqrt{z}} = \tag{3.11}$$

$$= \frac{1}{2\,\varepsilon}\, e^{-\frac{a+b}{2}\,t}\, I_0\left(\frac{b-a}{2}\,t\right).$$

As consequence, by (3.4) it follows

$$K_\varepsilon\,(x,t) = \int_0^t G(r,\tau)\, \frac{d\tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \tag{3.12}$$

and, for $x = 0$, it is:

$$K_\varepsilon(0,t) = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{e^{-\frac{a+b}{2}\,\tau}}{\sqrt{\pi\,\varepsilon\,(t-\tau)}}\, I_0\left(\frac{b-a}{2}\,\tau\right) d\tau. \tag{3.13}$$

Moreover, it's easy to prove the following theorem:

Theorem 3.2- *The function* K_ε *defined by* (3.10)- (3.12) *is a* $C^\infty(\Omega_T)$ *solution of the equation* $L_\varepsilon u = 0$. *More, when* $a < b = c^2/\varepsilon$, K_ε *is never negative in* Ω_T. ∎

As (3.10)- (3.12) show, the fundamental solution $K_\varepsilon(x, \cdot)$, qua function of x, is an even function which results positive when $a < b$ and so

$$0 \leq \int_0^\infty K_\varepsilon(x-\xi,t)\, d\xi = 2\int_0^\infty K_\varepsilon\,(y,t)\, dy. \tag{3.14}$$

More by (3.2) one has

$$0 \leq 2\int_0^\infty \hat{K}_\varepsilon\,(y,s)\, dy = \frac{1}{s^2+as} = \mathcal{L}_t[\frac{1}{a}(1-e^{-at})] \tag{3.15}$$

and the absolute convergence of the integral (3.6) implies the following estimate:

Theorem 3.3- *When* $a \leq b$ *it results*

$$0 \leq \int_0^\infty K_\varepsilon\,(x-\xi,t)\, d\xi = (\frac{1}{a})(1-e^{-at}) \leq 1/a. \tag{3.16}$$

∎

This property of K_ε is useful to various estimates for the non linear case.

4 Reduced equation and travelling waves

As for the model of Superconductivity, the approximation w is characterized by the source $\bar{f} = sen\, w + \gamma$, so that one has

$$w_{xx} - w_{tt} - aw_t = \sin w + \gamma \tag{4.1}$$

where it's assumed $c^2 = 1$ without loss of generality.

Let ψ an arbitrary function and let $\Pi(\psi)$ the Lobachevsky's angle of parallelism [10], defined by

$$(4.2)\qquad \begin{cases} \Pi(\psi) = 2\,arctg\ e^{\psi} = 2arctg\ e^{-\psi} & [\psi \geq 0] \\ \Pi(\psi) = \pi - \Pi(-\psi) & [\psi < 0], \end{cases}$$

and such that

$$(4.3)\qquad sen\,\Pi(\psi) = \frac{1}{cosh(\psi)}.$$

A class of travelling wave solutions of (4.1) can be explicitly evaluated whatever γ may be; it suffices to consider functions $\psi = \psi(\xi)$ such as:

$$(4.4)\qquad w = \Pi[\psi(\xi)] = \varphi(x,t), \quad with \quad \xi = \frac{1}{a}(x-t).$$

Then (4.1) becomes

$$(4.5)\qquad -a\varphi_t = \sin\varphi + \gamma$$

and the function ψ is given by

$$(4.6)\qquad \frac{d\psi}{1+\gamma\,cosh(\psi)} = d\xi.$$

According to all the values of γ, indicating by k an arbitrary constant of integration, one has the following special solutions of the non linear equation (4.1).

- *Case* $\gamma = 0$

$$(4.7)\qquad w(x,t) = \Pi(\xi + k),$$

- *Case* $\gamma = 1$. If $\xi - k = \bar{\xi}$, one has:

$$(4.8)\qquad w(x,t) = 2\ arctg(-\frac{\bar{\xi}+2}{\bar{\xi}}),$$

- *Case* $\gamma^2 < 1$. If $\alpha = \sqrt{1-\gamma^2}$, $(\alpha / k)\xi = \bar{\xi}$, one has:

$$w(x,t) = 2\, arctg\,[\, \frac{\alpha}{\gamma}\,(\frac{1+k\,e^{\bar{\xi}}}{1-k\,e^{\bar{\xi}}} - \frac{1}{\alpha}\,)\,]. \tag{4.9}$$

- *Case* $\gamma^2 > 1$. If $\sigma = \sqrt{\gamma^2-1}$, $(\sigma / 2)\xi = \bar{\xi}$, one has

$$w(x,t) = 2\, arctg\,\{\, \frac{1}{\gamma}\,[1+\sigma\, tg\,(\bar{\xi}+k)]\}. \tag{4.10}$$

5 An integral equation

Consider now the non linear problem defined in (2.4) and assume that the prefixed approximation $w(x,t)$ is compatible with the following assumptions on the function F_w given by (2.5):

Conditions A

1) $F_w(x,t,v)$ is defined and continuous on the set

$$\Upsilon = \{\,(x,t,v) \in \Omega_T \times (-\infty, +\infty)\,\}$$

2) For each $k > 0$ and for $|v| < k$, the function $F_w(x,t,v)$ is uniformly Holder continuous in x and t for each compact subset of Ω_T.

3) There exists a constant C_F such that

$$|\,F_w\,(x,t,v_1) - F_w\,(x,t,v_2)\,| \leq C_F\,|\,v_1 - v_2\,|$$

holds for all v_1, v_2 and w.

4) F_w is bounded in Ω_T for bounded v and w.

Definition 5.1 -For each prefixed $w(x,t)$, by a solution of the problem $\mathcal{P}_v$ we mean a function v continuous and bounded in Ω_T such that, whatever $\varepsilon > 0$ may be, the derivatives v_t, v_{tt}, v_{xx}, v_{xxt} are continuous in Ω_T and verify (2.4).

According to the formal representation (3.1) it results:

$$(5.1) \qquad v(x,t) = \int_0^t d\tau \int_R K_\varepsilon(|x-\xi|, t-\tau)\, F_w\,[\,\xi,\, \tau,\, v(\xi,\tau)\,]\, d\xi$$

and the conditions A imply that, for a solution $v(x,t)$ of the problem $\mathcal{P}_v$, the function $\lambda(\xi,\tau) = F_w\,[\,\xi,\, \tau,\, v(\xi,\tau)\,]$ is bounded in Ω_T and is uniformly Holder continuous in ξ and continuous in τ on each compact of Ω_T.

If

$$(5.2) \qquad ||\, F_w \,||_t = \sup_{0\le\tau\le t} \sup_{x\in R} |\, \lambda(\xi,\tau)\,|,$$

by (5.1) and theorem 3.3 one deduces

$$(5.3) \qquad |\, v(x,t)\,| \le (t/a)\ ||\, F_w \,||_t \qquad x \in R,\ \ t \ge 0$$

and so, for each compact subset of $-\infty < x < \infty$, $0 < t \le T$, the function v is uniformly Holder continuous. Consequently, by Conditions A, the function $F_w\,[\,x,t,v(x,t)\,]$ is uniformly Holder continuous too. More, by means of the properties of the kernel K_ε, it's possible the following statement.

Theorem 5.1 - *For each prefixed w, the initial-value problem* (2.4) *admits a unique solution if and only if the integral equation* (5.1) *possesses a unique solution v continuous and bounded for* $(x,t) \in (-\infty,+\infty) \times (0,T)$. ∎

Consider now a positive $\eta < T$ and let

$$(5.4) \qquad ||\, v \,||_\eta = \sup_{0\le t\le\eta} \sup_{x\in R} |\, v(x,t)\,|$$

$$(5.5) \quad \mathcal{B}_\eta \equiv \{\, v(x,t) : v \in C(\ (-\infty,\infty) \times [\,0,\eta\,]\ ) \ and\ ||\, v \,||_\eta < \infty \,\}$$

The set $\mathcal{B}_\eta$ is a Banach space and the mapping

$$(5.6) \quad \mathcal{F}v(x,t) = \int_0^t d\tau \int_R K_\varepsilon(x-\xi, t-\tau)\, F_w[\xi, \tau, v(\xi,\tau)]\, d\xi,$$

owing to theorems 3.2 - 3.3, maps $\mathcal{B}_\eta$ into $\mathcal{B}_\eta$. Then, by means of the well-known techniques of the fixed point, the following theorem can be proved.

Theorem 5.2 - *When $F_w(x,t,v)$ satisfies the conditions A, then the initial-value problem $\mathcal{P}_v$ given by* (2.4) *admits a unique solution.* ∎

In conclusion, according to the prefixed initial data $f_0(x)$, $f_1(x)$ of the problem $\mathcal{P}_\varepsilon$, one can solve explictly the reduced problem $\mathcal{P}_0$ by means of the research of travelling waves outlined in sect.4 and by numerous class of solutions of sine- Gordon equations available in literature.

When the solution w of $\mathcal{P}_0$ is determined, the source term F_w is known and its properties can be analyzed in order to show that theorems 5.1 and 5.2 can be applied. Then, in this case, the integral equation (5.1) allows to estimate the remainder term v.

6 Estimate of the diffusion - An example

For example, consider the approximation w induced by the initial conditions

$$(6.1) \quad \begin{cases} w(x,0) = 2arctg(e^{x/a}) \\ w_t(x,0) = -\frac{2}{a}\,\frac{e^{x/a}}{1+e^{2x/a}} \end{cases}$$

and let $\xi = \frac{1}{a}(x-t)$. Then, the problem $\mathcal{P}_0$ given by (4.1) - (6.1)admits the solution

$$(6.2) \quad w(x,t) = 2\, arctg\,(e^{\xi})$$

which represents a travelling wave with speed $c = 1$. It results:

$$w_{xxt} = -\frac{2}{a^3}\, e^{\xi}\, \frac{e^{4\xi} - 6\, e^{2\xi} + 1}{(e^{2\xi} + 1)^3} \qquad (\xi \in R) \tag{6.3}$$

and so

$$|\, w_{xxt}\,| \leq \beta \qquad \forall\, (x,t) \in \Omega_T \tag{6.4}$$

where the constant β depends only on a. As consequence, the source $F_w\,(x,t,v)$ related to the problem $\mathcal{P}_v$ for the superconductive model is

$$F_w(x,t,v) = sen\ (v+w)\ - sen\, w\ - \varepsilon w_{xxt} \tag{6.5}$$

and satisfies the conditions A. More, by (6.4)one has:

$$|\, F_w(x,t,v)\,| \leq |\, v(x,t,\varepsilon)\,| + \varepsilon\, \beta. \tag{6.6}$$

Then, by theorems 5.1 and 5.2, one deduces that the error v related to the approximation $u_\varepsilon \sim w$ is such that:

$$|v(x,t,\varepsilon)| \leq \int_0^t d\tau \int_R [\, |\, v(\xi,\tau,\varepsilon)\,| + \varepsilon\ \beta\ ]\, |\, K_\varepsilon(x-\xi,\ t-\tau)\,|\, d\xi. \tag{6.7}$$

When $\varepsilon \to 0$, it results $a < b = \frac{c^2}{\varepsilon}$ and $K_\varepsilon \geq 0$ according to theorem 3.2. If one puts

$$r_\varepsilon(t) = \sup_R\ |v(x,t,\varepsilon)|, \tag{6.8}$$

by (6.7) and theorem 3.3 it follows

$$0 \leq r_\varepsilon(t) \leq \frac{1}{a} \int_0^t r_\varepsilon(\tau)\, d\tau + \frac{\beta}{a}\, \varepsilon\, t \tag{6.9}$$

and so the Gronwall Lemma implies

$$0 \leq r_\varepsilon(t) \leq [\beta(T/a)\, e^{T/a}]\,\varepsilon \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{6.10}$$

This estimate allows to specify the infinite time - intervals where the effects of diffusion are of the order ε^k with $k < 1$. In fact, whatever $0 < k < 1$ may be, let

$$T_\varepsilon = \frac{a}{2}\, ln\, [\, \frac{1}{\beta}\, \frac{1}{\varepsilon^{1-k}}\,]. \tag{6.11}$$

Then, for $T \leq T_\varepsilon$, by (6.10) it results

$$0 \leq r_\varepsilon(t) \leq \beta\, e^{2T/a}\, \varepsilon \leq \varepsilon^k \quad \forall t \in [0,T_\varepsilon]. \tag{6.12}$$

So, *when ε is vanishing, the evolution of the superconductive model is characterized by the travelling wave w given in* (6.2) *and by diffusion effects which are of the order of ε^k in each interval- time $[0, T_\varepsilon]$, with T_ε given by* (6.11) *and $k < 1$.*

References

[1] M. Renardy, *On localized Kelvi - Voigt damping*, ZAMM Z. Aangew Math Mech 84 no 4, 280-283 (2004)

[2] V.P. Maslov, P. P. Mosolov, *Non linear wave equations perturbed by viscous terms* Walter deGruyher Berlin N. Y. 329 (2000).

[3] P. Haupt, ontinuous Mechanics and theory of Materials, (2000).

[4] J.D. Murray, *J Mathematical Biology* Vol . I, II N.Y. Springer (2002-2003).

[5] A.Barone, G. Paterno', *Physics and Application of the Josephson Effect* Wiles and Sons N. Y. 530 (1982).

[6] Lonngren and Scott editors *Solitons in action* edited by Academic press N.Y. (1978).

[7] J.R. Cannon,*The One - Dimensional Heat Equation* Addison-Wesley Publishing Company Menio park, california (1984).

[8] A. Scott, *Active and nonlinear wave propagation in electronics* Wiley-Interscience (1989).

[9] Erdelyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi,*Tables of integral transforms* vol I MacGraw Hill N.Y. (1954).

[10] J.S. Gradshteyn, I.M.Ryzhik, *Table of integrals, series and products*, Academic Press (1980).

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXXIII, (2006) pp. 37-45

Cementi speciali

Nota III: Cemento Soprasolfatato.

Nota del Socio Riccardo Sersale

(Adunanza del dì 7 Aprile 2006)

Riassunto. In relazione all'immissione con successo sul mercato austriaco di un tipo di cemento non-Portland, si esaminano: i vantaggi della sua produzione, i progressi del comportamento tecnico, rispetto al cemento soprasolfatato classico, da tempo noto, e si indicano i principali campi di applicazione del relativo calcestruzzo.

Parole chiave: Cemento soprasolfatato. Scoria d'alto forno granulata. Attivazione.

Summary. With regard to a type of non-Portland cement successfully established on the austrian market, the advantages in its production and the advances in the technical behaviour, in comparison to the classical supersulphated one, since long time known, are examined and the fields of concrete suitable applications pointed out.

Key words: Supersulphated cement. Granulated blastfurnace slag. Activation.

Ultimamente, la Wopfinger Baustoffindustrie GmbH, meglio conosciuta in Europa con il nome commerciale di BAUMIT, ha sviluppato ed introdotto nuovamente sul mercato un tipo di cemento soprasolfatato, al quale ha imposto il nome di "Slagstar 42,5 N C3A free" (1),(2). Esso ha ricevuto dall'ETA, insieme con il marchio CE, l'European Technical Approval, che ne consente l'impiego per la produzione di calcestruzzo secondo la Normativa EN 206 (3), al pari di altri cementi.

Poiché il cemento soprasolfatato, che rientra nella categoria dei cementi non-Portland, è da tempo conosciuto (4) ed ha ricevuto attenzione da parte degli studiosi per i vantaggi della sua produzione: non richiede infatti processo di cottura, ma semplice miscelazione dei costituenti, si affranca da una massiccia emissione di anidride carbonica ed è particolarmente resistente agli attacchi chimici, conviene ripercorrere le sue vicissitudini, indicare gli impieghi a cui è

stato destinato nel tempo in parecchi Paesi europei, porre in risalto le modalità di preparazione che assicurano uniformità e buona qualità alla produzione.

La messa a punto e la produzione i cementi, atti a rimuovere alcune limitazioni del cemento Portland, rimanendo, beninteso, competitivi, è stato ed è tuttora un argomento di ricerca intensamente coltivato.

Il tema non si presenta semplice poiché il cemento Portland, sotto forma di calcestruzzo, è il materiale più largamente usato nell'edilizia di tutto il mondo, per diffusione e facilità di cavatura delle materie prime (calcare ed argilla), per consumo di energia inferiore, sulla base di prestazioni equivalenti, a quello necessario alla produzione di materiali alternativi (acciaio, mattoni) (5), per le ricadute di tali fattori sui costi di produzione. Sono le enormi quantità di cemento Portland prodotto a determinare lo straordinario impatto sul consumo di energia, impatto che si cerca di moderare con una modifica della composizione della farina cruda che alimenta il forno (6), (7), (8), (9), (10), o con l'addizione di aggiunte minerali (11).

Altre possibili vie di riduzione delle emissioni e dei costi di produzione del cemento Portland sono: ulteriore miglioramento della tecnologia di produzione del clinker; produzioni di cementi speciali (5), idonei anche a superare le limitazioni intrinseche del cemento Portland: non rapido sviluppo di resistenze dopo la presa; microstruttura non molto densa, con ricadute sull'ingresso di ioni nocivi.

La prima via sembra difficilmente praticabile. L'abbassamento del consumo di energia e l'abbattimento delle emissioni di anidride carbonica e di altri inquinanti (emissioni solforose da combustione di fossile) ha già raggiunto livelli che non appaiono ulteriormente superabili. Dal 1960 infatti una notevole riduzione del consumo di energia per la produzione di clinker è stata raggiunta mediante il passaggio dal processo ad umido a quello a secco, accompagnata dall'installazione di efficienti sistemi di scambio di calore e dall'impiego di forni a scomparto che ne riducono le perdite.

La seconda via (cementi speciali) appare più praticabile per ridurre i consumi di energia, immissione d'inquinanti nell'atmosfera, aumento della compattezza della microstruttura.

Nel corso dell'idratazione del cemento Portland, il principale prodotto di neoformazione è il C-S-H gelatinoso che ricopre i granelli in via d'idratazione e ne ritarda il prosieguo. Bisogna pertanto attendere un certo tempo per lo sviluppo della resistenza, dato che, dopo un giorno, un calcestruzzo tipico denunzia solo il 25% della resistenza che avrà a 28 giorni (5). Per accelerare lo sviluppo di resistenza a breve termine si impiega spesso, nella formulazione di un calcestruzzo, ad esempio, per fondazioni, un quantitativo di cemento Portland superiore al necessario, con innalzamento del consumo d'energia e dei costi. La durabilità delle strutture è inoltre decisamente influenzata dalla densità del calcestruzzo, il che suggerisce di abbassarne la permeabilità mediante

addizione di materiali molti fini: fumo di silice, che ne aumenta il costo ed ne complica la preparazione, o di aggiunte minerali che ritardano lo sviluppo di resistenza a breve termine (11).

Per realizzare un rapido sviluppo di resistenza dopo la presa, congiuntamente ad una microstruttura più densa con ricadute sulle resistenze chimica e meccanica, una via percorribile appare il ricorso a cementi speciali (12), (13).

Fra questi ultimi, un rinnovato interesse riscuote il cemento soprasolfatato, un cemento di scoria d'alto forno attivata con solfato di calcio. Denominato anche cemento d'alto forno con gesso, è stato usato dal 1940 al 1960 particolarmente in Gran Bretagna (14), ma anche in Francia, Italia, Paesi del Benelux e Germania. In tali Paesi esistono anche le Norme: "Specification for supersulphated cement". Ancora valida è la British Standard BS4248, 1974, riproposta nel 2004.

Le ragioni per cui il cemento soprasolfatato scomparve dal mercato trovano differenti spiegazioni. Una delle cause determinanti può esser stata la modificazione di composizione chimica della scoria d'alto forno granulata, dovuta all'impiego di materie prime differenti. Oggigiorno la scoria è spesso meno reattiva di quella dei primi anni, ma a tale inconveniente supplisce la scoperta di nuovi additivi speciali (2).

Il cemento soprasolfatato risulta dall'attivazione della scoria d'alto forno granulata con solfato di calcio (anidrite o gesso) ed è prodotto per comacinazione, o per intima mescolanza, dei due prodotti, con aggiunta del 5% di cemento Portland, necessario ad assicurare la corretta alcalinità della fase liquida. È preferita una scoria d'alto forno ad alto contenuto di allumina (intorno al 13% in peso), per incrementare la formazione di ettringite (solfoalluminato di calcio di alta solfatazione), nel corso dell'idratazione in un appropriato ambiente alcalino, grazie alla presenza di un po' di cemento Portland. Il contenuto di allumina, in combinazione con il solfato di calcio, assicura infatti la formazione di ettringite cristallizzata (15). Questo processo si compie, in soluzione, per attacco e dissoluzione dell'allumina sulla superficie dei granelli, evitando la formazione di un'incrostazione di geli acidi e, conseguentemente, un arresto dell'idratazione.

Il rapporto CaO/SiO_2 non deve scendere al disotto di 1.4, perché rapporti più bassi richiedono poi una maggiore quantità di cemento Portland (14). Esso può anche esser rimpiazzato con calce idrata, addizionata, però, in minor quantità. Tale sostituzione non viene consigliata per la maggiore sensibilità alla carbonatazione. Un'eccessiva addizione di cemento Portland produrrebbe una soluzione satura ed un abbassamento della resistenza meccanica.

Quanto a composizione della miscela, la Norma British Standard prescrive un contenuto di scoria d'alto forno granulata non inferiore al 75%, di MgO non superiore al 9%, di SO_3 non inferiore al 4,5%, di zolfo, differente da quello

presente come SO_3, non superiore all'1.5% ed un residuo insolubile non superiore al 3% (16).

La miscela non richiede cottura, ha luogo quasi senza emissione di anidride carbonica e consuma soltanto una modesta frazione dell'energia necessaria alla produzione di cemento Portland ordinario. Da ciò il rilancio di tale cemento.

La sua superficie specifica non deve scendere al di sotto di 4000 cm^2/g e pertanto deve esser macinato più fino del cemento Portland.

Il cemento soprasolfatato, come quello alluminoso ad alto contenuto d'allumina (12), si combina con più acqua durante l'idratazione rispetto al cemento Portland. Infatti, il contenuto di acqua combinata del cemento idratato è relativamente alto, principalmente per le forti quantità di ettringite, una fase con una frazione eccezionalmente alta di acqua cristallina nel suo reticolo.

Presa ed indurimento iniziale del cemento soprasolfatato sono associate alla neoformazione di solfoalluminato di calcio ad opera dei costituenti della scoria d'alto forno e del solfato di calcio presente

L'esame roentgenografico del cemento soprasolfatato indurito consente di rilevare che i principali prodotti d'idratazione sono: l'ettringite ed una fase di tipo tobermoritico (16), con un rapporto CaO/SiO_2 più basso di quello tipico del cemento Portland (17), che ingloba nella struttura discrete quantità di allumina. L'ettringite è riconoscibile dopo poche ore d'idratazione, si neoforma rapidamente e sembra raggiungere un massimo dopo tre-sette giorni d'idratazione. Il silicato di calcio idrato è riconoscibile dopo un giorno. È pertanto verosimile attribuire lo sviluppo di resistenza meccanica alle brevi stagionature in massima parte alla neoformazione di ettringite, mentre, trascorsi i primi tre giorni, la resistenza va attribuita alla formazione, sempre crescente, di silicato di calcio idrato di tipo tobermoritico.

Diversamente da molti altri sistemi cementizi, la formazione di ettringite non è associata ad espansione.

Non vi è certezza in riguardo al momento di formazione del monosolfato di calcio: se, cioè, si formi direttamente o per decomposizione del trisolfato (ettringite).

La quantità di anidride solforica recata da un cemento soprasolfatato è sufficiente a convertire in ettringite soltanto un quarto dell'allumina presente. L'aliquota restante deve pertanto esser presente in altre forme, anidre o idrate. Va però tenuto presente che non tutta la scoria d'alto forno si idrata completamente e pertanto non tutta l'allumina è disponibile per un'immediata reazione con il solfato di calcio (14). Una frazione della scoria resta come tale ed esercita una funzione di microaggregato.

Anche la formazione di monosolfato di calcio non è sufficiente a legare completamente l'allumina. Pertanto, sulla base di considerazioni sugli equilibri di fase del sistema $CaO\text{-}Al_2O_3\text{-}CaSO_4\cdot H_2O$ (15), è stato ipotizzato che l'allumina non reagita con il solfato sia presente come allumina idrata, non rilevabile via raggi X perché amorfa e che la microstruttura del cemento

indurito risulti da una miscela delle due forme di alta e bassa solfatazione del solfoalluminato di calcio, unitamente ad allumina idrata ed a silicato di calcio idrato.

Una frazione dell'allumina potrebbe esser presente anche nella fase C-S-H e l'ettringite non esser probabilmente un composto puro. L'ossido di ferro potrebbe sostituire l'allumina (14).

Lo sviluppo di resistenza dei manufatti in cemento soprasolfatato è piuttosto pigro e la resistenza ultima relativamente bassa. Essa cresce per trattamento fino a 40°C, ma, al di sopra di tale temperatura diminuisce notevolmente per effetto della decomposizione dell'ettringite. Il cemento soprasolfatato non si presta pertanto per stagionature a caldo.

Per impieghi al di sopra del piano stradale, la superficie del manufatto deve esser mantenuta umida nel corso dell'indurimento, per evitare la formazione di uno strato superficiale friabile che tende a spolverare. Tale tendenza viene ridotta dall'aumento del tenore di cemento Portland.

Il calore d'idratazione è basso, con valori tipici di 167-188 kJ/kg a 7 giorni e 188-209 kJ/kg a 28 giorni (17).

Il cemento soprasolfatato è altamente resistente ad una pluralità di agenti aggressivi, resistenza che può variare in funzione della composizione della scoria.

Risulta particolarmente resistente alle soluzioni solfatiche ed esibisce anche una discreta resistenza agli acidi inorganici ed organici fino ad un pH di circa 3.5.

Ha buona resistenza anche all'olio di lino, che attacca il cemento Portland e quello di scoria d'alto forno a basso contenuto di scoria.

La resistenza ai solfati di calcio e di sodio può esser attribuita all'assenza di idrossido di calcio ed al fatto che nel cemento indurito una quota d'allumina è già combinata nell'ettringite. Il solfato di magnesio determina una reazione più severa, perché attacca il C-S-H e decompone l'ettringite.

In generale, l'alta durabilità e la resistenza agli attacchi chimici delle strutture in calcestruzzo di cemento soprasolfatato sono imputabili alla sua alta densità, così come si constata anche per il cemento d'alto forno ad alto contenuto di scoria granulata.

Uno svantaggio del cemento soprasolfatato è rappresentato dal suo comportamento alla carbonatazione (18). Il calcestruzzo indurito in ambiente atmosferico tende a spolverare, perché una delle fasi leganti: l'ettringite, si decompone per effetto dell'anidride carbonica dell'aria, con formazione di aragonite ($CaCO_3$), gesso ed allumina idrata. La concentrazione di CaO nella fase liquida risulta pertanto abbassata, ciò che causa la decomposizione dell'ettringite con conseguente infragilimento del manufatto.

Il cemento soprasolfatato è particolarmente indicato per costruzioni sotto terra, specialmente quando si prevede un contatto della struttura con acqua contenente notevoli quantità di costituenti corrosivi. È stato anche usato con

successo nelle costruzioni portuali e frangiflutti, sulle coste del Belgio, dove è messa a frutto la sua resistenza all'acqua marina ed è stato incluso nelle specificazioni Belghe di collaudo della resistenza all'acqua marina, mostrando un generale buon comportamento.

Il cemento soprasolfatato "Slagstar" di classe di resistenza 42,5 N/mm^2, privo di alluminato tricalcico, recentemente prodotto dalla BAUMIT, condivide con il predecessore: metodo di produzione, risparmio di energia, salvaguardia dell'ambiente. Si differenzia soltanto per una più attenta modalità di preparazione, che determina una più densa struttura e si giova della recente messa a punto di additivi speciali, atti ad incrementare l'attivazione della scoria, precedentemente affidata soltanto all'azione del solfato di calcio.

È stato brevettato in oltre cinquanta Paesi e finora utilizzato in Austria per la realizzazione di progetti costruttivi di differente mole, con impiego di circa 85.000 m^2 di calcestruzzo (2).

Come il progenitore richiede un unico processo di macinazione, non produce emissioni di anidride carbonica ed ossidi di azoto, ad eccezione di quelle coinvolte nell'alimentazione del generatore di energia elettrica e nel processo d'essiccazione della scoria granulata. Rispetto al cemento Portland riduce pertanto le emissioni per valori compresi fra 73 e 90%.

Si prepara per co-macinazione del 78-85% di scoria d'alto forno granulata, secondo la qualità, e del 12-18% di solfato, valori prossimi a quelli del predecessore, e rispetta le prescrizioni della Norma EN-197(19). Si differenzia dal cemento soprasolfatato originario per un tenore ancor più basso di $Ca(OH)_2$ e, come già sottolineato, per l'aggiunta di additivi speciali che compensano la minor reattività della scoria granulata odierna, causa che, con tutta probabilità, determinò la sospensione della produzione.

I prodotti d'idratazione sono gli stessi del cemento soprasolfatato classico: ettringite, silicato di calcio idrato, idrossido di alluminio ed una più bassa percentuale di calce.

Per aumentare la velocità di presa ed indurimento, che rimangono tuttavia più lente di quelle del cemento Portland, viene macinato molto finemente (finezza Blaine superiore a 5600 cm^2/g) ed alle strutture realizzate con cemento soprasolfatato deve esser assicurata un'adeguata protezione contro l'evaporazione, a causa del più lento sviluppo di resistenza meccanica rispetto al cemento Portland.

Il calcestruzzo prodotto con Slagstar è altamente resistente all'attacco da parte dei solfati, degli acidi con valori di pH fra 3.5-4, ha un calore d'idratazione più basso di quello del cemento Portland (170 J/g), alta resistenza meccanica ultima, bassa diffusione dei cloruri per effetto di una porosità capillare inferiore a quella del cemento Portland.

In generale, la resistenza ad attacchi chimici e l'alta durabilità delle strutture in calcestruzzo di cemento soprasolfatato vanno imputate alla sua alta densità,

caratteristica comune a tutti i cementi ad alto contenuto di scoria d'alto forno. D'altra parte è ben noto che permeabilità e coefficiente di diffusione di calcestruzzi a base di scoria d'alto forno granulata vengono ridotte con l'aumento del tenore di scoria (20).

Il basso contenuto d'idrossido di calcio, in combinazione con una struttura assai densa, spiega poi perché il calcestruzzo a base di Slagstar denunzi una resistenza molto alta all'attacco acido.

Altre caratteristiche proprie del cemento Slagstar segnalate dalla casa produttrice (2) sono: bassa tendenza alla formazione di efflorescenze, assenza di alcali-reazione e di formazione di thaumasite.

È noto che le paste di cemento recano idrossido di calcio inglobato nei prodotti colloidali d'idratazione. Esso viene disciolto e trasportato dalle forze capillari alla superficie della struttura, formando depositi che, per azione dell'anidride carbonica dell'aria, vengono convertiti in carbonato di calcio. Il bassissimo contenuto di idrossido di calcio del cemento Slagstar, pone al riparo dalla formazione di efflorescenze le strutture con esso realizzate.

Quando si impieghino rocce frantumate contenenti silice reattiva, il calcestruzzo realizzato con cemento Slagstar non va soggetto ad espansione dovuto alla reazione alcali-aggregato. Tale reazione non coinvolge infatti soltanto gli alcali presenti nella soluzione dei pori della pasta di cemento e gli aggregati silicei reattivi, ma richiede anche un appropriato tenore di ioni Ca^{+2} forniti dalla portlandite (21) che, nei prodotti d'idratazione, è questa volta, bassissima.

A differenza del cemento Portland I, non dà adito alla neoformazione di thaumasite $[Ca_3Si(OH)_6(SO_4)(CO_3)\cdot 12H_2O]$, un composto che si origina dalla combinazione dell'attacco solfatico e della carbonatazione e che provoca rammollimento o formazione di cricche nel calcestruzzo o nella malta e richiede presenza di ioni SO_4^{2-}, CO_3^{2-} ed allumina reattiva.

Con riferimento agli impieghi, viene raccomandato nell'ingegneria civile per la costruzione di strutture massive, in considerazione del basso calore d'idratazione, per fondazioni in suoli aggressivi, per strutture impermeabili, per opere destinate a vivere in ambiente aggressivo, per tubazioni per acque di rifiuto, per calcestruzzi ad alto contenuto di cemento, quali: il calcestruzzo autocompattante (22) e quello ad alte prestazioni (23), per calcestruzzi preparati con aggregati reattivi agli alcali, per quelli a faccia vista. Per il basso innalzamento di temperatura nel cuore della struttura, non sono richiesti trattamenti di refrigerazione anche nel caso d'impiego di calcestruzzi autocompattanti e ad alte prestazioni (2).

Conclusioni

La recente riproposizione del cemento soprasolfatato risulta attrattiva in relazione soprattutto alla metodologia di produzione, unitamente alle caratteristiche del prodotto finito. Non richiede processo di cottura, riduce drasticamente le emissioni di anidride carbonica, comporta un notevole risparmio di energia. Grazie ad una struttura particolarmente compatta, ottenibile con basso rapporto acqua/cemento, comune a tutti i cementi ad alto contenuto di scoria d'alto forno granulata, si raccomanda per l'alta resistenza chimica.

Tali caratteristiche, che già erano state rilevate per il cemento soprasolfatato progenitore, non poterono esser sfruttate a pieno e determinarono l'abbandono della produzione, per il peggioramento delle caratteristiche di qualità della scoria d'alto forno, determinate da una modifica di composizione delle materie prime, con conseguente abbassamento della reattività, oggi innalzabile grazie all'impiego di additivi speciali (2).

I vantaggi sottolineati lasciano prevedere l'occupazione del cemento soprasolfatato odierno di una consistente fascia del mercato.

Bibliografia

(1) Slagstar Ecoconcrete with new supersulphated cement. Zement-Kalk-Gips Inter. 58, 9, 34-37 (2005).
(2) Novak R., Schneider W., Lang E. New knowledge regarding the supersulphated cement Slagstar. Zement-Kalk-Gips Inter. 58,12, 70-78 (2005).
(3) ETA-05/0015. Hydraulishes Bindmittel aus granulierter Hochofensclacke fur die Herstellung von Beton, Mortel and anderen Mischungen fur Bau und fur die Herstellung von Bauprodukten. Februar (2005).
(4) Lea F.M. The chemistry of cement and concrete. E. Arnold Pbl. Ltd (1970).
(5) Scrivener K.L. Properties, applications and practicalities of special cements. 11th ICCC, 1, 84-93. Durban (2003).
(6) El-Alfi E.A., Radwan A.M., Darweesh H.H.M. Clinker di cemento Portland a bassa richiesta di energia. Parte I. Ind. Ital. Cemento, 5, 376-384 (2005).
(7) El-Alfi E.A., El-Didamony H., Radvan A.M. Clinker di cemento Porland a bassa richiesta di energia. Parte II. Ind. Ital. Cemento, 10, 706-712 (2005).
(8) Sersale R. Produzione di cementi a ridotto consumo di energia. Nota I. Il clinker ricco di alinite. Rend. Acc. Sc.fis. mat., Napoli, LXXI, 31-37 (2004).
(9) Sersale R. Produzione di clinkers a ridotto consumo di energia. Nota II. L'ecocemento. LXXI, 109-114 (2004).
(10) Sersale R. Produzione di clinkers a ridotto consumo di energia. Nota III. Cementi belitici e solfobelitici. LXXI, 125-136 (2004).

(11) Sersale R. Le aggiunte minerali al cemento Portland ordinario e le modificazioni del suo comportamento tecnico. Rend. Acc. Sc. fis. mat., Napoli. LXX, 97-109, (2003).
(12) Sersale R. Cementi speciali. Nota I. Natura, proprietà ed applicazioni del cemento alluminoso. Rend. Acc. Sc. fis. mat.,Napoli, LXXI. 7-17 (2004).
(13) Sersale R. Cementi speciali. Nota II. Sistemi cementizi ottenibili per associazione di cemento alluminoso con altri prodotti. Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli, LXXI. 19-29 (2004).
(14) Nurse R.W. Slag composition and its effect on their properties of supersulphate cement. Atti Convegno Produz. Applicaz. Cementi siderurgici. Fondaz. Politec. Mezzogiorno Ital., Napoli, 189-195 (1960).
(15) D'Ans J., Eick H. Investigation on the setting process of hydraulic blastfurnace slag. Zement-Kalk-Gips, 12, 449-459 (1954).
(16) Lea's chemistry of cement and concrete. P.C. Hewlett Ed. Elsevier Butterworth Heinemann, Oxford, 664-667 (2004).
(17) Odler I. Special inorganic cements. E&FN Spoon Eds. London, 123-124 (2000).
(18) Lou Z., Xu X., Han R. On ettringite and modification of slag cement. 7th ICCC, II, II 82-II 87 (1980).
(19) British Standard Institution. Cement composition, specification and conformity criteria. Part I. Common cements: London BSI 1995, DD. ENV 197-1.
(20) Yeau K.Y., Kim E.K. An experimental study on corrosion resistance of concrete with ground granulated blastfurnace slag. Cement Concrete Res., 35, 1391-1399 (2005).
(21) Sersale R. Natural zeolites for minimizing concrete expansion due to alkali-aggregate reaction. Assoc. Ital. Zeoliti. Bollettino AIZ. De Frede Ed. Napoli, 21, 10-15 (2003).
(22) Sersale R. Recenti sviluppi della scienza e della tecnologia del calcestruzzo. Il calcestruzzo autocompattante. Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli, LXXI, 115-124 (2004).
(23) Sersale R. Recenti sviluppi della scienza e della tecnologia del calcestruzzo. Il calcestruzzo ad alte prestazioni. Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli, LXX, 53-64 (2003).

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXXIII, (2006) pp. 47-59

Physics instruments in the Royal Palace of Naples: from Collection to Museum

Nota di Francesco Obrizzo[1], Edvige Schettino[2] e Rossana Spadaccini[3]

Presentata dal socio Lucio Carbone.

(Adunanza del 5 maggio 2006)

Key words: History of Science, Physics, Scientific Collection, Naples.

Abstract – This paper aims to trace the documentary history of the Royal Collection of Physics Apparatus, currently housed in the Physics Museum at the Federico II University of Naples. The archive sources reveal connections between public and private institutions, namely between Collections, Science Museums and University Teaching Laboratories, all of which are characteristic of the scientific scenario in the first half of the 19th century.phe history of the Royal Collection stands out because of its varied role, from its inception as a private collection of the Bourbon household to becoming a science museum and its evolution from the 1830's to the Unification of Italy when the instruments were handed over to the University of Naples.phe Royal Collection lost its identity when it became absorbed into the university's physics laboratory, engulfed as it was amidst the wealth of apparatus. It began to regain its identity only after cataloguing work started in 1983.

Riassunto – In questo lavoro sarà tracciata la storia documentaria della Collezione Reale di apparecchi fisici, attualmente conservati presso il Museo di Fisica dell'Università Federico II di Napoli. Le fonti archivistiche hanno permesso di individuare intrecci e legami tra Istituti pubblici e privati, tra Collezioni, Musei Scientifici e Gabinetti Universitari, che caratterizzarono la scienza a Napoli nella prima metà dell'Ottocento.

La storia del Gabinetto Reale è di particolare interesse per le diverse funzioni che ebbe dalla sua nascita, come Collezione privata della Casa Borbone a potenziale museo scientifico e si evolve dagli anni '30 dell'Ottocento all'Unità d'Italia, quando gli strumenti vengono consegnati all'Università di Napoli.

---

[1] Istituto Nazionale di Geofisica e Vulcanologia, Osservatorio Vesuviano, Via Diocleziano, 328 - 80125 Napoli [obrizzo@ov.ingv.it]

[2] Dipartimento di Scienze Fisiche, Università di Napoli Federico II, Via Cintia - 80126 Napoli [eschett@unina.it]

[3] Archivio di Stato di Napoli, Piazzetta Grande Archivio, 5 - 80138 Napoli [rossanaspadaccini@yahoo.it]

Nel Gabinetto fisico universitario la Collezione reale perde la sua identità, inglobata nella più vasta moltitudine di strumenti. La riacquisterà solo a seguito del lavoro di identificazione e sistemazione avvenuto a partire dal 1983.

1 Introduction

This paper seeks to trace and describe the most significant elements in the documentary history of the Royal Collection of physics instruments currently at the Museo di Fisica of the Federico II University of Naples. The verbal sources, i.e. ledgers, inventories, scientific correspondence, almost all of which have been preserved at the Naples State Archives, and the non-verbal sources, i.e. surviving measuring instruments, have made it possible not only to unearth a collection believed lost until 1983 [1], and catalogued in 1995 [2] but also to identify and analyze the relationships between public and private institutions, between Collections, Scientific Museums, and University laboratories, which made the period from 1830 to 1850 particularly important for Neapolitan science, and science in Naples.

The documentary history of the Gabinetto Reale stands out among other institutions of the period. With its 200 core items, its nature, as a collection and potential scientific collection, has changed over the years. The documents we have analyzed show that a number of uses for the Collection were possible, such as a laboratory for carrying out magnetic, and meteorological measurements, as well as timekeeping. It could also be envisioned as a teaching laboratory for the crown princes and as a museum for the preservation and display of the latest machinery, representing the state of the art across the board of scientific enquiry.

This plurality of functions raises a number of points, which we will try to shed light on here, and which are paradigms of an ongoing research.

We have focussed on the decade 1840-1850, but our attention extends to the enterprises of the reigning house and the French through the first half of the nineteenth century.

In this period, the city of Naples saw some degree of institutional involvement in the scientific life and the museums of Naples, though not always felicitously, and somewhat later than expected:

- 28 March 1801: foundation of the "Reale Museo di Mineralogia";
- 13 January 1804: the "Reale Biblioteca" opens to the public;
- 18 May 1809: foundation of the "Reale Orto Botanico";
- 1811: foundation of the "Gabinetto fisico" of the University, a teaching laboratory annexed to the already existant chair in Experimental Physics;

- 1813: foundation of the "Reale Museo Zoologico" and the "Gabinetto di Anatomia" of the University;
- 1819: foundation of the "Reale Osservatorio Astronomico di Capodimonte";
- 1841: foundation of the "Reale Osservatorio Meteorologico Vesuviano", the first volcanic observatory in the world, with the physicist Macedonio Melloni, nominated in 1839, as the first director;
- 1845: Seventh National Convention of Italian Scientists, held at the Museum of Mineralogy in Naples.

The initiatives of the Reigning House of the largest Italian state did not compensate for the delays over preceding decades, especially in the second half of the 18th Century compared with the rest of Europe and the other Italian states.

The difficulties which arose in trying to get structural projects off the ground, for example the *Stabilimenti*, and the kind of studies and research put forward by Neapolitan academics and scientists show an aristocratic or and/or middle-class political class with little interest in scientific and technical progress, with few exceptions, such as the 7th Convention of Italian Scientists, more akin to the lavish display of the Ancien Régime, to a strategic scientific policy.

The delays and the missed opportunities for science to become an institution in Naples created a gap in the relationship between the State and the citizen, which has left traces to this day.

Perhaps history itself, wars and revolutions in the largest kingdom in Italy didn't lend itself to scientific and cultural developments in the Naples of the Bourbon dynasty in that somewhat lengthy period from 1734 to 1861. It may well be true that scientific and institutional growth occurs more in periods where democracy flourishes than in periods where freedom is limited, but a historico-political analysis of this kind is best left to the experts in the field.

The history of the Collection is closely tied in with the story of the House of Bourbon, seemingly vacillating between memory and oblivion, separation and reunion in the historical reconstruction carried out since the arrival of the Bourbon in Naples: «*In 1734, Don Carlos became King of Naples and Sicily. The change of dynasty was a changing point and the start of a recovery*» [3]. It is with these words that Franco Venturi begins his historical analysis of the history of the Kingdom of Naples in his essential work on the 18th Century in Italy.

Charles of Bourbon, son of Filippo V of Anjou-Bourbon and Elizabeth Farnese, reigned from 1734 to 1759 before acceding to the Spanish throne.

2 Approach to the historical sources

In tracing the history of the Collections and, in our case, the Collection of Bourbon Instruments, it is impossible not to come upon the origins and formation of the academic establishments which housed them, as well as their Directors or guardians.

We associate the Collections and their history with research carried out by scientists, i.e. the history of scientific thought as the story of the expression of-thought systems centred on natural processes. The main fruits of this activity are verbal sources (scientific publications, books, memoirs and correspondence) and non verbal ones (measuring instruments). This evidence, witness to the accumulation of technical and scientific progress, is the synthesis of the knowledge process of the past and is the starting point for the future development of measurement in the future.

Thus, knowledge, via measuring instruments, takes on material, worldly, characteristics, as a proper Earth Science. The instrument, or measurement, constitutes the bridge between man and nature. The need for greater positive knowledge inspires and guides the construction of measuring instruments for endogenous and exogenous phenomena: «*measurement is the centre of knowledge, the datum is the essence of knowledge, the material condition of scientific thought*». Alexander Koyré ingeniously encapsulates the importance of measurement: «*it is actually thanks to the instrument that precision is born in a world of approximation: in the very construction of the instrument, technical thought is affirmed. The first high-precision instruments were invented for their own construction*» [4].

It is precisely this approach which makes it possible to travel through the history of knowledge by means of the history of measuring instruments, making it possible to identify and understand the investigative methodology choices which have been made and which are being made in Earth Sciences.

The instruments, often luxurious works of art in themselves, especially in the sixteenth and seventeenth century when they were considered collectors items, began to become more functional at the beginning of the 18th Century.

The best instrument makers were also craftsmen. Scientists able to invent instruments and men of science were in some case constructors, trying to

modify or create new devices, favouring the development of new fields in Physics, Geophysics and Earth Science.

The historiographical idea we start from, examining the scientific consistency of the King's Instrument Collection, is whether it may be considered a worthy testimony to Neapolitan scientific thought, or whether it is simply an expression of the collector spirit, left over from the Ancien Régime, and the Wunderkammern of the powers restored with the Congress of Vienna.

3 A museum denied by history: the origin, break-up and conservation of the collection

The first mention of the existence of the core of the Collection of Instruments in the Royal Palace of Naples, goes back to the 1830s. There are two documents mentioning it. The first is an inventory of expenditure written out by the manufacturer Bonaventura Bandieri in 1831, containing a list [5]; the other document is the letter written four years later in 1835, by Lorenzo Taglioni, manufacturer of the customs administration. The letter is to Antonio Fava, chamberlain of the Royal Household. In it he doubts whether the instruments can be saved because of their lengthy lack of use. From the letter we learn that the instruments are kept in the king's private library, following the collectors' tradition which has always been to associate scientific machines with books, the latter being purchased to illustrate the former.

Why was it thought necessary to preserve instruments by then considered unusable? Before answering this question, it is worthwhile taking a step backwards.

We know that as far back as 1757, the new "Regal Villa di Capo di Monte" in Naples became home to pictures, manuscripts, paper and parchment archives, and medals and cameos inherited from King Carlo. Together with these *objets d'art*, four chests of scientific instruments, arrived from Parma [6]. These form the core of the Reale Gabinetto Fisico, or the Royal Laboratory of Physics.

The aim was to reconstruct at Capodimonte, whose construction had been underway since 1738, something similar to the Pilotta in Parma and the Palazzo Farnesiano in Piacenza, where tapestries, furniture, telescopes and clocks are exhibited together with *mathematical devices*. The Farnese project, already set up in the Pilotta in Parma, continues in Carlo's collection, with not only objects but whole collections, as we can see from the Royal Museum at Capodimonte [7]. Thus the basic core of the Farnese Collection is enriched by other

instruments and objects coming from other private collections such as that of Prince Ferdinando Spinelli of Tarsia, purchased by the crown [8].

The custodian of this embryonic museum at Capodimonte was the priest Giovanni Maria della Torre of the Somaschi order of priests, professor of physics at the Arciginnasio Regio, who was a key figure in spreading Newtonism in Naples [9]. Della Torre was responsible for enriching and restoring the growing Collection of the king's scientific instruments. Professor Carlo Giannini was given the task of completing the physics instruments coming from Turin and restoring the others. These sources make it clear that the Royal Collection had more than one source, i.e. the Spinelli collection, the Farnese collection and the instruments coming from Turin.

It is difficult to follow the progress of the transferral of the *mathematical devices* from Capodimonte to the King's private chambers at the Royal palace as the documents referring to that period have suffered irreparable damage.

The first time the collection began to break up was in 1787, when the rooms holding the Farnese archives, the physics machines and the clocks at Capodimonte were assigned to the restorer Frederic Anders on the advice of the court painter Philipp Hackert. The most precious pieces remained at the private residence of Ferdinand IV at the Royal Palace to adorn his rooms. Some stayed at Capodimonte, while others went to the Palazzo dei Regi Studi, now the Museo Archeologico Nazionale, at the disposal of the Accademia delle Scienze, founded nine years before in 1778. It had an unhappy existence, with few means and little scientific output [10].

A vital document for knowing the whereabouts of instruments that had been at Capodimonte is the letter dated 1802 of Professor of physics Giuseppe Saverio Poli (Fig. 1) [11], requesting the transfer of a number of instruments to the Military Academy Nunziatella, under his direction. The instruments in question were: a burning mirror, a large double lens, a pyrometer, the "colonna universale", the pneumatic machine and the central forces machine. He believed they might be useful for his young cadets.

Giuseppe Zurlo, Secretary of the Royal Household, in authorizing this transfer, signs the warrant for their later loss. The subsequent changes in regime – from a decade of French rule (1806-1815), to the restoration of the Bourbons – led to a further dispersion of the royal collection, which follows the king, along with other collections in exile to Palermo.

The Stabilimenti, Musei, and Gabinetti set up by the French, and which the Bourbons did not interfere with at their return did not interrupt activities; indeed, they became even more established and enjoyed royal support.

Another element behind the urge to enhance the role of museums and the instruments distributed between the royal apartments of the Private Library, was strictly practical. After the fire which tore through the Royal Palace on 6th February in 1837, renovation work began under the architect Gaetano Genovese. On this occasion, the first floor was set aside for ceremonial purposes, and the second for the private residence of Ferdinand II, who had the library and physics instruments collection installed next to the royal apartments.

The paperwork left by the director of the Gabinetto Fisico, Domenico De Miranda, and by Luigi Imperiali, Director of the king's Private Library, attests to the creation of a museum for the instrument collection.

From inventories and continuous requests for inventories, it is clear that there was a move to enrich sections of the scientific collections, by now including physics, which had divided into branches as it became more and more specialised.

The segmentalization of knowledge and discipline was the lynchpin of museum organisation. Eighteenth century Physics Manuals had their own area and specific position in the museum, at a distance from the instruments, and the subject was now subdivided into Mechanics, Electricity, Magnetism, Optics and the Wave Theory of heat.

The king's private library was on the second piano nobile, and had eight rooms, and next to it, in two rooms, were the physics instruments. Details of how the instruments were laid out in the royal museum come to us from an invaluable document kept in the Naples State Archives, entitled "Project for the Layout of Physics Chemistry Machines in the Royal Laboratory of the Private Library" [12]. Here we can find a list of instruments: those in the museum, those that were missing, and those ordered to complete the collection, with the instructions of the manufacturers, the place of origin and the date when they were commissioned.

The instruments were exhibited in two rooms. The first of these was dedicated to physics, mathematics and chemistry, divided into astronomy, geodesy, mechanics, statics and dynamics. The second room was dedicated to experimental physics, divided into pneumatics, heat, electricity, magnetism and meteorology. We know that this project was approved because we have an inventory of instruments with neither title nor date, which we believe can be

dated at 1845, so it would correspond to that particular project and accurately describes 300 machines [13].

This document is extremely important, not only because it gives a clear idea of the extent of the Royal Collection, but especially because it helps understand the museological criteria in use at the time. It is clear that the museum was intended to show the latest discoveries, including the most recent findings regarding heat (Figs. 2,3). This magnificent optics bench was purchased from Ruhmkorff in 1842. The thermomultiplier had a thermoelectric battery connected electrically to Nobili's astatic galvanometer, both designed by Macedonio Melloni. These devices were well known in Europe and America, and Melloni himself, who had recently moved to Naples, used them in his research into radiating heat, with excellent results.

The Royal Museum, almost always referred to as Gabinetto Fisico, was run alternately by Domenico de Miranda, Giacomo Maria Paci and Raffaele Napoli. Management was subordinate to the administration department of the Royal Library, itself under the Maggiordomia Maggiore, one of the branches of the Secretariat of State and Ministry of the Royal Household.

The first Director of the museum was the navy Lieutenant Domenico de Miranda, who ran it until 1846, handling the initial stages of the founding of the museum, looking after the exhibits and increasing the collection. De Miranda was interested in updating the museum's scientific content and purchased the better known manuals of the day including Becquerel's Traité de Electricité et Magnetisme, the Treatises on Physics by Peclet and Pouillet, and those on Hydraulics and Chemistry by Aubusson and Grahm. A real effort at expansion was made by Giacomo Maria Paci, who worked alongside Miranda and then took over from him in 1846, while keeping him on as a substitute. He purchased physics instruments and others, of public utility, and so the museum began to move towards a more modern vision of a museum as already adopted by other European capitals.

Paci's modern outlook comes across in his letter of 16th June 1851, where, for example, he suggests purchasing new instruments such as the "fire annihilator", a kind of early fire extinguisher, which used a strong steam jet to quell fires. Paci thought that this device could be installed in the royal residences [14]. The purchase of this instrument along with others was, however, turned down by the Director of the Royal Library.

A similarly narrow view was prevalent in other Neapolitan museums and laboratories, showing the distance between the public administration and the scientific university institutions, possibly after the well known events of 1848.

When, in 1850, the ministry requested opening the institutions to the public on Mondays and Thursdays from 9 am to 3 pm, as was already the case of the galleries and archaeological departments of the Royal Bourbon Museum, the Academics replied with a resounding refusal.

Francesco Saverio Scarpati, director of the Applied Chemistry Laboratory, considered such a thing beneath the dignity of a professor, and Mario Giardini, director of the Physics Laboratory, refused to liken "this hallowed place of science to a public theatre". Domenico Presutti, director of the Chemistry Laboratory, was also of this opinion. They had no intention of transforming their laboratories into public thoroughfares, still less did they intend to pass for quacks or showmen. Their European colleagues such as Faraday and Maxwell did not share their view, another sign of how behind the times the official culture in Naples was then.

Naples was reminded of its proximity to Europe, however, by the presence of those on the Grand Tour who still came to the city to contemplate artistic and natural beauties. Among the attractions, works of art, and wonders of architecture, there was also the Gabinetto Fisico del Re. According to Saverio Bruno, in his Naples Observer, or Report on Civil Institutions, who writes of the King's Private Library's Gabinetto Fisico, "*No less worthy of admiration is the Laboratory of Physical Science, furnished with a copious array of machines made by the best known scientists, such as Dollond, Traughton, Clarke, Newmann, Pixii, Fraunhofer*" [15].

The last curator of the Gabinetto reale was the chemist, Raffaele Napoli, who took over from Paci upon his demise in 1850. He oversaw the transferral of the collection when Naples became part of the Unified State. The official act took place on 20th December 1860, when Filippo Cassola took possession of "all the instruments and apparatus" [16]. Raffaele Napoli, along with the mechanic-craftsman Giovanni Bandieri and the clockmaker Francesco Bighencomer, the Carthusian restorer of the Farnese Planisphere, carried out the complex transfer of ownership process only a few days after the arrival of Garibaldi in Naples.

In 1862, a few instruments and some apparatus, all by Bandieri, were sent to the Great Exhibition in London. The Collection of the Gabinetto del Re was kept in the Royal Palace until 22th May, 1879, when the one hundred and sixty-one instruments were moved to the palace at Capodimonte. From then until 1893, the instruments were, according to the sources, given piecemeal to the university. The Collection would become an integral part of the University Laboratory Museum, for "public utility" and teaching purposes, which took on a new aspect in 1878 with the arrival of the new director Gilberto Govi, professor

of experimental physics. Rather than developing new academic courses, he worked to transform the Gabinetto into a modern research laboratory. And it is in the decade of Govi's tenure, while living in Naples, that the greatest number of instruments left Capodimonte for the Gabinetto Universitario.

From then on, the Collection lost its original unity and dimensions, to be subsumed, by the beginning of the twentieth century, into a vaster multitude of around 1,300 instruments making up the Gabinetto Universitario, and its future history.

4 References

[1] E. Ragozzino, E. Schettino, *La Collezione degli antichi strumenti dell'istituto di Fisica- Gli strumenti ottici*, Napoli (1984);
E. Ragozzino, E. Schettino, *La Collezione degli antichi strumenti dell'istituto di Fisica-Meccanica dei fluidi e termologia,* Napoli (1985);
E. Ragozzino, E. Schettino, *La Collezione degli antichi strumenti dell'istituto di Fisica-Elettricità e magnetismo*, Napoli (1985);
E. Ragozzino, E. Schettino, *Early Instruments of the Institute of Physics*, Naples (1986);

[2] E. Schettino, R. Spadaccini, *Le Macchine del Re. La Collezione Reale nel Museo del Dipartimento di Scienze Fisiche.* Archivio di Stato di Napoli. Napoli (1995), pp.1-148.

[3] F. Venturi, *Settecento Riformatore da Muratori a Beccaria*, Torino (1969).

[4] A. Koyré, *Les philosophes et la machine. Du monde de l'à-peu-près à l'univers de la precision*, Paris (1961).

[5] Archivio di Stato di Napoli, *Notamento di ciò che occorre farsi alle macchine fisiche esistenti*, Casa Reale Amministrativa, Categorie Diverse, 247/5.

[6] E. Schettino, R. Spadaccini, *Le Macchine del Re. La Collezione Reale nel Museo del Dipartimento di Scienze Fisiche.* Archivio di Stato di Napoli. Napoli (1995), pp.1-148.

[7] AA.VV., *Museo di Capodimonte*, Milano (2002).

[8] L. Di Mauro, *Settecento Napoletano. Sulle ali dell'aquila imperiale (1707-1734)*, in AA.VV. (Editors), Napoli (1994), pp. 361-362.

[9] E. Schettino, *L'insegnamento della fisica sperimentale a Napoli nella seconda metà del Settecento*, Studi Settecenteschi, vol. 18, Napoli (1998), pp. 367-376.

[10] M. Maylander, *Storia delle Accademie d'Italia,* vol.5, Bologna (1929), pp. 128-130.

[11] Archivio di Stato di Napoli, *Casa Reale Amministrativa, Maggiordomia Maggiore 102*. Vol. 1.

[12] Archivio di Stato di Napoli, *Progetto per la distribuzione delle macchine fisiche e chimiche nel Reale Gabinetto della Biblioteca privata*, Casa Reale Amministrativa, Categorie Diverse, 246/5.

[13] Archivio di Stato di Napoli, *Casa Reale Amministrativa*, Categorie Diverse, 247/49.
[14] Archivio di Stato di Napoli, *Casa Reale Amministrativa*, Categorie Diverse, 250/93
[15] S. Bruno, *L'Osservatore di Napoli, ossia Rassegna delle Istituzioni Civili,* Napoli (1855), p.372.
[16] R. Spadaccini, *Relazioni, verbali e piante dell'Archivio di Stato di Napoli*, in *La cultura scientifica e le sue istituzioni. Napoli 1860-1915*, Napoli (2001).

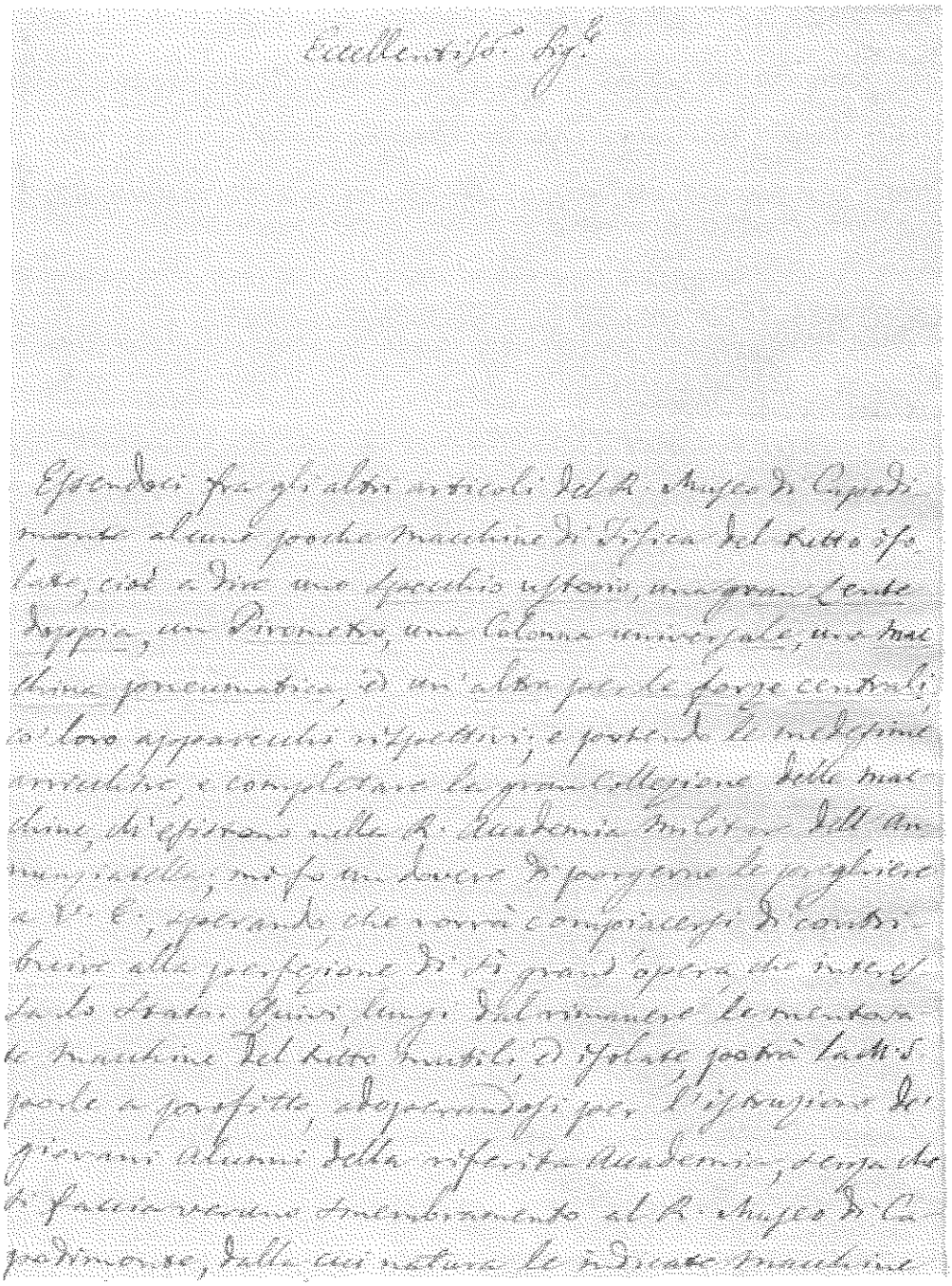


Fig. 1 – A manuscript letter of G. S. Poli, Archivio di Stato di Napoli
Casa Reale Amministrativa, *Maggiordomia maggiore*, 102. Vol. 1

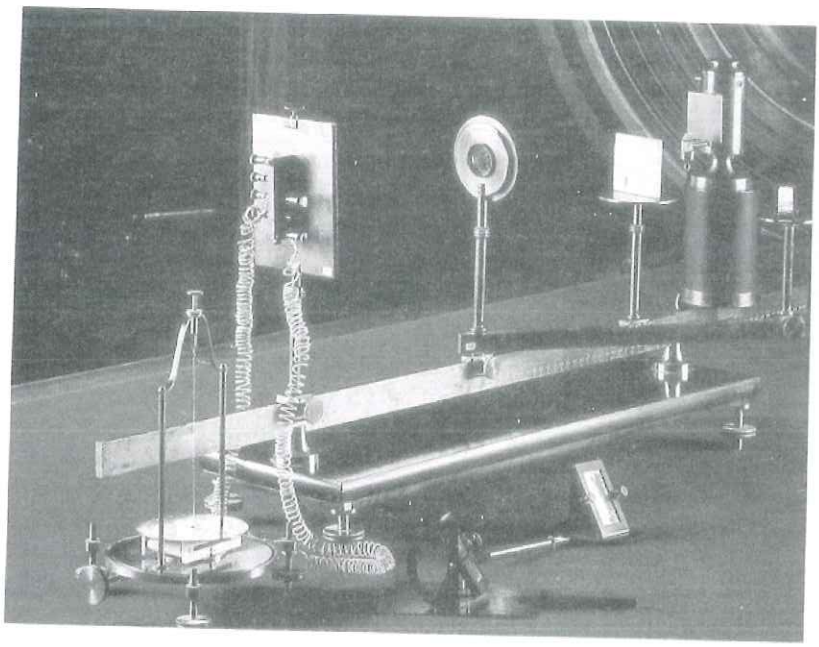


Fig.2 - The Melloni's Optical Bench
Museo di Fisica of the Federico II University of Naples.

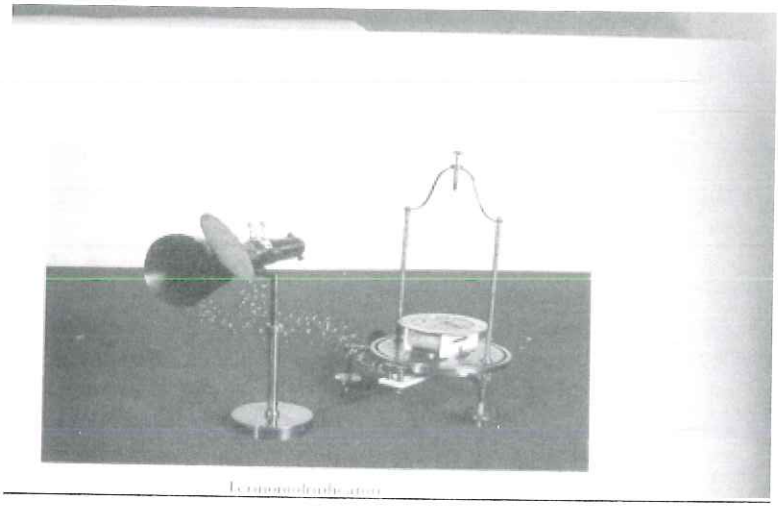


Fig. 3 – The Melloni's Thermomultiplier
Museo di Fisica of the Federico II University of Naples.

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXXIII, (2006) pp. 61-83

Stability and other properties for nonlinear double diffusion including cross-diffusion

Nota di J.N. Flavin[a], M.F. McCarthy[a] e S. Rionero[b*]

Presentata dal Socio Prof. S. Rionero

(Adunanza del 5 maggio 2006)

Abstract - The article studies nonlinear double diffusion, with cross-diffusion, under time-independent Dirichlet boundary data. Uniqueness, non-uniqueness, and non-existence criteria are obtained. By using novels Liapunov functionals, conditions guaranteing the stability and attractivity of steady states are furnished. Both linear and nonlinear stability are discussed together with some aspects of (linear) instability.

Riassunto - Si studia la *cross-diffusion* nonlineare di due sostanze in un dominio limitato sotto condizioni al bordo di Dirichlet. Sono fornite condizioni per l'esistenza, unicitá e non unicitá degli stati stazionari. Di questi se ne studia poi sia la stabilitá che l'instabilitá attraverso l'uso di particolari funzionali di Liapunov.

1 Introduction

Cross- diffusion, because of its relevance to many fields [multifluid dynamics, population dispersal, biology (chemotaxis), spatial ecology, chemistry] has attracted the attention of many authors, both in the past and in recent times {cfr. [6], [7] and references therein}.

[a]Department of Mathematical Physics, National University of Ireland, Galway, Ireland.
[b]Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R. Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II", Napoli.(e-mail:rionero@unina.it)

Nonlinear double diffusion, which includes cross-diffusion, is the subjNonlinearect of this article.

The principal concern of the article is the stability of the steady states together with the convergence of the unsteady states thereto.[The term stability etc. used in this paper, everywhere relates to perturbations/changes in the initial conditions, with one exception occurring in Section 5.] To this end, we use functionals that are analogues of Liapunov functionals used previously in the context of single, nonlinear diffusion equations, and allied systems [1], [2], [3], [4].

Prior to these considerations, it is deemed appropriate to make some remarks concerning uniqueness, nonuniqueness, and nonexistence of the steady states.

The organization of the paper is now discussed. Section 2 describes the initial boundary value problem, the steady state problem, and the perturbation (of the steady state) problem. Section 3 focuses on steady states: it contains a uniqueness criterion, discusses some examples of non-uniqueness, and contains some remarks on non-existence. Section 4 discusses matters concerning linear stability and instability of steady states: a stability criterion based on a Liapunov functional is derived; and, concerning an example of two steady states identified in Section 3, we discuss evidence for the stability of one and the instability of the other. The section concludes with a discussion of constant steady states (corresponding to constant boundary conditions). Section 5 discusses nonlinear stability of the steady states. Analogues of Liapunov functionals, used in connection with a single diffusion equation *inter alia* [[1], [2], [3], [4]] are identified: these are called functionals of type one and type two, in accordance with previous nomenclature. The functional of type two, involving spatial derivatives for the perturbation is found to be the most powerful, yielding criteria of (simple) nonlinear stability and criteria for asymptotic exponential nonlinear stability. On the other hand, the functional of type one, involving the perturbations themselves (and not derivatives), yields a criterion of (simple) nonlinear stability only.

The principal results relating to stability etc. are recorded as Theorems and the principal results on other matters as Propositions.

General discussions on stability relevant to this article may be obtained in [5], [6]. Techniques analogous to the main one used in this paper (for the study of stability and asymptotic properties) appear also in [7], [8]: these treat the estimation of positive-definite integral measures, by differential inequality techniques, arising in a wide variety of contents involving partial differential equations.

2 Preliminaries

We shall, in general, be concerned with a three-dimensional region V with smooth boundary ∂V. We shall be concerned with the double diffusive system $T(\mathbf{x},t), S(\mathbf{x},t)$ are smooth functions satisfying

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla \cdot \{k(T)\nabla T + m(S)\nabla S\} \\ & \qquad\qquad in \;\; V, \\ \frac{\partial S}{\partial t} &= \nabla \cdot \{n(T)\nabla T + l(S)\nabla S\} \end{aligned} \tag{1}$$

where the diffusivities $k(T) > 0, \ell(S) > 0, m(S), n(T)$ are specified, continuously differentiable functions of their arguments, subject to the boundary conditions

$$T = \bar{T}(\mathbf{x}), S = \bar{S}(\mathbf{x}) \qquad on \quad \partial V \tag{2}$$

and subject to the initial conditions

$$T(\mathbf{x},0) = f(\mathbf{x}), \qquad S(\mathbf{x},0) = g(\mathbf{x}), \tag{3}$$

where $\bar{T}, \bar{S}, f, g$ are specified functions.
We shall be concerned also with the corresponding steady state system: Denoting the steady states, corresponding to T, S respectively by $U(\mathbf{x}), V(\mathbf{x})$, we have

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \{k(U)\nabla U + m(V)\nabla V\} = 0 \\ & \qquad\qquad in \;\; V, \\ &\nabla \cdot \{n(U)\nabla U + \ell(V)\nabla V\} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

or, equivalently and more conveniently,

$$\begin{aligned} &\nabla^2 \left[\int_0^U k(\xi)d\xi + \int_0^V m(\eta)d\eta\right] = 0, \\ & \qquad\qquad in \;\; V, \\ &\nabla^2 \left[\int_0^U n(\xi)d\xi + \int_0^V \ell(\eta)d\eta\right] = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

subject to the boundary conditions

$$U = \bar{T}(\mathbf{x}) \qquad , V = \bar{S}(\mathbf{x}) \quad on \;\; \partial V. \tag{6}$$

[The use of the symbol V to denote both the region and a steady state is not liable to cause confusion.]

One expects the unsteady state to tend to a steady state as the time $t \to \infty$ in appropriate circumstances. Indeed, our principal concern will be the

stability and instability of the steady states (with respect to perturbations in the initial state). To this end, we consider the perturbations u, v defined by

$$u = T - U, \quad v = S - V \tag{7}$$

and one finds that u, v satisfy

$$\begin{aligned} u_t &= \nabla^2 \left[\int_0^u k(\xi + U) d\xi + \int_0^v m(\eta + V) d\eta \right], \\ v_t &= \nabla^2 \left[\int_0^u n(\xi + U) d\xi + \int_0^v \ell(\eta + V) d\eta \right], \end{aligned} \tag{8}$$

(where subscript t denotes partial differentiation with respect to this variable) subject to

$$u = v = 0 \qquad on \quad \partial V \tag{9}$$

and

$$u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}) \quad , v(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}). \tag{10}$$

One context to which the above system (1)-(3) etc. may be relevant is a predator- prey system where the advection velocities are neglected; see [7], for example. The quantities T, S denote the concentrations of predator and prey respectively, and $m(S)(> 0)$ corresponds to diffusion of predator towards increasing population density of prey, while $n(T)(< 0)$ corresponds to diffusion of prey away from increasing concentrations of predator.

3 Remarks on uniqueness, non-uniqueness, and non-existence of steady states

We now discuss some uniqueness criteria for steady states as these are of relevance to the stability criteria dealt with subsequently. Supposing that $U_1(\mathbf{x}), V_1(\mathbf{x})$ is a particular steady state, and that

$$U_1(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}, \qquad V_1(\mathbf{x}) + \nu(\mathbf{x})$$

is another - where μ, ν are zero on the boundary- then (5) implies

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left[\int_0^\mu k(\xi + U_1) d\xi + \int_0^\nu m(\eta + V_1) d\eta \right] &= 0, \\ \nabla^2 \left[\int_0^\mu n(\xi + U_1) d\xi + \int_0^\nu \ell(\eta + V_1) d\eta \right] &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

The uniqueness issue reduces to that of proving $\mu = \nu = 0$.
Observe first, on putting

$$\begin{aligned} F &= \int_0^\mu k(\xi + U_1)d\xi + \int_0^\nu m(\eta + V_1)d\eta, \\ G &= \int_0^\mu \eta(\xi + U_1)d\xi + \int_0^\nu \ell(\eta + V_1)d\eta, \end{aligned} \tag{12}$$

multiplying (11) by F, G, and integrating by parts etc., we obtain

$$\int (\nabla F)^2 dV = \int (\nabla G)^2 dV = 0.$$

This implies that $\nabla F, \nabla G$ are zero, whence F, G are constants (in V). Since $\mu = \nu = 0$ on the boundary, it follows that

$$\begin{aligned} &\int_0^\mu k(\xi + U_1)d\xi + \int_0^\nu m(\eta + V_1)d\eta = 0, \\ &\int_0^\mu n(\xi + U_1)d\xi + \int_0^\nu \ell(\eta + V_1)d\eta = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

We now give some uniqueness results:
Proposition 1. *If $k(\cdot) > 0$ and $\ell(\cdot) > 0$ and either $m(\cdot)$ is uniformly non-negative and $n(\cdot)$ is uniformly non-positive or vice versa, then there is at most one steady state.*
Proof: The proof is based on an examination of (13) and is elementary.
Proposition 2. *Suppose that there exist (integrable) quantities $k_0(\mathbf{x})(> 0)$, $\ell_0(\mathbf{x})(> 0)$, $m_0(\mathbf{x})(\geq 0)$, $n_0(\mathbf{x})(\geq 0)$ such that the following five inequalities hold a.e.*

$$k(\cdot) \geq k_0, \quad \ell(\cdot) \geq \ell_0, \quad |m(\cdot)| \leq m_0, \quad |n(\cdot)| \leq n_0$$

where

$$4k_0\ell_0 > (m_0 + n_0)^2,$$

then there is at most one steady state.
Proof: One easily proves that (14)-(16) hold a.e.:

$$\mu \int_0^\mu k(\xi + U_1)d\xi \geq k_0\mu^2 \tag{14}$$

(irrespective of the sign of μ) and

$$\nu \int_0^\nu \ell(\eta + V_1)d\eta \geq \ell_0\nu^2; \tag{15}$$

and that

$$\begin{cases} \mu \int_0^{\nu} m(\eta + V_1) d\eta \geq -m_0 |\mu\nu| , \\ \nu \int_0^{\mu} n(\xi + V_1) d\xi \geq -n_0 |\mu\nu| . \end{cases} \tag{16}$$

Multiply (13_1) by μ , (13_2) by ν, integrate over the region, and note (14)-(16) to obtain

$$\int_V [k_0\mu^2 + \ell_0\nu^2 - (m_0 + n_0) |\mu\nu|] dV \leq 0. \tag{17}$$

The quadratic form in $|\mu|, |\nu|$ is positive definite in view of the conditions on k_0, ℓ_0, m_0, n_0. In view of this and the continuity of μ, ν, it follows that

$$\mu = \nu = 0$$

i.e. there is at most one steady state.

Remark 1.*Similar reasoning shows that a slight generalization of Proposition 2 holds: If the first four inequalities given in Proposition 2 hold for*

$$|\mu| \leq \mu_0(\mathbf{x}), |\nu| \leq \nu_0(\mathbf{x})$$

where μ_0, ν_0 are non-negative quantities (viz. $k(U_1 + \mu) \geq k_0(\mathbf{x}), |m(V_1 + \nu)| \leq m_0(\mathbf{x})$ etc. for the stated range of μ, ν), then there is only one steady solution of the type $(U_1 + \mu, V_1 + \nu)$ for the stated range of μ, ν (i.e when $\mu = \nu = 0$).

We now give an example of *non-uniqueness*: we give a non-trivial, explicit example of two steady states,which can be anticipated from symmetry considerations. Suppose, for the sake of simplicity, that the diffusivities are given by

$$k(\tau) = 1 + \tau = m(\tau), \qquad n(\tau) = \ell(\tau) = 1. \tag{18}$$

Suppose, also for simplicity, that we are dealing with a one-dimensional region $0 < x < 1$, x being a rectangular cartesian coordinate, and suppose that the boundary conditions are

$$U = V = 0, \quad x = 0; \qquad U = V = 1, \quad x = 1. \tag{19}$$

Integration of (17) in this case leads to

$$U^2 + V^2 = A + Bx, \qquad U + V = C + Dx, \tag{20}$$

where A, B, C, D are constants,and use of the boundary conditions (19) determines these, giving

$$U^2 + V^2 = 2x, \qquad U + V = 2x. \tag{21}$$

Solving gives the two steady states

$$U = x + \sqrt{x - x^2}, V = x - \sqrt{x - x^2}$$

and

$$U = x - \sqrt{x - x^2}, V = x + \sqrt{x - x^2}. \tag{22}$$

Note, *en passant*, that U_x, V_x have singularities (albeit integrable) at $x = 0, x = 1$.

We summarize as follows:

Proposition 3. *In the context of diffusivities given by* (18), *and that of the one dimensional rectilineal region* $0 < x < 1$, *with boundary conditions given by* (19), *there are two steady state solutions* [*of* (4)] *given by (22).*

Remark 2. *Proposition 3 can be generalized to other dimensions. Suppose, that, for example, we are dealing with a doubly connected region, and that on the internal and external boundaries* S_0, S_e, *one has the boundary conditions*

$$U = 0 \quad on \ \ S_0, \ \ U = 1 \quad on \ \ S_e.$$

Let $H(\mathbf{x})$ *be the (unique) harmonic function taking values* $0, 1$ *on* S_0, S_e *respectively. As previously, one finds*

$$U^2 + V^2 = 2H, \qquad U + V = 2H$$

whence the following pair of steady states is recovered:

$$\begin{aligned} U &= H + \sqrt{H - H^2}, \quad V = H - \sqrt{H - H^2}, \\ U &= H - \sqrt{H - H^2}, \quad V = H + \sqrt{H - H^2}. \end{aligned}$$

We now give a theorem which demonstrates the extent to which one can anticipate non-uniqueness of the type exemplified by the examples just given. To this end, we commence with (13), albeit in a different form. Suppose that, in addition to the solution $U_1(\mathbf{x}), V_1(\mathbf{x})$, another solution is

$$U_2(\mathbf{x}) = U_1(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}), \ V_2(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x}) + \nu(\mathbf{x}),$$

then (13) is equivalent to

$$\int_{U_1}^{U_2} k(\xi) d\xi + \int_{V_1}^{V_2} m(\eta) d\eta = 0,$$

(23)

$$\int_{U_1}^{U_2} n(\xi)d\xi + \int_{V_1}^{V_2} l(\eta)d\eta = 0.$$

We proceed to the following proposition (wherein the dependence of all functions on **x** is suppressed):

Proposition 4. *In the context of the steady state problem defined by* (4),(6), *wherein the boundary values are equal* (i.e. $\bar{T} = \bar{S}$), *let* (U_1, V_1) *be a steady state with*

$$U_1 V_1 \tag{24}$$

then (U_2, V_2) *with*

$$U_2 \equiv V_1, \; V_2 \equiv U_1 \tag{25}$$

is also a steady state, iff

$$\begin{aligned} \int_{U_1}^{V_1} k(\tau)d\tau &= \int_{U_1}^{V_1} m(\tau)d\tau, \\ \int_{U_1}^{V_1} n(\tau)d\tau &= \int_{U_1}^{V_1} \ell(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{26}$$

Proof. Assuming (25),(26) we are led to (23). On the other hand, assuming (23),(25) we are led to (26). The proposition is thus proved.

Simple arguments of the type leading to the non-uniqueness result embodied in Proposition 3, may also be used to give examples of *non-existence* of steady states. Suppose that the one-dimensional problem defined by (18),(19), *inter alia*, is reconsidered with the following (slightly) altered diffusivities

$$k(\tau) = m(\tau) = 1 + \tau^2, \quad n(\tau) = \ell(\tau) = 1. \tag{27}$$

Integration of (17) in this case leads to

$$U^3 + V^3 = A + Bx, \;\; U + V = C + Dx, \tag{28}$$

where A, B, C, D are constants. Use of the boundary conditions (19) gives

$$U^3 + V^3 = 2x, \;\; U + V = 2x. \tag{29}$$

Eliminating V from these gives

$$x[3U^2 - 6xU + (4x^2 - 1)] = 0$$

leading to

$$3U^2 - 6xU + (4x^2 - 1) = 0 \tag{30}$$

Examination of this shows that the solution U is not compatible with the boundary condition $U = 0, x = 0$. [Explicitly, one has, in fact,

$$U = x \pm \sqrt{(1 - x^2)/3.}]$$

In other words, no steady state exists in the circumstances at hand.

The latter result may be generalized as follows: consider the one-dimensional rectilinear region $0 \leq x \leq 1$, the diffusivities

$$k(\tau) = m(\tau) = 1 + \phi(\tau), \qquad m(\tau) = \ell(\tau) = 1 \tag{31}$$

where $\phi(\tau)$ - a piecewise continuous function, say - satisfies

$$\phi(-\tau) = \phi(\tau), \ \phi(0) = 0, \tag{32}$$

and boundary conditions

$$U = V = 0 \qquad at \ \ x = 0 \tag{33}$$

while (the boundary values) $U(1), V(1)$ are not specified explicitly.

Integration of the steady state equation leads to

$$\begin{aligned} \int_0^U \phi(\tau)d\tau + \int_0^V \phi(\tau)d\tau &= A + Bx, \\ U + V &= C + Dx, \end{aligned}$$

A, B, C, D being constants. Use of the boundary conditions gives

$$\begin{aligned} \int_0^U \phi(\tau)d\tau + \int_0^V \phi(\tau)d\tau &= Bx, \\ U + V &= Dx, \end{aligned} \tag{34}$$

where

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{U(1)} \phi(\tau)d\tau + \int_0^{V(1)} \phi(\tau)d\tau, \\ D &= U(1) + V(1). \end{aligned} \tag{35}$$

Eliminating V from (34) gives

$$\int_0^U \phi(\tau)d\tau + \int_0^{Dx-U} \phi(\tau)d\tau = Bx,$$

A simple change of variable establishes, on noting (32_1), that

$$\int_0^{Dx-U} \phi(\tau)d\tau = -\int_0^{U-Dx} \phi(\tau)d\tau.$$

Thus

$$\int_{U-Dx}^{U} \phi(\tau)d\tau = Bx.$$

Dividing through by x and taking the limit as $x \to 0$ gives

$$\lim_{x\to 0}\left\{x^{-1}\int_{U-Dx}^{U} \phi(\tau)d\tau\right\} = B.$$

Using l'Hopital's rule,

$$\lim_{x\to 0}[\phi(U)U' - \phi(U-Dx)(U'-D)] = B,$$

the prime denoting differentiation with respect to x. Thus since $U(0) = 0$ and $\phi(U(0)) = 0$ we have

$$B = 0.$$

Thus if $U(1), V(1)$ are such that

$$\int_0^{U(1)} \phi(\tau)d\tau + \int_0^{V(1)} \phi(\tau)d\tau \neq 0,$$

there is non-existence.
Thus we have

Proposition 5. *In the context of the steady state problem* (4) *for the one-dimensional rectilineal region* $0 \leq x \leq 1$, *where the boundary conditions are such that* (33) *holds, and where the diffusivities are as specified in* (31),*(32) the solution fails to exist if the boundary conditions at* $x = 1$ *are such that*

$$\int_0^{U(1)} \phi(\tau)d\tau + \int_0^{V(1)} \phi(\tau)d\tau \neq 0.$$

Remark 3. *It is possible to generalize Proposition 4 to a doubly connected region along the lines of Remark 2.*

Whereas existence criteria are not the concern of this article, some such criteria are available, for example, in [8].

4 Linear stability. Instability

One may readily verify that the linearised version of the perturbation equations (8_1) are

$$u_t = \nabla^2 [k(U)u + m(V)v], \tag{36}$$

$$v_t = \nabla^2 [n(U)u + \ell(V)v]. \tag{37}$$

In order to consider the linear stability etc.of the steady state solution, consider the (Liapunov) functional

$$F(t) = \frac{1}{2}\int_V [\{\nabla(k(U)u + m(V)v)\}]^2 + \{\nabla(n(U)u + \ell(V)v)\}^2]dV. \tag{38}$$

Under appropriate conditions, the integrand in (38) is positive-definite in u, v, as may be seen from the following considerations: Since the integrand is plainly non-negative, it remains to prove that the vanishing of the integrand implies that $u = v = 0$. The vanishing of the integrand together with the vanishing of u, v on the boundary imply

$$k(U)u + m(V)v = 0,\ n(U)u + \ell(V)v = 0 \tag{39}$$

Assuming

$$k(U)\ell(V) - m(V)n(U) \neq 0 \tag{40}$$

except possibly on the boundary ∂V (where u, v are, in any case, both zero), then (39) implies that $u = v = 0$.
We summarize:
Proposition 6. *Assuming the condition* (40), *the integrand in the functional* (38) *is positive definite in* u, v.
Differentiation of (38) with respect to time (for $t > 0$) gives

$$\frac{dF}{dt} = \int_V [\nabla(ku + mv) \cdot \nabla(ku + mv)_t + \nabla(nu + \ell v) \cdot \nabla(nu + \ell v)_t]dV]. \tag{41}$$

Use of the divergence theorem and the vanishing of u, v on the boundary, gives

$$-\frac{dF}{dt} = \int_V \left[\nabla^2(ku + mv)(ku + mv)_t + \nabla^2(nu + \ell v)(nu_t + lv_t)\right] dV \tag{42}$$

Using (37) gives

$$-\frac{dF}{dt} = \int_V [k(U)\{\bigtriangledown^2(ku+mv)\}^2 + \ell(V)\{\bigtriangledown^2(nu+\ell v)\}^2]dV$$
$$+ \int_V [\{m(V)+n(U)\}\bigtriangledown^2(ku+mv)\bigtriangledown^2(nu+\ell v)]dV \tag{43}$$

Suppose now that

$$k(U) > 0, \ell(V) > 0,\ 4k(U)\ell(V) > \{m(V)+n(U)\}^2, \tag{44}$$

[Note, *en passant*, that (44) implies (40)]. The conditions(44) imply that the integrand is positive-definite in $\bigtriangledown^2(ku+nv)$ and $\bigtriangledown^2(nu+lv)$. The vanishing of these latter quantities plainly imply that $u = v = 0$. Hence

$$\frac{dF}{dt} \leq 0$$

the equality sign occurring if $u = v = 0$. This may be verbalized as follows:

Theorem 1. *Assuming the condition* (44), *the steady state* U, V *is linearly stable with respect to the Liapunov functional* F *(positive-definite in* u, v*) in the sense that* $F(t)$ is a *non-increasing function* of t.

Remark 4. *Let us consider the two steady states given by (22). From the point of view of linear stability etc., the overwhelming likelihood is that the first is linearly stable and that the second is linearly unstable.*

In the case of the solution (19_1) the (sufficient) condition for linear stability (44) is very nearly satisfied everywhere: one finds numerically that the quantity

$$4k(U)\ell(V) - \{m(V)+n(U)\}^2 = 4\left\{1+x+(x-x^2)^{1/2}\right\} - \left\{2+x-(x-x^2)^{1/2}\right\}^2 \tag{45}$$

is positive everywhere in $0 < x < .9905$ (approx.) while it is negative in the remaining, tiny subinterval, apart from at $x = 0$ (where it is zero). The proof of the theorem strongly suggests that one has linear stability here. Moreover, a Galerkin approximation, up to the third order, exhibits negative eigenvalues in all cases (see Appendix).

On the other hand, for the other steady state solution (19_2) one has the reverse inequality

$$4k(U)\ell(V) - \{m(V)+n(U)\}^2 < 0 \tag{46}$$

everywhere, except at $x = 0$ (where it is zero). Linear instability is extremely likely here for two reasons:

(a) A Galerkin approximation, up to the third order, exhibits at least one positive eigenvalue at each order of approximation (see Appendix).

(b) one may choose initial conditions in the circumstances of (46) such that $dE/dt > 0$ in the limit $t \to 0$.

It should be noted that a number of standard techniques for the approximation of real eigenvalues are not available here as the relevant operator is not symmetric, nor apparently symmetrizable.

Remark 5. *The second state solution (19_2) of the relevant problem is also unstable in another sense. Suppose the boundary condition (16_2) is altered to read*

$$U = 1 + \delta, V = 1 \qquad at \quad x = 1,$$

where δ is a constant, all other conditions remaining the same. A simple calculation gives

$$U = (1 + \delta/2)x \pm \sqrt{\{(1+\delta)^2 + 1\}\, x/2 - (1 + \delta/2)^2 x^2}. \tag{47}$$

If the - sign is taken it is easily seen that $U(1) = 1$, i.e. this does not give a valid solution. That is to say, the solution (19_2) is unstable to perturbations in the boundary condition at $x = 1$. On the other hand, the solution (47) with a + sign is seen to be a valid solution.

With a view to obtaining a linear instability result, and for other purposes, essentially we consider a special case of (34):
we consider the system $u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t)$ satisfying

$$\begin{aligned} u_t &= \nabla^2(D_{11}u + D_{12}v), \\ v_t &= \nabla^2(D_{21}u + D_{22}v), \end{aligned} \tag{48}$$

subject to

$$u = v = 0 \qquad on \quad \partial V, \tag{49}$$

where D_{ij} are constants. Let λ_1 be the lowest "fixed-membrane" eigenvalue for the region and X the corresponding eigenfunction
(i.e. X satisfies

$$\begin{aligned} \nabla^2 X + \lambda_1 X &= 0 \ \ in \ \ V, \\ X &= 0 \ \ on \ \ \partial V). \end{aligned}$$

Seek harmonic solutions of (48) of the form

$$(u, v) = (u^0, v^0)e^{pt}X \tag{50}$$

where u^0, v^0, p are constants. Substitution of (50) in (48)-(49)) leads to an equation for p of the form:

$$2p/\lambda_1 = -(D_{11} + D_{22}) \pm \sqrt{(D_{11} + D_{22})^2 - 4(D_{11}D_{22} - D_{21}D_{12})}.$$

Let us now suppose that the linear instability of the steady state problem (4),(6) is considered, with *constant* boundary conditions: $\bar{T}, \bar{S}$ are both constants. Considering the obvious steady solution

$$U \equiv \bar{T}, \; V \equiv \bar{S}, \tag{51}$$

the linearized perturbation equations (37) have the form (48) with

$$D_{11} = k(\bar{T}), \; D_{12} \; = m(\bar{S}), \; D_{21} = n(\bar{T}), \; D_{22} = \ell(\bar{S}).$$

Since $k > 0$,$\ell > 0$ have been assumed, the following linear instability result follows from the result of the previous paragraph:

Theorem 2. *The constant steady solution U, V (defined by (51)), corresponding to constant boundary conditions ($U = \bar{T}, V = \bar{S}$) is linearly unstable, provided that*

$$k(\bar{T})\ell(\bar{S}) < m(\bar{S})n(\bar{T}).$$

An asymptotic linear stability result may be obtained in some circumstances in the case of constant boundary conditions, using a different functional: In the equations (37) write

$$u = \lambda \bar{u}, \qquad v = \bar{v} \tag{52}$$

where λ is a constant to be chosen later. On writing

$$\|\phi\|^2 = \int \phi^2 dV \quad , (\phi, \psi) = \int \phi\psi \, dV,$$

one readily verifies that

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2\right] = -k(\bar{T})\,\|\nabla\bar{u}\|^2 - \ell(\bar{S})\,\|\nabla\bar{v}\|^2 - \left[\lambda^{-1}m(\bar{S}) + \lambda n(\bar{T})\right]\nabla\bar{u}\cdot\nabla\bar{v}$$

Assuming $mn < 0$, write

$$\lambda = \sqrt{-m(\bar{S})\left\{n(\bar{T})\right\}^{-1}} \tag{53}$$

and using the Poincaré inequality, one finds

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2\right] \leq -\lambda_1 M\left[\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2\right], \tag{54}$$

where

$$0 < M = \min\left[k(\bar{T}), \ell(\bar{S})\right]. \tag{55}$$

Writing

$$N(t) = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2, \tag{56}$$

one obtains on integration of (54)

$$N(t) \leq N(0)\exp(-2\lambda_1 Mt), \tag{57}$$

where M is defined by (55). We embody this result in the following Theorem:

Theorem 3. *The constant steady solution, corresponding to constant boundary conditions ($U = \bar{T}, V = \bar{S}$) is linearly asymptotically exponentially stable provided*

$$k(\bar{T}) > 0, \quad \ell(\bar{S}) > 0, \quad m(\bar{T})n(\bar{S}) < 0,$$

in the sense that (57) *holds.*

5 Nonlinear stability

In this section we obtain a nonlinear stability result based on a functional which is an analogue of the Liapunov functional of the second kind used previously [e.g. [1], [2]] in the context of a single nonlinear diffusion equation, inter alia. The section concludes with a (much more limited) nonlinear stability result based on a functional which is an analogue of the Liapunov functional of the first kind used in the aforementioned context.

We consider the non-linear perturbation equations (8) : consider the functional (which is obviously non-negative):

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_V \left[\{\nabla(K(u,U) + M(v,V))\}^2 + \{\nabla(N(u,U) + L(v,V))\}^2\right] dV, \tag{58}$$

where

$$K(u,U) = \int_0^u k(\tau + U)d\tau, \quad M(v,V) = \int_0^v m(\xi + V)d\xi, \tag{59}$$

$$N(u,U) = \int_0^u n(\tau + U)d\tau, \quad L(v,V) = \int_0^v \ell(\xi + V)d\xi.$$

The issue of positive definiteness in u, v of the functional (58) requires one to examine when $u = v = 0$. Propositions 1, 2 are applicable *mutatis mutandis*. Thus if the conditions on k, l, m, n specified in Proposition 1 or in Proposition 2 hold (together with the generalization of Proposition 2, mentioned in Remark 1), then the functional given by (58) is positive -definite in u, v, i.e. in common terminology, the functional is a Liapunov functional.

Differentiating (58) with respect to t, we obtain (for $t > 0$

$$\frac{dE}{dt} = \int [\nabla(K+M)\cdot\nabla(K_t+M_t) + \nabla(N+L)\cdot(N_t+L_t)]\,dV$$

$$= -\int [\nabla^2(K+M)\cdot\{k(u+U)u_t + m(v+V)v_t\}]dV + \tag{60}$$

$$+\int [\nabla^2(N+L)\{n(u+U)u_t + \ell(v+V)v_t\}]dV,$$

on integrating by parts and using the boundary conditions. Applying (8_1) to (60) we obtain

$$\frac{dE}{dt} = -\int \left[\begin{array}{l} k(u+U)\left\{\nabla^2(K+M)\right\}^2 + \ell(v+V)\left\{\nabla^2(N+L)\right\}^2 \\ +\{m(v+V)+n(u+U)\}\,\nabla^2(K+M)\,\nabla^2(N+L) \end{array} \right] dV. \tag{61}$$

One may easily verify that the integrand in (61) is non-negative provided that the conditions on k, l, m, n, specified in Proposition 2 hold (i.e. $dE/dt \leq 0$). We thus have a nonlinear analogue of Theorem 1:

Theorem 4. *The steady state (specified by* (4),(6)) *is nonlinearly stable in the measure* (58) *provided that the conditions on k, l, m, n specified in Proposition 2 hold, in the sense that $E(t)$ is a non-increasing function of t.*

Remark 6. *Theorem 4 can be generalized reflecting inter alia the generalization of Proposition 2 contained in Remark 1: If the restrictions on the diffusivities*

$$k(U+u) \geq k_0(\mathbf{x}), ||m(V+v)| \leq m_0(\mathbf{x})|$$

etc. hold for

$$|\mu| \leq \mu_0(\mathbf{x}),\ |v| \leq \nu_0(\mathbf{x})$$

μ_0, ν_0 being non-negative quantities (together with

$$4k_0\ell_0 \geq (m_0+n_0)^2),$$

then the steady state U, V is nonlinearly stable (as in Theorem 4) provided that the perturbations (u, v) are always confined to the stated range.

Suppose now that, for all values of the relevant arguments,

$$k(\cdot) \geq k_1, \ell(\cdot) \geq \ell_1, |m(\cdot)+n(\cdot)| \leq 2c_1, \tag{62}$$

where k_1, l_1 are positive constants and c_1 is a non-negative constant. Use the arithmetic-geometric inequality to obtain

$$2\,\nabla^2(K+M)\,\nabla^2(N+L) \leq \alpha\left\{\nabla^2(K+M)\right\}^2 + \alpha^{-1}\left\{\nabla^2(N+L)\right\}^2, \tag{63}$$

where α is a positive number, yet to be chosen. Applying (62),(63) to (61) we obtain

$$\frac{dE}{dt} \leq -\int \left[(k_1 - c_1\alpha)\left\{\nabla^2(L+M)\right\}^2 + (\ell_1 - c_1\alpha^{-1})\left\{\nabla^2(N+L)\right\}^2\right] dV. \tag{64}$$

Now choose α to ensure that the right hand side is non-positive:

$$k_1 - c_1\alpha \geq 0 \ , \ell_1 - c_1\alpha^{-1} \geq 0$$

or (assuming $c_1 \neq 0$)

$$k_1/c_1 \geq \alpha \geq c_1/\ell_1. \tag{65}$$

For consistency, one needs

$$k_1\ell_1 \geq c_1^2. \tag{66}$$

Assuming $c_1 \neq 0$,the best way of choosing α appears to be to put

$$k_1 - c_1\alpha = \ell_1 - c_1\alpha^{-1}. \tag{67}$$

Solving the resulting quadratic in α, and noting that α is positive, we obtain (assuming $c_1 \neq 0$)

$$\alpha = (2c_1)^{-1}\left[k_1 - \ell_1 + \sqrt{(k_1-\ell_1)^2 + 4c_1^2}\right]. \tag{68}$$

Defining

$$p = \frac{1}{2}\left[(k_1+\ell_1) - \sqrt{(k_1-\ell_1)^2 + 4c_1^2}\right] \qquad for \ \ c_1 \neq 0,$$

and

$$p = \min\{k_1, \ell_1\} \qquad for \ \ c_1 = 0, \tag{69}$$

we obtain from (66), (67)-(69)

$$\frac{dE}{dt} \leq -p\int \left[\left\{\nabla^2(K+M)\right\}^2 + \left\{\nabla^2(N+L)\right\}^2\right] dV \tag{70}$$

Using a version of the Poincare inequality (see Appendix), noting that $K = M = N = L = 0$ on the boundary, we obtain

$$\frac{dE}{dt} + 2p\lambda_1 E \leq 0 \tag{71}$$

where λ_1 is the lowest "fixed membrane" eigenvalue for the region. Integrating gives

$$E(t) \leq E(0) \exp(-2p\lambda_1 t). \tag{72}$$

On noting (50), the foregoing inequality is seen to be optimal when

$$k \equiv k_1, \quad \ell \equiv \ell_1$$

and *either*

$$m = n = c_1 \qquad or \qquad m = n = -c_1, \tag{73}$$

and when the initial value of the perturbation coincides with the eigenfunction corresponding to the lowest eigenvalue arising in the eigenvalue problem generated by the solution form (50).

We summarize the foregoing results as follows:

Theorem 5. *In the context of the perturbations u, v (specified by (7),(8)), about a steady state U, V, defined by(4),(6), the functional defined thereon (58) decays in accordance with (72), where (i) p is defined by (69),(ii)λ_1 is the lowest (positive) "fixed membrane" eigenvalue of the region, provided (62),(66) hold. Moreover, the inequality (72) is optimal in the circumstances indicated in the last sentence (containing (73)).*

Corollary. *The steady state U, V is nonlinearly, exponentially asymptotically stable with respect to the Liapunov functional (58) (in the sense that (72) holds), provided that $k(\cdot), \ell(\cdot), m(\cdot), n(\cdot)$ satisfy the conditions*

$$k \geq k_1, \ell \geq \ell_1$$

where k_1, ℓ_1 are positive constants, and where either
(a) $m(\cdot)$ is uniformly non-negative and $n(\cdot)$ is uniformly non-positive or vice versa, and $|m + n| \leq 2c_1$ where c_1 is a non-negative constant, together with (66),
or
(b) $|m| \leq m_1, |n| \leq n_1$,where m_1, n_1 are non-negative constants and

$$m_1 + n_1 \leq 2c_1,$$

together with (66).

[The cases (a), (b) are related to Propositions 1,2 respectively and ensure inter alia that the functional (58) is positive-definite in u, v : in common terminology it is a Liapunov functional].

Remark 7. *Theorem 5 says essentially that (under the conditions stated) a*

perturbed state of a given steady state evolves "rapidly" to this,or possibly, to some other steady state (if such exists). On the other hand, conditions are given in the Corollary that imply positive-definiteness in u, v of the functional $E(t)$, and nonlinear exponential asymptotic stability of the (unique) steady state, i.e. a perturbed state returns "rapidly" to the (only) steady state.

Remark 8. *Both Theorem 5 and its Corollary (relating to asymptotic stability) admit generalizations along the lines of the ones contained in Remarks 1 and 6:*

(a) if the inequalities (62) hold for the range of perturbations

$$|u| \leq \mu_0(\mathbf{x}), |v| \leq \nu_0(\mathbf{x})$$

then Theorem 5 continues to hold provided the perturbations are always confined to the stated range.

(b) If the inequalities posited for the diffusivities in the Corollary hold for the above mentioned perturbation range, then one continues to have exponential asymptotic stability provided that the perturbations are always confined to the stated range.

In the previous work on single, nonlinear diffusion equations [[1],[2]], another Liapunov functional was used which does not involve derivatives. Such a functional was referred to in [1] as one of the first type. It does not appear to be possible to obtain a functional with a similarly broad scope in the current context. However, it is possible to make some progress, and this is now described.

We confine attention to the case where m, n are *equal constants.* As in previous work [e.g. [1]], we define

$$\begin{cases} \Phi(u,U) = \int_0^u d\bar{u} \int_0^{\bar{u}} k(\tau + U) d\tau, \\ \\ \Psi(v,V) = \int_0^v d\bar{v} \int_0^{\bar{v}} \ell(\xi + V) d\xi. \end{cases} \tag{74}$$

If we assume that there exist positive constants k_0, ℓ_0 such that

$$k(\cdot) \geq k_0, \quad \ell(\cdot) \geq \ell_0 \tag{75}$$

one has

$$\Phi \geq \frac{1}{2} k_0 u^2, \quad \Psi \geq \frac{1}{2} \ell_0 v^2, \tag{76}$$

and that Φ, Ψ are positive-definite in u, v respectively.

We now define the (Liapunov) functional

$$F(t) = \int_v [\Phi + \Psi + muv] \, dV. \tag{77}$$

In view of (76), it follows that the integrand in (77) is positive-definite in u, v provided that

$$k_0 \ell_0 > m^2. \tag{78}$$

This is assumed henceforward, making $F(t)$ a suitable global measure of the perturbations in the case at hand.

Differentiating (77) with respect to t,

$$F^{\bullet}(t) = \int_V [(\Phi_u + mv)u_t + (\Psi_v + mu)v_t]\, dV \tag{79}$$

and using the p.d.e^s in the case at hand (8_1) in appropriate form

$$\begin{aligned} u_t &= \nabla^2 [\Phi_u + mv], \\ v_t &= \nabla^2 [\Psi_v + mu], \end{aligned} \tag{80}$$

together with integration by parts and the boundary conditions, we obtain

$$F^{\bullet}(t) = -\int_V [\{\nabla(\Phi_u + mv)\}^2 + \{\nabla(\Psi_v + mu)\}^2]\, dV, \tag{81}$$

whence $dF/dt \geq 0$, leading to

Theorem 6. *If the cross-diffusion coefficients m, n have the same constant value m, if $k(\cdot) \geq k_0$, $\ell(\cdot) \geq \ell_0$ where k_o, ℓ_0 are both positive constants, and if*

$$k_0 \ell_0 > m^2,$$

then the steady state (U, V) is (nonlinearly) stable with respect to the Liapunov functional (77) in the sense that $F(t)$ is a non-increasing function of t.

Remark 9. *It does not appear to be possible to obtain an enhanced differential inequality of the type*

$$dF(t)/dt + cF(t) \leq 0,$$

where c is a positive constant, as in the case of a single, nonlinear diffusion equation [1].

Appendix

The "normal mode solutions" of (37) subject to zero boundary conditions are such that

$$(u, v) = (u(x), v(x))e^{\lambda t}, \tag{82}$$

where λ is a constant, and where attention is confined, in the present context, to a one-dimensional rectilineal region $0 \leq x \leq 1$, and where

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}\left[k(U)u + m(V)v\right] = \lambda u, \\ \\ \dfrac{d^2}{dx^2}\left[n(U)u + \ell(V)u\right] = \lambda v, \end{cases} \tag{83}$$

subject to

$$u = v = 0 \qquad on \quad x = 0, 1. \tag{84}$$

We confine attention to diffusivities given by (18) - where one has two steady states given by (22).

One may obtain Galerkin approximations to the eigenvalues of (83),(84) by writing

$$u = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin(i\pi x), v = \sum_{i=1}^{n} B_i \sin(i\pi x),$$

where A_i, B_i are constants, corresponding to the nth order approximation. One multiplies each of the equations (83_1),(83_2) by $\sin(j\pi x)$ and integrates between $x = 0, x = 1$, and thereby obtains a $2n \times 2n$ determinantal equation determining the nth approximation to the eigenvalues, together with the associated amplitude terms $A., B.$.

Linear stability is characterized by uniformly negative eigenvalues, or eigenvalues with uniformly negative real parts; on the other hand, linear instability is characterized by at (least) one positive eigenvalue, or (at least) one eigenvalue with positive real part.

The steady state (19_1) gives rise to the following approximate eigenvalues (all eigenvalues recorded exclude a multiplicative factor $2\pi^2$):

1st approximation :

$$-2.57, -.250;$$

2nd approximation:

$$-10.36, -2.52, -1.16, -.249;$$

3rd approximation:

$$-23.42, -10.18, -2.83, -2.38, -1.16, -.229,$$

all associated with linear stability.

On the other hand, the steady state (19_2) gives rise to the following approximate eigenvalues:

1st approximation :

$$-2.44, .263;$$

2nd approximation:

$$-9.76, -2.43, .263, 1.21;$$

3rd approximation:

$$-22.01, -9.67, -2.43, .240, 1.21, 2.84,$$

these being associated with linear instability because of the presence of at least one positive eigenvalue.

All the values given above have been rounded off to three significant figures.

A version of the Poincaré Inequality

Suppose ϕ is an arbitrary, smooth function of $\mathbf{x}$ in $V \cup \partial V$ such that $\phi = 0$ on ∂V, then

$$\int (\nabla^2 \phi)^2 dV \geq \lambda_1 \int (\nabla \phi)^2 dV$$

where λ_1 is the lowest "fixed membrane" eigenvalue [of the eigenvalue problem

$$\nabla^2 \psi + \lambda \psi = 0 \quad in \;\; V, \quad \psi = 0 \quad on \;\; \partial V].$$

For a proof, based on the standard Poincaré inequality, see [1], for example.

Acknowledgements

The authors gratefully acknowledge the work of Dr. P. O'Leary (N.U.I. Galway) in computing the approximations to eigenvalues given in the Appendix. This work has been performed under the auspicies of the G.N.F.M. of I.N.D.A.M. and M.I.U.R. (P.R.I.N. 2005):"Nonlinear Propagation and Stability in Thermodynamical Processes of Continuous Media". The author J.N.F. wishes to thank G.N.F.M. of I.N.D.A.M. for a visiting Professorship held in Italy in September 2004. The author S.R. gratefully acknowledges the warm hospitality extended to him in 2004 by the National University of Ireland, Galway.

References

[1] J.N. Flavin and S. Rionero, Asymptotic and other properties for a nonlinear diffusion model. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 229 (1998), 119-140.

[2] J.N. Flavin and S. Rionero, Some Liapunov functionals for nonlinear diffusion and nonlinear stability. *Proceedings "WASCOM 99" 10th Conference on Waves and Stability in Continuous Media,* World Scientific, Singapore etc. 2001.

[3] J.N. Flavin and S. Rionero, The Bénard problem for nonlinear heat conduction: unconditional nonlinear stability, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathemaics* 52 (1999), 441-452.

[4] J.N. Flavin and S. Rionero, Nonlinear stability for a thermofluid in a vertical porous medium. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 11 (1999), 173-179.

[5] J.N. Flavin, S. Rionero, *Qualitative Estimates for Partial Differential Equations: An Introduction.* CRC Press, Boca Raton, Florida, 1995.

[6] B. Straughan, *The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection.* Springer, New York, Second edition, 2004.

[7] K.Ames and B. Straughan, *Nonstandard and Improperly Posed Problems,* Academic Press, 1997.

[8] B. Straughan, *Explosive Instabilities in Mechanics,* Springer, 1998.

[9] A. Okubo and S.A. Levin, *Diffusion and Ecological Problems, Modern Perspectives,* Second Edition, Springer, 2001.

[10] O.A. Ladyzhenskaya and N.S. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations,* Academic Press, N.Y., 1968.

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXXIII, (2006) pp. 85-97

Nonlinear stability for reaction-diffusion Lotka-Volterra model with Beddington-DeAngelis functional response

Nota di F. Capone[1], M. Piedisacco[1], S. Rionero [1]

Presentata dal Socio Prof. S. Rionero
(Adunanza del 5 maggio 2006)

Abstract - The coexistence problem for Lotka-Volterra predator-prey model with Beddington-DeAngelis functional response and Robin type boundary conditions, is taken into account. By using the Rionero-Liapunov functional, conditions guaranteeing the nonlinear L^2-stability of the biologically meaningful equilibrium state are furnished [11]-[17].

Riassunto - Si considera il problema della coesistenza di due specie interagenti (preda-predatore) con funzionale di risposta Beddington-DeAngelis nel modello Lotka - Volterra con condizioni al contorno di tipo Robin. L'uso del funzionale di Liapunov introdotto da Rionero per i sistemi binari di tipo reazione-diffusione, consente la determinazione di condizioni di stabilità non lineare della soluzione, biologicamente significativa, di equilibrio [11]-[17].

0.1 Introduction

Denoting by U and V the prey and predator densities respectively, the Lotka-Volterra predator-prey model equations with Beddington-DeAngelis functional

[1]Università di Napoli Federico II. Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli". Complesso Universitario Monte S. Angelo. Via Cinzia, 80126 Napoli - ITALIA. E-mail: fcapone@unina.it, piedisacco@libero.it, rionero@unina.it

response $F(U,V)$ are:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} = d_1 \Delta U + U(1-U) - aF(U,V) & (\mathbf{x},t) \in \Omega \times I\!R^+ \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} = d_2 \Delta V - dV + eF(U,V) & (\mathbf{x},t) \in \Omega \times I\!R^+ \end{cases} \tag{1}$$

with

$$F(U,V) = \frac{UV}{1+bU+cV}\,, \tag{2}$$

$\Omega \subset I\!R^3$ bounded smooth domain and a, b, c, d, d_1, d_2 positive constants.

The dynamics of (1)-(2), under the boundary conditions ($\beta_i = \text{const.}$, $i = 1,2$)

$$\begin{cases} \beta_1 U + (1-\beta_1)\dfrac{dU}{d\mathbf{n}} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times I\!R^+ \\ \beta_2 V + (1-\beta_2)\dfrac{dV}{d\mathbf{n}} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times I\!R^+ \end{cases} \tag{3}$$

$\mathbf{n}$ being the outward normal to $\partial\Omega$ and $\beta_1, \beta_2 \in [0,1]$, has been deeply studied recently in [1] (Cfr. also [2]). The analysis is mostly based on the well known Liapunov functional [7]

$$\Xi(t) = \int_\Omega W(U(\mathbf{x},t),\, V(\mathbf{x},t))d\mathbf{x} \tag{4}$$

with

$$\begin{cases} W = W_1(U) + [a(1+bU^*)/e(1+cV^*)]W_2(V) \\ W_1 = U - U^* - U^*\ln(U/U^*) \\ W_2 = V - V^* - V^*\ln(V/V^*)\,. \end{cases} \tag{5}$$

$S = (U^*, V^*)$ being the (positive) equilibrium state existing for

$$e > (b+1)d \tag{6}$$

and given by

$$\begin{cases} U^* = \dfrac{-[a(e-bd)-ce] + \sqrt{[a(e-bd)-ce]^2 + 4acde}}{2ce} < 1 \\ V^* = -\dfrac{1}{c} + \dfrac{e-bd}{cd}U^* > 0\,. \end{cases} \tag{7}$$

In particular in [1] the stability of S has been studied in the case in which both the species cannot live Ω, i.e.:

$$\frac{dU}{d\mathbf{n}} = \frac{dV}{d\mathbf{n}} = 0\,, \qquad \text{on } \partial\Omega \times I\!R^+\,. \tag{8}$$

In the present paper we reconsider the stability of S, but under more general boundary conditions. In fact we consider the case in which each specie cannot live Ω only through a part of $\partial\Omega$. Precisely we consider the mixed boundary conditions (Robin type conditions)

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{d\mathbf{n}} = 0 \ \ on \ \ \Sigma_1 \times I\!R^+\,, \qquad U = U^* \ \ on \ \ \Sigma_1^* \times I\!R^+ \\ \dfrac{dV}{d\mathbf{n}} = 0 \ \ on \ \ \Sigma_2 \times I\!R^+\,, \qquad V = V^* \ \ on \ \ \Sigma_2^* \times I\!R^+\,, \end{cases} \tag{9}$$

with $\partial\Omega = \Sigma_i \cup \Sigma_i^*$, $\Sigma_i \cap \Sigma_i^* = \emptyset$, and $\Sigma_i^* \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$.

Our analysis is based on the Lyapunov functional recently introduced by Rionero [9–16] for the binary reaction-diffusion systems and a tricky choice of scalings [11]-[17]. Denoting by $(\bar{u}, \bar{v})$ the (suitable scaled) perturbation to S, the Rionero-Liapunov functional is given by (27) with A^*, I^*, b_i^*, b_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ defined by (16) and (20), (25).

The plan of the paper is as follows. Section 2 is devoted to preliminaries. In particular some functional spaces concerning the perturbations are introduced and a Poincaré type inequality is put in evidence. In Section 3 nonlinear stability conditions and diffusivities stabilizing effects are obtained. The paper ends with an appendix in which an estimate of the constant appearing in the Poincaré type inequality mentioned in Section 2, is furnished.

0.2 Preliminaries

Let (u, v) denote the perturbation to S. It easily follows that

$$\begin{cases} u_t = \left(1 + \dfrac{ah_1}{b} - 2U^*\right) u + \dfrac{ah_2}{c} v - u^2 + d_1 \Delta u - aH(u, v) \\ v_t = -\dfrac{eh_1}{b} u + \left(-\dfrac{eh_2}{c} - d\right) v + d_2 \Delta v + eH(u, v) \end{cases} \tag{10}$$

under the boundary conditions

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\mathbf{n}} = 0 \ \ on \ \ \Sigma_1 \times I\!R^+ \qquad u = 0 \ \ on \ \ \Sigma_1^* \times I\!R^+ \\ \dfrac{dv}{d\mathbf{n}} = 0 \ \ on \ \ \Sigma_2 \times I\!R^+ \qquad v = 0 \ \ on \ \ \Sigma_2^* \times I\!R^+ , \end{cases} \tag{11}$$

with

$$\begin{cases} H(u,v) = \dfrac{h_1 u^2 + h_2 v^2 + h_3 uv}{\phi^* + bu + cv} \\ h_1 = -\dfrac{bV^*(1+cV^*)}{\phi^{*2}}, \quad h_2 = -\dfrac{cU^*(1+bU^*)}{\phi^{*2}} \\ h_3 = \dfrac{\phi^* + 2bcU^*V^*}{\phi^{*2}}, \quad \phi^* = 1 + bU^* + cV^* . \end{cases} \tag{12}$$

Denoting by $H_i(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega)$ $(i = 1, 2)$ the functional spaces defined by

$$H_i(\Omega) = \left\{ \varphi : \varphi^2 + |\nabla \varphi|^2 \in L(\Omega), \frac{d\varphi}{d\mathbf{n}} = 0 \text{ on } \Sigma_i \times I\!R^+, \varphi = 0 \text{ on } \Sigma_i^* \times I\!R^+ \right\} \tag{13}$$

we study the stability of S with respect to the perturbations $(u, v) \in H_1(\Omega) \times H_2(\Omega)$, biologically meaningful, i.e. such that

$$\begin{cases} U = U^* + u > 0 \\ V = V^* + v > 0 . \end{cases} \tag{14}$$

It is easily verified that system (10) can be written

$$\begin{cases} u_t = b_1 u + b_2 v + d_1 \Delta u + f(u,v) \\ v_t = b_3 u + b_4 v + d_2 \Delta v + g(u,v) \end{cases} \tag{15}$$

with

$$\begin{cases} b_1 = 1 - 2U^* - \dfrac{aV^*(1+cV^*)}{\phi^{*2}} \\ b_2 = -\dfrac{aU^*(1+bU^*)}{\phi^{*2}} (< 0) \\ b_3 = \dfrac{eV^*(1+cV^*)}{\phi^{*2}} (> 0) \\ b_4 = -d + \dfrac{eU^*(1+bU^*)}{\phi^{*2}} = -\dfrac{cdV^*}{\phi^*} (< 0) \\ f(u,v) = -u^2 - aH(u,v)\,, \quad g(u,v) = eH(u,v)\,. \end{cases} \tag{16}$$

Remark 1 - *We observe that*

i) the positive quadrant $U \geq 0$, $V \geq 0$ *is invariant* {*Cfr.* [1] – [2] *and* [19]};

ii) the global existence of (u, v) *with* $(u_0, v_0) \in H_1(\Omega) \times H_2(\Omega)$ *can be proved as in* [1] – [2];

iii) the infimum

$$\bar{\alpha}_i(\Omega) = \inf_{H_i(\Omega)} \frac{\|\nabla\varphi\|^2}{\|\varphi\|^2}\,, \tag{17}$$

exists and is a real positive number {*Cfr.* [2] *and* [19]};

iv) denoting by Ω^* *a smooth domain such that* $\Omega \subset \Omega^*/\partial\Omega^*$, *it turns out that* $\bar{\alpha}_1(\Omega) \geq \bar{k}$, $\bar{k}$ *being the lowest eigenvalue of*

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0\,, \qquad \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega^*)\,.$$

In particular for $\Omega^* = \left[\delta_1^{(1)}, \delta_1^{(2)}\right] \times \left[\delta_2^{(1)}, \delta_2^{(2)}\right] \times \left[\delta_3^{(1)}, \delta_3^{(2)}\right]$, *it turns out that* {*Cfr. Appendix*}

$$\bar{\alpha}_i(\Omega) \geq \bar{k} = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{\left[\delta_j^{(2)} - \delta_j^{(1)}\right]^2}\,. \tag{18}$$

0.3 Nonlinear stability

Following the methodology introduced in [9]-[16], we observe that (15) can be written

$$\begin{cases} u_t = b_1^* u + b_2 v + f^*(u) + f(u,v) \\ \\ v_t = b_3 u + b_4^* v + g^*(v) + g(u,v) \end{cases} \tag{19}$$

with

$$\begin{cases} 0 < \varepsilon = \text{const.} < 1\,, & \bar{\alpha} = \min\{\bar{\alpha}_1,\, \bar{\alpha}_2\} (> 0) \\ \\ b_i^* = b_i - \varepsilon d_i \bar{\alpha}\,, & i = 1,4 \\ \\ f^*(u) = d_1(\Delta u + \varepsilon\bar{\alpha} u)\,, & g^*(v) = d_2(\Delta v + \varepsilon\bar{\alpha} v)\,. \end{cases} \tag{20}$$

Denoting by $\gamma_i\,(i = 1,2)$ two positive scalings to be chosen suitably later and setting

$$u = \gamma_1 \bar{u}\,, \quad v = \gamma_2 \bar{v}\,, \quad \mu = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \tag{21}$$

in view of (19), it turns out that

$$\begin{cases} \bar{u}_t = b_1^* \bar{u} + \dfrac{1}{\mu} b_2 \bar{v} + f^*(\bar{u}) + \bar{f}(\bar{u},\bar{v}) \\ \\ \bar{v}_t = \mu b_3 \bar{u} + b_4^* \bar{v} + g^*(\bar{v}) + \bar{g}(\bar{u},\bar{v}) \end{cases} \tag{22}$$

with

$$\begin{cases} \bar{f}(\bar{u},\,\bar{v}) = \dfrac{1}{\gamma_1}\, f(u,v)\Big|_{\substack{u = \gamma_1\bar{u} \\ v = \gamma_2\bar{v}}} \\ \\ \bar{g}(\bar{u},\,\bar{v}) = \dfrac{1}{\gamma_2}\, g(u,v)\Big|_{\substack{u = \gamma_1\bar{u} \\ v = \gamma_2\bar{v}}} \end{cases} . \tag{23}$$

Our aim is to show that the nonlinear stability of S in the $L^2(\Omega)$-norm can be reduced to the stability of the zero solution of

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = b_1^* \xi + \dfrac{1}{\mu} b_2 \eta \\ \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \mu b_3 \xi + b_4^* \eta \end{cases} \tag{24}$$

i.e. to

$$\begin{cases} I^* = b_1^* + b_4^* = \lambda_1 + \lambda_2 (< 0) \\ A^* = b_1^* b_4^* - b_2 b_3 = \lambda_1 \lambda_2 (> 0) \end{cases} \tag{25}$$

λ_i $(i = 1, 2)$ being the eigenvalues of $\begin{pmatrix} b_1^* & b_2 \\ b_3 & b_4^* \end{pmatrix}$.

Theorem 1 - *Let*

$$b_1 < d_1 \bar{\alpha} \,. \tag{26}$$

Then $S = (U^*, V^*)$ is nonlinearly asymptotically exponentially stable with respect to the $L^2(\Omega)$-norm.

Proof. Let $\varepsilon > 0$ be such that $b_1 < \varepsilon d_1 \bar{\alpha}$. Then (25) hold. Denoting by $\| \cdot \|$ and $< \cdot, \cdot >$ respectively the norm and the scalar product in $L^2(\Omega)$, let us introduce the Rionero-Liapunov functional [9]-[16]

$$E = \frac{1}{2} \left[A^* (\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2) + \|b_1^* \bar{v} - \mu b_3 \bar{u}\|^2 + \|\frac{b_2}{\mu} \bar{v} - b_4^* \bar{u}\|^2 \right] \tag{27}$$

which time derivative along the solution of (22) is given by

$$\frac{dE}{dt} = A^* I^* (\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2) + \Psi + \Psi^* \tag{28}$$

with

$$\begin{cases} \Psi = < \alpha_1 \bar{u} - \alpha_3 \bar{v}, \, \bar{f} > + < \alpha_2 \bar{v} - \alpha_3 \bar{u}, \, \bar{g} > \\ \Psi^* = < \alpha_1 \bar{u} - \alpha_3 \bar{v}, \, f^* > + < \alpha_2 \bar{v} - \alpha_3 \bar{u}, \, g^* > \\ \alpha_1 = A^* + \mu^2 b_3^2 + (b_4^*)^2, \quad \alpha_2 = A^* + (b_1^*)^2 + \dfrac{1}{\mu^2} b_2^2, \\ \alpha_3 = \mu b_1^* b_3 + \dfrac{1}{\mu} b_2 b_4^* \,. \end{cases} \tag{29}$$

By virtue of (16), (20) and (26) it turns out that

$$\begin{cases} b_1^* b_3 < 0 \\ b_2 b_4^* > 0 \,, \end{cases} \tag{30}$$

hence choosing

$$\mu = \bar{\mu} = \sqrt{\left| \frac{b_2 b_4^*}{b_1^* b_3} \right|} \tag{31}$$

it follows that

$$\alpha_3 = 0\,. \tag{32}$$

In view of

$$\begin{cases} < \bar{u}, f^* >= d_1[-\|\nabla\bar{u}\|^2 + \varepsilon\bar{\alpha}\|\bar{u}\|^2] < -d_1(1-\varepsilon)\|\nabla\bar{u}\|^2 \\ < \bar{v}, g^* >= d_2[-\|\nabla\bar{v}\|^2 + \varepsilon\bar{\alpha}\|\bar{v}\|^2] < -d_2(1-\varepsilon)\|\nabla\bar{v}\|^2 \end{cases} \tag{33}$$

one obtains

$$\frac{dE}{dt} \leq A^* I^*(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2) - (1-\varepsilon)[d_1\|\nabla\bar{u}\|^2 + d_2\|\nabla\bar{v}\|^2] + \Psi \tag{34}$$

with

$$\Psi = \alpha_1 < \bar{u},\, \bar{f} > + \alpha_2 < \bar{v},\, \bar{g} > \,. \tag{35}$$

In view of (21) and (31) it follows that

$$\begin{cases} \gamma_1 = \bar{\mu}\,\gamma_2 \\ |\bar{f}(\bar{u},\,\bar{v})| \leq \gamma_2\,(c_1\bar{u}^2 + c_2\bar{v}^2 + c_3|\bar{u}\,\bar{v}|) \\ |\bar{g}(\bar{u},\,\bar{v})| \leq \gamma_2\,(c_4\bar{u}^2 + c_5\bar{v}^2 + c_6|\bar{u}\,\bar{v}|) \end{cases} \tag{36}$$

with c_i $(i = 1, ..., 6)$ positive constants depending only on $\bar{\mu}$. In fact (14) imply

$$\phi^* + b\gamma_1\bar{u} + c\gamma_2\bar{v} > 1 \tag{37}$$

and hence

$$\begin{aligned} |\bar{f}(\bar{u},\,\bar{v})| &= \left|-\gamma_1\bar{u}^2 - a\frac{h_1\gamma_1\bar{u}^2 + h_2\gamma_2^2/\gamma_1\bar{v}^2 + h_3\gamma_2\bar{u}\bar{v}}{\phi^* + b\gamma_1\bar{u} + c\gamma_2\bar{v}}\right| = \\ &= \left|-\bar{\mu}\gamma_2\bar{u}^2 - a\frac{h_1\bar{\mu}\gamma_2\bar{u}^2 + h_2\gamma_2/\bar{\mu}\bar{v}^2 + h_3\gamma_2\bar{u}\bar{v}}{\phi^* + b\gamma_1\bar{u} + c\gamma_2\bar{v}}\right| \leq \\ &\leq \gamma_2[c_1\bar{u}^2 + c_2\bar{v}^2 + c_3|\bar{u}\,\bar{v}|] \end{aligned} \tag{38}$$

with

$$c_1 = \bar{\mu}(1 + a|h_1|), \quad c_2 = a|h_2|/\bar{\mu}, \quad c_3 = a|h_3|\,. \tag{39}$$

Analogously, it is can easily proved that $(36)_2$ holds true, with

$$c_4 = e|h_1|\bar{\mu}^2, \quad c_5 = e|h_2|, \quad c_6 = e|h_3|/\bar{\mu}\,. \tag{40}$$

Then, by virtue of (35)-(40), it follows that

$$|\Psi| \leq \gamma_2[\eta_1 < |\bar{u}|^3 > + \eta_2 < |\bar{v}|^3 > + \eta_3 < |\bar{u}|\,|\bar{v}|^2 > + \eta_4 < |\bar{u}|^2\,|\bar{v}| >] \tag{41}$$

with η_i $(i = 1, .., 4)$ positive constants given by

$$\begin{cases} \eta_1 = |\alpha_1| c_1\,, \quad \eta_2 = |\alpha_2| c_5 \\ \eta_3 = |\alpha_1| c_2 + |\alpha_2| c_6 \\ \eta_4 = |\alpha_1| c_3 + |\alpha_2| c_4 \end{cases} \tag{42}$$

and the Hölder inequality implies

$$|\Psi| \leq \gamma_2(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2)^{1/2}[(\eta_1 + \eta_4)\|\bar{u}\|_4^2 + (\eta_2 + \eta_3)\|\bar{v}\|_4^2]\,. \tag{43}$$

From (47), in view of the embedding inequality [18]:

$$\|f\|_4^2 \leq k(\Omega)\|\nabla f\|_2^2\,, \qquad k(\Omega) = \text{positive constant} \tag{44}$$

it turns out that

$$|\Psi| \leq \gamma_2\, k\, M\, (\|\nabla\bar{u}\|^2 + \|\nabla\bar{v}\|^2)(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2)^{1/2}\,, \tag{45}$$

with

$$M = \max\{\eta_1 + \eta_4,\, \eta_2 + \eta_3\} > 0\,. \tag{46}$$

By virtue of $A^* > 0$, it easily follows that E is positive definite and that exist two positive constants k_i $(i = 1, 2)$ such that

$$k_1(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2) \leq E \leq k_2(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2)\,. \tag{47}$$

Therefore

$$(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2)^{1/2} \leq \frac{E^{1/2}}{k_1^{1/2}} \tag{48}$$

and (34), (45) imply

$$\frac{dE}{dt} \leq -k_3 E - (k_4 - \gamma_2 k_5 E^{1/2})(\|\nabla\bar{u}\|^2 + \|\nabla\bar{v}\|^2) \tag{49}$$

with

$$\begin{cases} k_3 = \dfrac{A^*|I^*|}{k_1}\,, \quad k_4 = (1-\varepsilon)\inf(d_1,\, d_2) \\ k_5 = \dfrac{kM}{k_1^{1/2}}\,. \end{cases} \tag{50}$$

By recursive argument

$$0 < \gamma_2 < \frac{k_4}{k_5 E_0^{1/2}} \tag{51}$$

implies

$$\frac{dE}{dt} \leq -k_3 E \qquad \forall t \geq 0 \tag{52}$$

i.e.

$$E(t) \leq E_0 \, e^{-k_3 t} \, . \tag{53}$$

Theorem 2 - *Let*

$$bU^*(1-U^*) < U^* + d_1 \phi^* \bar{\alpha} \, . \tag{54}$$

Then $S = (U^*, V^*)$ *is asymptotically nonlinearly stable according to* (53).

Proof. S is a steady state, hence

$$\begin{cases} U^*(1-U^*) - a\dfrac{U^*V^*}{\phi^*} = 0 \\ \\ \phi^* = 1 + bU^* + cV^* \end{cases} \tag{55}$$

i.e.

$$\begin{cases} \dfrac{aV^*}{\phi^*} = 1 - U^* \\ \\ 1 + cV^* = \phi^* - bU^* \, . \end{cases} \tag{56}$$

By virtue of (56), it turns out that

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 - 2U^* - (1-U^*)\frac{\phi^* - bU^*}{\phi^*} = \\ &= 1 - 2U^* - (1-U^*)\left(1 - \frac{bU^*}{\phi^*}\right) = \\ &= 1 - 2U^* - 1 + U^* + \frac{bU^*}{\phi^*}(1-U^*) = -U^* + \frac{bU^*}{\phi^*}(1-U^*) \end{aligned} \tag{57}$$

i.e.

$$b_1 = \frac{U^*}{\phi^*}\left[-\phi^* + b(1-U^*)\right] \, . \tag{58}$$

From (26) and (58), (54) immediately follows.

Remark 2 - *We observe that*

i) in the case of the boundary conditions (8) *one has* $\bar{\alpha} = 0$, *and* (54) *reduces to*

$$b(1 - U^*) < 1\,, \tag{59}$$

which is the stability condition given in [1];

ii) (54) *is only a sufficient condition for guaranteeing* (25).

Appendix

Let Ω^* be a smooth bounded domain such that $\Omega \subset \Omega^*/\partial\Omega^*$ and

$$\bar{k} = \inf_{\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega^*)} \frac{\|\nabla\varphi\|^2}{\|\varphi\|^2}\,. \tag{60}$$

Then

$$\|\varphi\|^2 \leq \bar{k}\|\nabla\varphi\|^2 \qquad \forall\,\varphi \in W_i^{1,2}(\Omega, \beta_i)\,. \tag{61}$$

In fact, setting

$$\varphi = \begin{cases} \Psi\,, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \\ 0\,, & \mathbf{x} \in \Omega^*/\Omega \end{cases} \tag{62}$$

$\Psi \in W_i^{1,2}(\Omega, \beta_i) \to \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ hence (60) $\Rightarrow$ (61). In particular for $\Omega^* = \left[\delta_1^{(1)}, \delta_1^{(2)}\right] \times \left[\delta_2^{(1)}, \delta_2^{(2)}\right] \times \left[\delta_3^{(1)}, \delta_3^{(2)}\right]$ it follows that [Cfr [20], p. 196]

$$\bar{k} \geq \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{\left[\delta_j^{(2)} - \delta_j^{(1)}\right]^2}\,. \tag{63}$$

Acknowledgments

This work has been performed under the auspices of the G.N.F.M. of I.N.D.A.M. and M.I.U.R. (P.R.I.N. 2005): "Nonlinear Propagation and Stability in Thermodynamical Processes of Continuous Media".

References

1. R.S. Cantrell, C. Cosner, *On the dynamics of predator-prey models with the Beddington - De Angelis functional response*, Journal of Mathematical Analysis and Application **257**, 206 (2001).
2. R.S. Cantrell, C. Cosner, *Spatial ecology via reaction-diffusion equations*, John Wiley and Sons Ltd., Chichester, UK, (2004) ISBN 0-471-49301-5.

3. D. L. DeAngelis, R. A. Goldstein and R. V. O'Neill, *A model for trophic interaction*, Ecology **56**, 881 (1975).
4. G. F. Gause, *The struggle for existence*, Williams and Wilkins, Baltimore, MD, (1934).
5. G. W. Harrison, *Comparing predator-prey models to Luckinbill's experiment with Didinium and Paramecium*, Ecology **76**, 357 (1995).
6. I. Kozlova, M. Singh and A. Easton, *Predator-prey models with diffusion based on Luckinbill's experiment with Didinium and Paramecium*, Math. Comp. Modelling **36**, 83 (2002).
7. Antony W. Leung, *Systems of nonlinear partial differential equations*, Kluwer Academic Publisher (1989).
8. L.S. Luckinbill, *Coexistence in laboratory population of Paramecium aurelia and its predator didinium nasutum*, Ecology **54**, 1320 (1973).
9. S. Rionero, *On the stability of binary reaction-diffusion systems*, Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis. B **119**, no.7-9, 773 (2004) MR2136906.
10. S. Rionero, *A rigorous link between the L^2-stability of the solutions to a binary reaction-diffusion system of P.D.E. and the stability of the solutions to a binary system of O.D.E.*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) **71**, 53 (2004). Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis. B **119**, no.7-9, 773 (2004) MR2136906.
11. S. Rionero, *A rigorous reduction of the L^2-stability of the solutions to a nonlinear binary reaction-diffusion system of P.D.Es. to the stability of the solutions to a linear binary system of O.D.Es.*, Journal of Mathematical Analysis and Application **319**, Issue 2, 377 (2006).
12. S. Rionero, *A nonlinear stability analysis for two-species population dynamics with dispersal*, Math. Biosc. Eng. **3**, n.1, 189 (2006).
13. S. Rionero, *L^2-stability of the solutions to a nonlinear binary reaction-diffusion system of P.D.Es.*, Rend. Accademia dei Lincei. Fasc.4, 2005 (In press).
14. S. Rionero, *Nonlinear L^2-stability analysis for two-species population dynamics in spatial ecology under Neumann boundary data*, Rend. Circolo Mat. Palermo, Serie II, Suppl. 78, 273 (2006).
15. S. Rionero, *On the growth and dispersal of two-species populations in spatially heterogeneous ecology* (To appear).
16. S. Rionero, *Global nonlinear L^2-stability for double diffusive convection in porous media with and without rotation* (To appear).
17. S. Rionero, *Long time behaviour of the solutions to competitive reaction-difusion systems of P.D.Es.* (To appear).
18. B. Straughan, *The energy, method, stability and nonlinear convection*, 2^{nd} edition. Springer-Verlag (2004).

19. J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.* Springer-Verlag (1967).
20. K. Rektoris, *Variational methods in Mathematics, Science and Engineering.* D. Reidal Publ.Co. 1980.

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXXIII, (2006) pp. 99-249

Tradizione e cartesianesimo nella matematica napoletana della prima metà del secolo XVIII

Romano Gatto*

Presentata dal socio Luciano Carbone

(Adunanza del 9 giugno 2006)

Keyword: Cartesianism, Euclid.

Abstract. The mathematical Cartesianism was, in Neaples, a very prolific movement. In the second half of the XVIIth century and in the first decades of the XVIIIth century, Neapolitan mathematicians, such as Antonio Manforte, Giacinto De Cristofaro, Bartolomeo Intieri, pulished works which Italian mathematics community and many European mathematicians much appreciated. Indeed in Italy only the Neapolitan matnematicians seemed to be able to detect the revolutionary and innovative significant of the cartesian geometry. The analytic method, which dominated the Neapolitan mathematics in that period influenced also the treatment of the Euclid's *Element*, which, because of its same nature, was considered the typical example of the synthetic method. Within some decade three commentaries of the first sex books of Euclid's *Elements* were published in Neaples. The cartesian formation of their authors, Agostino Ariani, Nicolò De Martino and Pietro De Martino, clearly appeared in them. In fact, these authors dealt with several questions by means of analytic appoach, so demonstrating that syntetic tradition and analytic innovation were not necesseraly opposed, as some mathematician in a polemic spirit mantained, but they could well live together.

Sommario. Il Cartesianesimo matematico a Napoli fu un movimento molto fecondo. Nella seconda metà del sec. XVII e nei primi decenni del sec. XVIII matematici napoletani, quali Antonio Manforte, Giacinto De Cristofaro, Bartolomeo Intieri, diedero alla luce opere che si fecero apprezzare dalla comunità matematica italiana e che trovarono estimatori anche fuori dall'Italia. In effetti, in Italia, solo i matematici napoletani sembrarono essere in grado di cogliere la portata rivoluzionaria e innovativa della geometria cartesiana. L'indirizzo analitico che dominò la matematica napoletana di quel periodo ebbe riflessi anche nella trattazione dell'opera che, per sua natura, era considerata prototipo del metodo sintetico, gli *Elementi* di Euclide. Nel giro di qualche decennio uscirono alle stampe a Napoli tre commenti dei primi sei libri degli *Elementi* di Euclide. In essi traspare chiaramente la formazione cartesiana dei loro autori, Agostino Ariani,

* Dipartimento di Matematica dell'Università della Basilicata.

Nicolò De Martino e Pietro De Martino, i quali affrontarono varie questioni con approccio analitico dimostrando che la tradizione sintetica e l'innovazione analitica potevano bene convivere e non erano necessariamente contrapposte come alcuni polemicamente sostenevano.

1. La nascita del movimento "cartesiano" a napoli. la matematica nel pensiero di tommaso cornelio

Nei primi decenni della seconda metà del secolo XVII la città di Napoli fu interessata da un importante processo di rinnovamento culturale che in breve tempo produsse un mutamento radicale nel modo di concepire la scienza. È unanimemente riconosciuto dagli studiosi che principale animatore di questo movimento fu il medico e filosofo cosentino Tommaso Cornelio che, tornato da Roma a Napoli nel 1650, introdusse negli ambienti culturali napoletani, ancora dominati dall'aristotelismo, le teorie filosofico-scientifiche dei «moderni» suscitando interesse ed entusiasmo tra numerosi giovani intellettuali[1].

Maurizio Torrini ha ben messo in evidenza come Cornelio, nel *Discorso dell'Ecclissi*[2] pronunciato al suo esordio a Napoli all'Accademia degli Oziosi, abbia dettato un vero e proprio manifesto programmatico per il rinnovamento della cultura filosofico-scientifica napoletana, un manifesto ispirato ad una concezione temporale ed evolutiva della natura e della verità e che può sintetizzarsi in tre punti essenziali: primo, demolire la fatiscente cultura aristotelica e con essa le false credenze astrologiche; secondo, affermare la superiorità della scienza dei «moderni» fondata, non già sul principio di autorità, ma sulla *libertas philosophandi*, sulla libera razionalità, sulla dimostrazione matematica, sulla prova sperimentale; terzo adoperare il volgare come lingua per diffondere rapidamente il nuovo sapere[3].

La scelta antiaristotelica non voleva significare soltanto il rifiuto di dottrine obsolete che avevano fatto il loro tempo e che si dimostravano incapaci di fornire risposte adeguate a vecchi e nuovi interrogativi che le recenti scoperte scientifiche e l'avanzamento della tecnica ponevano intorno allo studio dei fenomeni della natura, quanto, invece, il rifiuto del dogmatismo autoritario e dell'accettazione supina e acritica di verità imposte *ex auctoritate*. Cornelio, infatti, non indicava una particolare teoria da abbracciare in sostituzione

[1] Su Tommaso Cornelio e sul ruolo da lui avuto nel rinnovamento della cultura filosofica e scientifica napoletana, cfr. M. TORRINI, *Tommaso Cornelio e la ricostruzione della scienza*, Napoli, Guida, 1977.

[2] T. CORNELIO, *Discorso dell'Ecclissi detto nell'Accademia degli Otiosi nel dì 29 di maggio…*, in Napoli, Per Camillo Cavallo, 1652.

[3] Cfr. M. TORRINI, *La discussione sullo statuto delle scienze tra la fine del '600 e l'inizio del '700*, in M. TORRINI, F. LOMONACO (curatori), *Galileo e Napoli*, Napoli, Guida 1987, pp. 357-383, (*Ivi*, p. 359).

dell'aristotelismo, – ciò avrebbe significato sostituire un dogmatismo con un altro dogmatismo –, propagandava, invece, un nuovo modello gnoseologico fondato sulla libera razionalità e sul diritto di critica; un modello in cui il discorso scientifico costituiva l'asse portante del discorso filosofico. La spiegazione dei fenomeni naturali era da ricercare nella natura stessa e non all'interno di teorie filosofiche fondate su principi metafisici esterni ad essa.

Secondo Cornelio, a rivendicare la *libertas pilosophandi* era stato per primo Bernardino Telesio che nelle sue opere aveva criticato e confutato la filosofia naturale aristotelica. Dopo di lui una lunga schiera di filosofi e scienziati, quali Gilbert, Stigliola, Campanella, Bruno, Galileo, Gassendi, Descartes, Bacon, Digby, Locke, Harvey, Hobbes, in varia misura avevano contribuito a fare uscire la scienza dalle strettoie entro cui era stata per lungo tempo costretta dall'aristotelismo. La grande eredità del naturalismo di Telesio e di Campanella si presentava agli occhi di Cornelio come un patrimonio a cui attingere per far rinascere l'interesse per la natura, far rivivere teorie di antichi filosofi e scienziati dimenticate dagli aristotelici, confutare false dottrine, aprire una nuova stagione per la scienza.

Quanto ai metodi d'indagine la via da seguire era quella sperimentale indicata da Galilei. Nell'Accademia degli Investiganti fondata da Cornelio e da Leonardo di Capua[4], che si riuniva nella casa del marchese d'Arena don Andrea Conclubet, e che annoverava tra i suoi adepti personalità di assoluto rilievo della vita civile e intellettuale napoletana come Francesco e Gennaro D'Andrea, Sebastiano Bartoli, Alfonso Borelli, Carlo Buragna, Lucantonio Porzio, Antonio Monforte, venivano discussi problemi di filosofia naturale, di matematica, di medicina; si facevano esperimenti di chimica, si riproponevano le esperienze dell'Accademia del Cimento. In essa vigeva il principio galileiano che la prova sperimentale, accolta come uno degli aspetti fondamentali della ricerca, doveva trovare nella dimostrazione matematica il riscontro decisivo per sancire le leggi del mondo fisico. L'obiettivo era di sottrarre l'indagine della natura da ogni speculazione di tipo metafisico e di fornire, invece, una spiegazione meccanicistica dei fenomeni. Nel già citato *Discorso dell'ecclissi,* Cornelio sostenne l'esistenza di una sola fisica capace di spiegare i fenomeni celesti e quelli terrestri, le macchie solari, la meccanica delle eclissi, i fenomeni legati alla luce, la loro generazione, le loro proprietà[5]. Come avrebbe dimostrato anche nei suoi scritti successivi, e in particolare nei *Progymnasmata Physica*[6], Cornelio dove-

[4] Sull'Accademia degli Investiganti cfr. M.H. FISCH, *The Acadeny of Investigators in Science, Medicin and History. Essays in Honour of Ch. Singer*, E.A. Underwood, Oxford, University Press, 1953, I, PP. 521-563; M. TORRINI, *L'Accademia degli Investiganti. Napoli 1663-1670*, "Quaderni Storici", XVI (1981) n. 48, pp. 845-883.

[5] Per un'analisi compiuta di questa importante opera cfr. M. TORRINI, *Tommaso Cornelio e la ricostruzione della scienza*, Napoli, cit., pp. 89-101.

[6] THOMAE CORNELII, *Progymnasmata Physica*, Venetiis, Sumptibus Bartholomaei Nicola Mopreschi, 1683, ristampa Neapoli, Raillard, 1688.

va molto del suo pensiero alla fisica cartesiana: era un fervente sostenitore della teoria cartesiana dell'etere alla luce della quale spiegava la meccanica di fenomeni naturali quali la condensazione e la rarefazione che da tempi remoti avevano fatto discutere filosofi e scienziati, interpretava l'esperimento della canna torricelliana che provava l'esistenza del vuoto e la struttura corpuscolare della materia, dava ragione degli effetti di attrazione elettrica e magnetica, della propagazione del suono e della luce. Nonostante ritenesse Cartesio il filosofo e lo scienziato che più di ogni altro aveva contribuito a sostituire dogmatismo e autoritarismo col razionalismo e con il libero esercizio della ricerca, Cornelio non fu sostenitore di un cartesianesimo integrale. Ciò era dovuto in parte alla formazione "eterogenea" del suo pensiero che, come egli stesso diceva, accanto a proprie posizioni aveva accolto

> "nonnulla a Telesio, complura ex Galileo [...], plurima tandem mihi suppediat Renatus des Cartes ad eam philosophandi methodum, qua ego utor"[7].

ma anche alle convinzioni da lui maturate secondo le quali

> "legarsi alle opinioni di uno solo sia fare un troppo grave torto all'epoca nella quale viviamo, e gli Autori che han spianato la strada alla libertà di filosofare, ed alla novità de' pensieri"[8].

Seguire un solo autore sarebbe stato come giurare *in verba novi magistri*, aderire ad un nuovo autoritarismo, abiurare allo spirito stesso della *libertas philosophandi* per la quale si batteva, ignorare i notevoli contributi che importanti autori, antichi e moderni, avevano offerto allo sviluppo di vari settori della scienza senza riuscire a cogliere la ricchezza della diversità di espressioni da essi offerta. Le stesse istanze si ritrovavano anche in Costantino Grimaldi che, ricordando gli insegnamenti di Cornelio, scriveva che i moderni non intendevano legarsi ad alcuna setta

> "ma scorrendo con piè libero per tutte le dottrine, là fermarsi, ove ritrovar sa scerre il buono ed il vero; essi non voglion prestare credenza all'autorità di qualunque filosofante, ma solamente s'arrendono alla ragione"[9].

---

[7] T. CORNELIO, *Epistola qua motuum illorum cui vulgo ob fugam vacui fieri dicuntur vera causa per Circompulsionem ad mentem Platonis explicatur a Timaei Locriensis Crathigenae*, Romae, Apud Menelphum Menelphi, 1648, p. 115.

[8] Cfr. T. CORNELIO, *Discorso dell'Eclissi*, cit., p. 9. Questo passo è già stato citato in M. TORRINI, *Tommaso Cornelio*, cit. p. 93.

[9] Cfr. R. AJELLO, *Cartesianesimo e cultura oltremontana al tempo dell'«Istoria civile»* in *Pietro Giannone e il suo tempo*. Atti del convegno nel tricentenario della nascita, a c. di R. Ajello, 2 voll., Napoli, Jovene, 1980, p. 134. Per quanto riguarda Costantino Grimaldi (1677-1750), teologo e giurista, cfr. G. RICUPERATI, *Costantino Grimaldi*, in *Dal Muratori al Cesarotti. Politici ed economisti del primo Settecento*, Milano-Napoli, Ricciardi, 1978.

Cartesio divenne a Napoli un «simbolo» tanto che sotto il nome di *cartesiani* furono genericamente accomunati tutti i «novatores» per quanto nel loro pensiero si trovassero mescolate insieme «posizioni galileiane, campanelliane, e poi di atomismo lucreziano-gassendista, o magari di giansenismo, e perfino di platonismo malebranchiano»[10].

Educare la mente all'acquisizione di una moderna visione della scienza era compito riservato essenzialmente alla matematica. Cornelio manifestava le sue idee sulla matematica nel *Progymnasma I* [11]. Suo intento precipuo era di dimostrare che nessuna disciplina come la matematica poteva condurre all'acquisizione della verità. La matematica, infatti, possedeva un metodo proprio fondato su verità incontestabili, assiomi e nozioni comuni, e su un ragionamento rigoroso che conduceva la mente umana in modo inconfutabile ad acutissime conclusioni[12]. Ciò che è sorprendente è che Cornelio non parlava di matematica in modo generico, o con riferimento a ciò che tradizionalmente aveva rappresentato la matematica per antonomasia, vale a dire la geometria elementare euclidea, ma parlava esplicitamente della "geometria superiore" archimedea, di quella apolloniana delle coniche, dell'analisi geometrica di Pappo rivisitata e riportata in auge da Viète con l'uso dell'algebra[13].

> "Hinc illius divinae propemodum artis quam Analisyn, seu Algebram vocant mirabilis ortus, qua nihil acutius fungi, aut excogitari potest"[14].

Insomma Cornelio non esaltava le virtù della dimostrazione sintetica euclidea ritenuta dagli antichi geometri la più perfetta, ma nella discussione sulla geometria spostava il suo orizzonte sulle complesse teorie archimedee, sulla teoria delle coniche, sull'analisi del Viète dai più ignorata e da pochi compresa perché coniugava insieme elementi inconsueti nello studio della geometrica: il metodo dell'analisi conosciuto sì dagli antichi geometri, ma da essi messo da parte perché ritenuto meno rigoroso di quello sintetico euclideo, e l'uso di algoritmi algebrici nella risoluzione dei problemi. Bisognava dunque non solo studiare la matematica, ma anche non fermarsi ai primi elementi; bisognava andare oltre la geometria euclidea e percorrere vie nuove poco frequentate. Quanti, infatti, a quell'epoca coltivavano studi di geometria archiemedea e apolloniana? Quanti erano in grado di apprezzare e comprendere i nuovi metodi analitici che si sta-

[10] Cfr. E. GARIN, *Cartesio e l'Italia*, "Giornale Critico della Filosofia Italiana", XXIX (1950), pp. 385- 405 (*ivi*, p. 397).

[11] T. CORNELIO, *Progymnasmata* cit., *ivi De Ratione Philosophandi*, pp. 28-38.

[12] "Equidem mirari satis geometriam non possum, quae ex paucis admodum pervultatisque notionibus seu axiomatis, ad acutissimarum conclusionum adpodixes rationem nostram adducit", *ivi*, p. 28.

[13] "Hinc multae illae difficillimarum propositionum demonstationes, quae Archimedis, Apollonij, Pappi, Vietae, aliorumque voluminibus contineantur", *ibid.*

[14] *Ibid.*

vano sempre più affermando fra gli oltremontani? Cornelio lamentava che solo pochi dei numerosi studenti che affollavano le scuole di filosofia e di teologia si dedicavano allo studio delle matematiche e ancora in minor numero erano gli autori di opere «de rebus mathematicis»[15]. Causa di ciò, secondo lui, era l'errata interpretazione di un pensiero di Aristotele secondo il quale per i fanciulli era facile diventare matematici, difficile, invece, diventare fisici, e ancora più difficile diventare politici. Ciò aveva fatto diffondere la credenza che le discipline matematiche fossero molto facili e che trattassero di cose puerili, laddove gli studi di fisica e di giurisprudenza fossero riservati ad ingegni più prestanti. In realtà, osservava Cornelio, se c'era una disciplina la cui conoscenza richiedeva somma acutezza di ingegno, questa certamente era da ricercarsi nell'ambito delle matematiche. La giurisprudenza richiedeva la conoscenza di molte nozioni e una grandissima esperienza, cose che si potevano acquisire non tanto con lo studio e la meditazione, quanto con una ferrea memoria e con il continuo esercizio della pratica della professione stessa. Essa, insomma richiedeva l'acquisizione della maturità che si può conseguire con l'esperienza e con l'avanzamento dell'età. La fisica, dal canto suo, necessitava della conoscenza dei fenomeni naturali e dei loro effetti, cosa che sembrava che dovesse essere dedotto soprattutto dall'osservazione e dalla considerazione della natura. Le discipline matematiche, invece, che prendevano in considerazione soltanto l'analogia delle grandezze, richiedevano la conoscenza di poche nozioni semplici e l'intelligenza di cui la natura aveva dotato la mente umana. Questa era la ragione per cui un fanciullo, che per la giovane età conosceva solo poche cose e che non aveva esperienza di osservazioni della natura, se possedeva acutezza di ingegno poteva fare grandi progressi nelle matematiche. L'acquisizione di conoscenze matematiche richiedeva, infatti, solo il possesso di una certa intelligenza e non altro. Tutte le cose che cadono sotto la nostra intelligenza – continuava Cornelio - appartengono a tre diversi generi, astratto, concreto e analogia oggetto di tre differenti dottrine: la prima, la teologia o prima metafisica, interessata alle cose incorporee ed eterne, astratte ai sensi; la seconda, la Fisica che studiava le cose corporee e concrete; la terza, infine, che ricercava l'anologia delle grandezze che si sostituisce alla figura o al numero, e che comprendeva la geometria e l'aritmetica che sono il fondamento di tutte le altre discipline matematiche. L'osservazione della natura, essendo fondata sulla sensazione, non poteva fornire una conoscenza diretta e perfetta delle cose. L'animo umano, infatti, percepisce tutte le immagini esterne delle cose naturali mediante i sensi i quali, essendo recettori e allo stesso tempo interpreti della realtà percepita, forniscono una conoscenza delle stesse incompleta e imperfetta e non quali esse sono realmente in sé e per sé. La contemplazione matematica, invece, non è affetta da errori di questa natura, riguardando essa cose le cui immagini non sono percepite mediante i sensi;

[15] *Ivi*, p. 29.

> "figuras enim, et numeros, quorum proprietates, et analogias mathematici scrutantur, mens per seipsam concipere, sine sensus admeniculo, satis comode potest"[16].

La conoscenza assoluta della natura non solo era difficile, ma, in certi casi, appariva disperata. E tuttavia non bisognava per questo tralasciare la sua investigazione, perché riuscire a penetrare in una così grande oscurità, qual era quella in cui la natura aveva avvolto la verità, apportava piacere non meno che utilità. La conoscenza scientifica era per Cornelio elaborazione razionale della mente umana e la matematica, in quanto disciplina concepita di per se stessa dalla mente senza l'intervento dei sensi, era la scienza per eccellenza. La prova matematica era, infatti, la sola in grado di assicurare una conoscenza assoluta delle cose.

> "Mathematicae disciplinae – scriveva Cornelio -, cum in sola magnitudinum analogia contemplanda versantur, nullam rei cuiusvis cognitionem desiderant, praeter simplices quondam notiones ac intelligentias, quos natura mentibus hominum tanquam scientiae fondamenta inseruit"[17].

Diversamente avveniva per la fisica che per spiegare i fenomeni della natura si serviva, oltre che dall'esperienza, di argomentazioni desunte dall'analogia delle cose artificiali, e per giungere a giuste conclusioni richiedeva l'impiego di molti ingegni e di tempi molto lunghi. E poi chiunque avesse desiderato conseguire risultati utili nel campo della fisica doveva innanzitutto «mathematicis artibus, aut saltem geometria, ex Platonis praecepto, animum imbuere».[18]

Infatti, lo studio delle matematiche, oltre a consentire l'acquisizione di conoscenze proprie delle matematiche, serviva ad acuire l'ingegno e ad educare la mente alla razionalità, in modo che i suoi ragionamenti non conducessero a conclusioni errate. Questa, d'altra parte, era stata la via indicata da Galileo, «qui geometriae adminiculo complures abstrusas, reconditasque rerum naturae intelligentias in veritatis lucem extraxit».[19]

Cornelio dunque conferiva alla conoscenza della matematica una funzione centrale nella formazione culturale dei giovani. L'incitamento che in merito Lucantonio Porzio dice di aver da lui ricevuto è quanto mai eloquente:

> "in tutte le Scienze umane, quelle della Matematica avevano maggior uso; e che poco o nulla si poteva saper di altre cose da chi non sapeva di matematica: che

[16] *Ivi*, p. 33.
[17] *IVI*, p. 30.
[18] *Ivi*, p. 35.
[19] *Ivi*, pp. 35-36.

> questo era parere di tutti, di Platone, di Aristotele stesso, d'Ippocrate, di Galeno stesso, di Galileo, di Renato, e di tutti altr"[20].

Un consiglio che suonava come un imperativo al quale non si sottrasse alcuno della «setta dei cartesiani» anche se, ottemperare ad esso, significò per qualcuno affrontare difficoltà di non poco conto[21].

L'avere Cornelio citato espressamente l'*ars analytica* del Viète e non la *Géométrie* di Descartes, lascia pensare che egli quando scrisse il suo primo *Progymnasma* nel 1661 non conoscesse quest'opera, o comunque non l'avesse letta. In realtà, la *Géométrie* pervenne in Italia solo a pochissimi studiosi i quali, per lo più non riuscirono ad apprezzarla avendo avuto notevoli difficoltà a comprendere un'opera dallo stile matematico assolutamente inusuale e per giunta scritta in lingua francese[22]. Questa cominciò infatti ad essere compresa e a diffondersi in Italia cominciando proprio da Napoli, solo dopo che fu tradotta in latino. È probabile, dunque, che Cornelio abbia conosciuto la *Geometria* di Descartes durante il suo soggiorno napoletano, ma non abbiamo alcun indizio per poter affermare che egli si sia impadronito dei suoi nuovi algoritmi e che ne abbia fatto oggetto del suo insegnamento universitario. Sappiamo che egli era stimato come matematico non meno di quando lo era come medico, come si può leggere in un passo di una lettera scritta da Giovanni Finchio a Leopoldo di Toscana:

---

[20] Cfr. G. MOSCA, *Vita di Lucantonio Prozio*, Napoli, presso Gennaro Migliaccio, 1765, pp. 10-11.

[21] "Io poi vado passando al meglio che si può, e per non stare otioso ho cominciato a studiar gli elementi d'Euclide, e gia sto al 3° libro; ma non vi ho gran facilità nell'apprenderli, onde ho bisogno della voce viva, siché potrò dire che questa sia l'unica cosa che mi sia stata insegnata", così Francesco d'Andera scriveva in una sua lettera da Perugia il 3 novembre 1671 a Lucantonio Prozio a Roma; cfr. A. BORRELLI, *Francesco d'Andrea. Lettere a G. Balivi, A. Baldigiani, A. Magliabechi, M. Malpigli, A. Marchetti, F. Redi, L. Porzio. 1671-1692*, Archivio Storico per le Provincie Napoletane", CXV (1997), pp. 114-258, lettera n. 3.

[22] Come è noto la *Géométrie* è uno dei tre saggi annessi al *Discours de la methode*, a Leyde De l'Imprimerie de Ian Maire, 1637. A far giungere il *Discours* in Italia era stato Marin Mersenne che ne aveva inviato un esemplare ad Antonio Santini, ne aveva mostrato un altro a Giovanbattista Baliani ed infine ne aveva fatto pervenire un altro ancora a Giannantonio Rocca che, a sua volta, l'aveva inviato a Parma al Padre Anonio Maria Costantini. Quest'ultimo iniziò a tradurre la *Géométrie*, ma si arrestò dopo sole poche pagine. Cfr. C. COSTANTINI, *Baliani e i Gesuiti. Annotazioni in margine alla corrispondenza del Baliani con Giovanni Luigi Confalonieri e Orazio Grassi*, Firenze, Giunti-Barbera, 1960; E. LOJACONO, *Immagini di René Descartes nella cultura napoletana dal 1644 al 1755*, Lecce, Conte Editore, 2003, p. 14-17. In realtà quest'opera cominciò a diffondersi in Italia soprattutto a Napoli solo tramite la traduzione in lingua latina e quasi certamente né attraverso la prima edizione *Geometria, a Renato Des Cartes anno 1637 Gallice edita; nunc autem cum notis Florimondi de Beaune, ... in linguam Latinam versa, & commentariis illustrata, opera atque studio Francisci a Schooten*, Leydensis, Lugduni Batavorum: Maire, Joannes, 1649, né attraverso l'*Editio secunda, multis accessionibus exornata, & plus altera sui parte adaucta*, Amstelaedami : apud Ludouicum & Danielem Elzeuirios, 1649-1651, quanto attraverso la ristampa che di questa fecero sempre gli Elzeviri nel 1659-1661. In merito cfr. E. LOJACONO, *Immagini di René Descartes*, cit. pp. 11-17.

> "È matematico e medico di gran grido. Egli è cartesiano e grande difensore delle cose nuove e per questo in Napoli è odiato da quelli che giurano fedeltà ai loro maestri"[23]

e tuttavia l'assenza di documenti e di ogni altro indizio ricavabile dalle sue opere non permette di stabilire fino a che punto nel suo insegnamento universitario della matematica fu un innovatore. Dalle lettere di Antonio Monforte ad Antonio Magliabechi si ricava l'impressione che tra Cornelio e Monforte si fosse stabilito un forte sodalizio reso saldo dai comuni interessi scientifici[24]. Appare anche che Cornelio era il destinatario di libri di matematica e di richieste di pareri inerenti le matematiche di scienziati di altre parti d'Italia. Ciò lascia supporre che, al di là di una generica informazione, egli dovesse essere al corrente delle teorie dei moderni anche in campo matematico, e tuttavia ciò non ci permette di sciogliere il dubbio circa l'attualità del suo insegnamento. Nei confronti dei «novatores» che si formarono al suo pensiero egli di sicuro esercitò una forte influenza affinché si impegnassero nello studio della matematica. L'incitamento Di Cornelio allo studio delle matematiche suonò per Lucantonio Porzio come un imperativo, tant'è che quando nel 1656 si ritirò a Vico Equense per sfuggire alla peste che stava falcidiando la popolazione di Napoli, cominciò a studiare gli *Elementi* di Euclide. Altrettanto fece Francesco D'Andrea anni dopo e non senza difficoltà[25]. Porzio e D'Andrea si misero a studiare gli *Elementi* di Euclide e non la *Geometria* di Descartes e ciò ci fa dubitare che Cornelio abbia potuto insegnare e diffondere a Napoli il nuovo algoritmo cartesiano della *Géométrie*. Se è vero che suo fu il merito di far conoscere e diffondere tra i «novatores» il pensiero e le teorie dei moderni filosofi e scienziati, ci sembra che non altrettanto si possa dire per quanto attiene la geometria cartesiana. Non bastava essere dei convinti cartesiani per poter comprendere la geometria analitica di Descartes e a noi pare di poter concludere che Cornelio ebbe sì un ruolo fondamentale nel ricostruire la scienza a Napoli, nella diffusione di un pensiero modero e originale, nella formazione di una nuova coscienza razionale nei giovani studiosi, ma non ebbe alcun ruolo nella diffusione della geometria di Descartes. D'altra parte bisogna considerare che Monforte, De Cristofaro e Intieri, che più di altri rappresentarono il movimento cartesiano matematico a Napoli, dovettero la loro for-

---

[23] Cfr. A. FABRONI, *Lettere inedite di uomini illustri per servire d'appendice all'opera intitolata Vitae italorum doctrina excellentium*, Firenze, Moucke, 1773-1775, p. 266.

[24] Cfr. A QUONDAM-M. RAK (curatori), *Lettere dal Regno ad Antonio Magliabechi*, Napoli, Guida, 1978, v. II.

[25] "Io poi vado passando al meglio che si può, e per non stare otioso ho cominciato a studiar gli elementi d'Euclide, e gia sto al 3° libro; ma non vi ho gran facilità nell'apprenderli, onde ho bisogno della voce viva, siché potrò dire che questa sia l'unica cosa che mi sia stata insegnata", così Francesco d'Andera scriveva in una sua lettera da Perugia il 3 novembre 1671 a Lucantonio Prozio a Roma; cfr. A. BORRELLI, *Francesco d'Andrea. Lettere a G. Balivi, A. Baldigiani, A. Magliabechi, M. Malpigli, A. Marchetti, F. Redi, L. Porzio. 1671-1692*, Archivio Storico per le Provincie Napoletane", CXV (1997), pp. 114-258, lettera n. 3.

mazione matematica ad altri canali che nella produzione matematica dei suoi allievi diretti non si trova alcuno scritto ispirato all'*ars analytica*. Lo stesso Luca Tozzi, che fu tra quelli a lui più vicino e che lo sostituì anche per un certo periodo nell'insegnamento universitario della matematica, pubblicò, per quanto riguarda la matematica pura, soltanto un trattato di trigonometria di ispirazione monfortiana[26], scritto per altro quando ormai i suoi interessi erano prevalentemente rivolti alla medicina[27]. Di ciò egli non fece alcun mistero, dal momento che, rivolgendosi al lettore parla del *De problematum determinatione* del Monforte[28] e di una *Trigonometria, absque usu tabularum* che questi avrebbe composta. È molto probabile che Tozzi, a proposito di questa *Trigonometria* si riferisse al trattato della risoluzione dei problemi dell'olandese dove Monforte tradusse in termini analitici la risoluzione trigonometrica di problemi[29]. Non ci risulta, infatti, che questi abbia ascritto alcun specifico trattato di trigonometria. Seguendo la via monfortiana, anche Tozzi risolse i suoi problemi sui triangoli (rettangoli e non) per via algebrica, traducendo i loro enunciati in equazioni, dopo aver considerato al posto della tagα (α è l'angolo formato dell'ipotenusa e uno dei due cateti) il rapporto tra il cateto opposto e quello adiacente ad α. Egli apprese la matematica e probabilmente l'algebra del Viète presso il collegio gesuitico napoletano, così come avvenne per quasi tutta la generazione di giovani che come lui si strinse intorno a Cornelio i quali aveva appreso la matematica presso il collegio gesuitico, dove avevano fatto i loro studi. Essi avevano avuto un eccellente professore di matematica, Giovan Battista Zupi, che insegnava la meccanica secondo l'indirizzo galileiano, l'algebra dei moderni, e originali teorie cosmologiche[30].

Come avremo modo di vedere più avanti l'avvento della geometria cartesiana provocò a Napoli una aspra polemica tra i fautori del metodo sintetico degli antichi geometri e quelli del metodo analitico proprio della geometria cartesia-

---

[26] Cfr. L. TOZZI, *Trigonometria absque usu tabulis sinuum, tangentium et secantium ad praxim redactam et resoluta*, Neapoli, C. Porpora et N. Abus, 1704.

[27] In precedenza aveva scritto *Recondita naturae opera iam decreta discursus astrophisicus ubi circa quatuor causas observati cometae de mense decembris transacti anni 1664 edisseritur*, Neapoli, H. Passerus, 1665. In seguito scrisse ancora *Horarium aequalium seu aequinotialium et antiquarum expositio*, Neapoli 1706, e *Theses physicae a sacris literis deprompate*, Neapoli, 1717. Una biogafia del Tozzi, corredata da un'esauriente bibliografia si trova in I. ASCIONE, *Seminarium Doctrinarum. Universitàd i Napoli nei documenti del '700. 1690-1734*, Napoli,. ESI, 1997, pp. 405-406.

[28] Cfr. A. MANFORTE, *De Syderum intervallis, et magnitudinibus opusculum. Cui accessit eiusdem tractatus de Problematum determinatione*, Neapoli, typ. Nicolai Abri, 1699.

[29] Cfr. *Epistola ad Clarissimum et Eruditissimum Virum Antonium Magliabechi, continens solutiones Problematum, quae Leidiensis Geometra post tabulam latens proposuit*, Neapoli, 1676.

[30] Su Zupi e sul suo insegnamento presso il collegio gesuitico napoletano cfr. R. GATTO, *Tra scienza e immaginazione. Le matematiche presso il collegio gesuitico napoletano* (1552-1670 ca.), Firenze, Olschki, 1994.

na[31]. Questo conflitto, però riguardò unicamente il metodo, e non mise assolutamente in discussione risultati che la geometria euclidea aveva saldamente acquisiti da tempo inveterato. Per gli *analitici* così come per i *sintetici* gli *Elementi* di Euclide erano incontestabili e restavano universalmente validi, ancor più perché i suoi risultati trovavano piena conferma anche nella geometria analitica cartesiana. Ciò che era in discussione non erano i contenuti, ma la superiorità e la legittimità del metodo. L'innovazione metodologica dei cartesiani non conduceva a risultati in conflitto con quelli già acquisiti per via sintetica. Il ruolo che la nuova geometria assumeva nell'ambito della matematica non era in alcun modo assimilabile a quello che la nuova fisica dei «novatores» stava assumendo nell'ambito della filosofia naturale. L'affermazione di questa fisica comportava necessariamente la demolizione della vecchia fisica aristotelica non essendoci possibilità alcuna di convivenza tra le teorie dei moderni e la filosofia naturale aristotelica. Insomma, nelle dispute tra «veteres» e «novatores» la matematica non giocò alcun ruolo; non esisteva una matematica *aristotelica* ed una *antiaristotelica*; la geometria di Euclide, sebbene fondata sull'idea di scienza che Aristotele aveva sancito negli *Analitici secondi*, era un edificio costruito su fondamenti saldi nel quale tutti i matematici trovavano certezze. Ciò che i matematici cartesiani intendevano affermare era la superiorità del metodo analitico rispetto a quello sintetico euclideo nella risoluzione dei problemi. Non deve dunque meravigliare che, come vedremo più avanti, proprio i gesuiti napoletani che furono i maggiori oppositori del movimento dei «novatores», ebbero un merito non indifferente nell'introduzione e affermazione a Napoli dell'*ars analytica*.

2. La repressione anticartesiana della fine del secolo XVII

La spregiudicatezza di alcune idee materialistiche professate e propagandate dai «cartesiani», quali le teorie epicureo-gassendiste, fu causa di gravi preoccupazioni da parte del clero napoletano che non tardò a mettere in atto una dura repressione proprio nel periodo in cui il gruppo degli investiganti raggiungeva sul piano culturale la sua massima espansione.

Nel novembre del 1671 la Congregazione Cardinalizia del Sant'Uffizio metteva in guardia il cardinale di Napoli paventando la presenza in quella città

> "di quelli che, per far prova de' loro ingegni promuovono alcune opinioni filosofiche di un certo Renato de Cartes, che gli anni passati diede alle stampe un nuovo Sistema filosofico, risvegliando le antiche opinioni de' Greci intorno a gli atomi, et che da questa dottrina pretendono alcuni teologi provar il modo come rimangono gli accidenti del Pane e del Vino dopo la consacrazione mutata la so-

[31] In merito cfr. D. LACHTERMAN, *Vico, Doria e la geometria sintetica*, "Bollettino del Centro di Studi Vichiani", X (1980), pp. 10-35; R. GATTO, *Il cartesianesimo matematico a Napoli*, "Giornale Critico della Filosofia Italiana", LXXV (1996), pp. 360-379, in particolare pp. 374-379.

> stanza di detto pane e vino in quella del Corpo e Sangue di Nostro Signore Gesù Cristo"[32].

Ma ancor più a dare un'idea del clima di ostilità che si andò instaurando intorno ai «cartesiani» valgono due lettere di Francesco d'Andrea una a Francesco Redi e l'altra ad Antonio Magliabechi. Nella prima, datata Napoli 25 giugno 1685, descrivendo il funerale di Tommaso Cornelio scriveva:

> "Mi si disse [...] ch'ella scrisse qui a suoi ministri desiderano sapere se era vero quello che s'era pubblicato, che si fusse tra noi scoperta una setta di atomisti, ma per verità ateisti, che niegavano l'immortalità dell'anima, e che il cadavere del signor Tommaso si fusse dissotterrato per spargerne le ceneri al vento. Impostura la più degna che si sia mai inventata dall'invidia e dall'odio contro le buone lettere [...]"[33].

Nella seconda, spiegando le ragioni che l'avevano indotto a scrivere un'*Apologia* in difesa degli atomisti, scriveva:

> "Mi trovo impegnato di fare un'Apologia in difesa degli atomisti contro le prediche di un padre predicatore che non ha fatto altro che predicar contro di loro et ha promesso di predicar tutta la veggente vernata sul medesimo soggetto. Gli ha trattati da atei, da ignoranti, con cento altri spropositi, sparlando del Gassando e di Renato e di tutti gli altri, senza però aver letto nessuno di loro e senza sapere in che consista la dottrina degli atomi"[34].

L'identificazione atomismo-ateismo era uno degli argomenti preferiti dei gesuiti e di quanti altri si erano mobilitati a difesa dell'aristotelismo scolastico contro i «cartesiani». Quando nel 1694 il gesuita Giovan Battista De Benedictis, sotto lo pseudonimo di Aletino, pubblicò le sue *Lettere apologetiche*[35], era in pieno svolgimento il cosiddetto "processo agli ateisti", che vedeva coinvolti personaggi di primo piano della vita civile e culturale napoletana, come Giacinto De Cristofaro, Basilio Giannelli, Filippo Belli e Paolo Manuzio. Questo processo, iniziato nel 1688, rappresentò il punto più elevato della violenta della reazione della Chiesa esercitata contro la diffusione della cultura dei moderni[36]. Per gli imputati si trattò di difendersi da un coacervo di accuse gravi e infamanti che attenevano il campo dell'osservanza dell'ortodossia cattolica, quello della morale, quello della disubbidienza all'autorità della chiesa. Un castello di impu-

---

[32] Cfr. L. AMABILE, *Il Santo Officio dell'Inquisizione a Napoli*, Città di Castello, Lapi, 1892, pp. 56-57.

[33] Cfr. A. BORRELLI, *Francesco d'Andrea*, cit., lettera n. 52.

[34] *Ivi*, lettera n. 54.

[35] Cfr. G.B. DE BENEDICTIS (Aletino), *Lettere apologetiche in difesa della teologia scolastica e della filosofia peripatetica*, Napoli, Raillard, 1694.

[36] Cfr. L. OSBAT, *L'inquisizione a Napoli*, Roma, Edizioni di Storia e Letteratura, 1974.

tazioni non circostanziate, costruito sull'escussione di testi che per lo più "avevano sentito dire", nelle quali accanto alle accuse di eresie compariva quella della frequentazione di personaggi come Cornelio, D'Andrea, Porzio, quella della professione di dottrine avversate dalla Chiesa come il copernicanesimo e l'atomismo. Dalla stessa escussione dei testi e dalle domande rivolte agli imputati appare chiaro che l'intento precipuo del Tribunale dell'Inquisizione era di ridurre in soggezione il movimento dei «novatores» e di riaffermare la sovranità delle Chiesa, unica autentica interprete non solo in materia di fede ma anche in quella filosofica e scientifica. Le stesse preoccupazioni sono espresse nelle *Lettere apologetiche* dell'Aletino, il quale scagliandosi violentemente contro la scienza dei moderni accusandola di ateismo, imputava all'eccessiva libertà che questi si erano concessi la causa della generazione di idee così perniciose. La pietra dello scandalo era dunque la conclamata *libertas philosophandi* in nome della quale i "novatores" si erano sottratti all'autorità della Chiesa e avevano abbracciato dottrine contrarie all'ortodossia della fede cattolica. La reazione di intellettuali, come Giuseppe Valletta, Francesco D'Andrea, Lucantonio Porzio, Costantino Grimaldi, fu altrettanto dura e ferma. Si trattò di dimostrare sul piano giuridico, scientifico e filosofico-dottrinale la giustezza delle posizioni dei moderni, la validità della nuova scienza e l'assoluta inesistenza della contrapposizione tra cristianesimo e scienza moderna.

Il "processo agli ateisti" durato nove anni coincise con una fase di affievolimento della spinta innovatrice che aveva alimentato l'opera degli Investiganti. Rimasto legato all'elaborazione e alla discussione di tesi naturalistiche, incapace di seguire più da vicino gli sviluppi della scienza europea, il movimento cartesiano, che aveva conosciuto il suo momento più alto negli anni Ottanta, entrò inevitabilmente in una fase di involuzione. Esso avrebbe potuto avere un differente destino se fosse stato in grado di incidere più profondamente nelle istituzioni civili e culturali della città di Napoli, se fosse, cioè, riuscito a conquistare anche una veste istituzionale. La struttura dell'Università, ad esempio, sembrò non essere affatto sfiorata dal movimento dei "novatores"; all'istituzione della cattedra di Matematica del Cornelio non seguì una politica di coinvolgimento degli investiganti nell'istituzione universitaria, la quale rimase ingessata nella sua tradizione ed estranea al movimento rinnovamento e di sviluppo della cultura scientifica napoletana[37]. Tutta l'attività dei «cartesiani» si svolse fuori dell'Università, in un'Accademia privata, senza l'intervento dello stato.

Un atteggiamento più aperto del potere politico nei confronti degli ambienti culturali si registrò soltanto verso la fine del secolo, quando il 20 marzo 1698, per volontà del viceré, D. Luigi della Cerda ed Aragona, Duca di Medinacoeli, fu aperta l'Accademia che da lui prese il nome di Medinacoeli. Diversi letterati, si riunivano due volte al mese, discutevano di moltissimi argomenti (materie fisiche, astronomiche, geografiche, storiche) e cercavano di mettere in luce tutto

[37] Solo nel 1696 Lucantonio Porzio ottenne la cattedra di Anatomia.

ciò che gli antichi avevano occultato o addirittura ignorato. Il programma proposto ai soci bastò a risvegliare gli animi e a dare una spinta alle pubblicazioni che, almeno per le matematiche, erano andate troppo a rilento. A queste periodiche assemblee, alle quali si partecipava su invito del viceré, prendeva parte tanti uomini illustri come Agostino Ariani, Niccolò Caracciolo, Niccolò Caravita, Gregorio Caloprese, Paolo Mattia Doria, Antonio Monforte, Niccolò Sersale ed altri ancora. Va comunque detto che questo importante avvenimento coincise con il declino dell'esperienza investigante non più in grado di assicurare un posto di rilievo alla cultura scientifica napoletana. Gli anni a cavallo dei due secoli furono caratterizzati da una svolta metodologica che coinvolse anche vecchi esponenti del gruppo investigante, come Lucantonio Porzio e Leonardo Di Capua fautori di uno sperimentalismo di tipo baconiano, fondato sull'osservazione empirica e sulla relativa induzione, che aveva ben poco in comune con lo sperimentalismo ideale e la matematizzazione galileiana, e ancor meno con la moderna fisica-matematica, nonché di un tentativo di storicizzazione della verità che affondava le sue radici nel probabilismo e nel naturalismo del tardo Rinascimento[38].

I discorsi pronunciati nell'Accademia dimostrano un deciso mutamento di rotta degli intellettuali napoletani non più attestati sulla linea dello sperimentalismo e del naturalismo. Si assisté allora, soprattutto per merito di Agostino Ariani, Gregorio Caloprese e Paolo Mattia Doria, ad una conversione dall'indagine sperimentale della natura verso la formazione di un pensiero logico: la rivalutazione della metafisica cartesiana e il riconoscimento dell'importanza della ricerca storica quale mezzo rivolto a comprendere la realtà civile[39].

3. La matematica a Napoli al tempo degli investiganti e dell'accademia di medinacoeli

Con la morte di Galileo, Torricelli e Cavalieri avvenuta nel giro di pochi anni, la matematica italiana entrò in uno stato di crisi. Versata quasi completamente sul fronte della geometria, essa era rimasta quasi del tutto estranea agli sviluppi delle metodologie analitico-algebriche che nei paesi oltremontani stavano mutando il modo di fare matematica. Solo a Napoli la matematica di quel periodo visse una stagione di particolare fermento. Napoli, infatti, era stato uno dei pochi centri della Penisola nel quale era stata coltivata l'*ars analytica* del Viète indispensabile veicolo per poter accogliere e comprendere la *Géométrie* di De-

[38] Cfr. G. GALASSO, *La filosofia in soccorso de' governi. La cultura napoletana del Settecento*, Napoli, Guida, 1989, p-122.

[39] Cfr. S. SUPPA, *L'Accademia Medinacoeli tra tradizione investigante e nuova scienza*, Napoli, Istituto italiano per gli studi storici, 1971.

scartes[40]. Determinante in tal senso era stata la presenza della scuola matematica del collegio gesuitico nella quale Giovanni Giacomo Staserio insegnava tra l'altro, la nuova algebra del Viète[41]. Il collegio gesuitico ebbe a Napoli un ruolo primario nel campo dell'istruzione; presso di esso si formò buona parte degli intellettuali napoletani che ritroviamo tra i protagonisti della scena culturale del periodo qui considerato. Si deve dunque a Staserio e ai suoi successori l'istruzione matematica che buona parte dei giovani intellettuali seguaci di Cornelio avevano ricevuto tant'è che, nella seconda metà del secolo XVII, vi fu una discreta schiera di studiosi che, sebbene dediti per lo più alla professione medica o a quelle legate alla sfera della giurisprudenza, coltivavano con passione e profitto lo studio della matematica dei moderni geometri. Non deve dunque meravigliare che nel periodo a cavallo dei due secoli XVII e XVIII comparvero sulla scena della matematica italiana due napoletani, Antonio Monforte e Giacinto De Cristofaro[42], i quali riuscirono ad imporsi all'attenzione della comunità dei matematici europei quali interpreti tra i più autentici dell'*ars analytica* cartesiana.

Nel 1676, Monforte aveva risolto brillantemente e rapidamente dodici problemi che uno sconosciuto matematico olandese, *post tabulam latens*, aveva fatto circolare in Italia tramite il bibliotecario del Granduca di Toscana, Antonio Magliabechi[43]. La sua soluzione analitico-algebrica aveva destato scalpore nell'ambiente matematico italiano e aveva richiamata l'attenzione di Leibniz e di altri matematici europei[44]. In breve egli aveva guadagnato grande fama tanto da divenire per Magliabechi un valido punto di riferimento. A lui si rivolgerà il bibliotecario fiorentino quando il gesuita Giovanni Francesco Vanni, nel tentativo di screditare la figura di Galileo pubblicò sugli *Acta eruditorum* del 1684 uno *Specimen de momentis graviorum* nel quale negò la validità del principio dell'equilibrio dei corpi sul piano inclinato da questi formulato. Vari scienziati scesero in campo a difendere la posizione galileiana, ma determinante a dirime-

[40] Cfr. R. GATTO, *Il cartesianesimo matematico a Napoli*, cit.

[41] Su Giovanni Giacomo Staserio e sul ruolo da lui svolto nella diffusione dell'*ars analytica* del Viète cfr. R. GATTO, *Tra scienza e immaginazione,* cit.

[42] Su Antonio Monforte cfr. M. TORRINI, *Antonio Monforte. Uno scienziato napoletano tra l'Accademia degli Investiganti e quella Palatina di Medinaceli*, in P. ZAMBELLI (curatrice), *Ricerche sulla cultura dell'Italia moderna*, Bari, Laterza, 1973, pp. 99-144; F. AMODEO, *Vita matematica napoletana*, Napoli, Giannini e figli, 1905, v. I, pp. 21-30. Su Giacinto De Cristofaro cfr. R. GATTO, *Giacinto De Cristofaro, un matematico cartesiano napoletano tra la fine del Seicento e gli inizi del Settecento*, "Bollettino di storia delle scienze matematiche", VI (1986), 2, pp. 31-88.

[43] Cfr. A. MONFORTE, *Epistola ad Clarissimum et Eruditissimum Virum Antonium Magliabechi,* cit. Per la storia della soluzione di questi problemi che vide coinvolti numerosi matematici italiani cfr. R. GATTO, *Contributo di Antonio Monforte allo sviluppo dell'Ars Analytica a Napoli*, "Atti delle Giornate di Storia della Matematica, Cetraro 8-12 Settembre 1988", Commenda di Rende, EditEl, 1991, pp. 217-232.

[44] Cfr. R. GATTO, F. PALLADINO, *The «Duchs Problems» and Leibniz's Point of View on the «Analytic Art»*, "Studia Leibnitiana", Band XXIV/1 (1992), pp. 73-92.

re definitivamente la questione fu l'intervento di Monforte che si distinse in modo particolare per la chiarezza e la linearità delle argomentazioni[45].

Monforte non era soltanto un abile algebrista, ma un matematico completo che possedeva una visione ampia delle scienze matematiche tanto da spaziare con competenza dall'uno all'altro campo. Il suo trattatelo sulla determinazione dei problemi, *De problematum determinatione*, lo consacrò come uno dei più convinti assertori della superiorità dell'analisi algebrica cartesiana nei confronti della sintesi geometrica degli antichi[46]. A riconoscimento delle sue qualità i Riformatori dello Studio di Padova gli offrirono la cattedra di Astronomia che egli, però, non accettò, forse perché giudicò poco conveniente la remunerazione[47].

Quando poi nel 1700 uscì alle stampe il *De constructione aequationum* di Giacinto De Cristofaro[48], si comprese che Monforte non era una figura isolata, ma che Napoli costituiva un vero e proprio centro di studi cartesiani, l'unico di tutta la penisola.

Il *De constructione aequationum* di Giacinto De Cristofaro conteneva alcune cose originali e di assoluto valore scientifico. Ad esempio, contrariamente a quanto veniva fatto fin dai tempi in cui gli algebristi italiani del '500 avevano fornito le formule risolutive delle equazioni di terzo e quarto grado, in esso l'autore senza ricorreva all'*expurgatio*, ossia alla preliminare eliminazione da un'equazione di grado n ($n \geq 3$) del termine di grado n-1, forniva un metodo universale e molto agile per la risoluzione delle equazioni di 4° grado.

Ma ciò che realmente rendeva interessante l'opera di De Cristofaro era il fatto che essa affrontava con vedute spesso originali uno dei temi tra i più attuali e dibattuti dalla matematica europea: la costruzione delle equazioni, metodo che permetteva di determinare le radici di un'equazione di grado qualsiasi come ascisse dei punti di intersezione di due opportune curve[49]. Già adoperato dagli antichi greci (ne fu ideatore Menecmo), i quali avevano trovato un modo per risolvere il problema dell'inserzione di due medie proporzionali tra due grandezze date mediante l'intersezione di due parabole o una parabola e un'iperbole, esso aveva avuto grande sviluppo solo con l'invenzione dell'analisi algebrica, dovuta a René Descartes e a Pierre de Fermat. Infatti, questi autori per primi se

---

[45] Cfr. M. TORRINI, *Dopo Galileo. Una polemica scientifica. 1684-1711*, Firenze, Olschki, 1979, pp. 41-78.

[46] Cfr. A. MONFORTE, *De Problematum determinatione*, cit. Per una analisi di questo trattato cfr. R. GATTO, *Tra Diofanto e Fermat. Antonio Monforte e la determinazione dei problemi*, "Rendiconto dell'Accademia delle Scienze di Napoli", 68 (2001), pp. 17-47.

[47] In merito a tale vicenda cfr. R. GATTO, *Tra Diofanto e Fermat*, cit., nota 5.

[48] HYACINTI CHRISTOPHORI, *De constructione aequationum libellus*, Neapoli, Ex Typographia Josephi Roselli, 1700.

[49] Sui vari aspetti e sulla fortuna che tale metodo ebbe nei secoli XVII e XVIII, cfr. H.J.M. BOS, *Arguments on motivation in rthe Rise and Decline of a Mathematical Theory; the «Construction of Equations», 1637- ca. 1750*, "Archive for History of Exact Sciences", v. 30 (1984), pp. 331-380.

ne erano serviti per risolvere questioni rimaste aperte nella geometria degli antichi, come la costruzione dei problemi *solidi* (che riconducevano alla risoluzione di equazioni di 3° e 4° grado) e *supersolidi* (che riconducevano alla risoluzione di equazioni di 5° e 6° grado). Descartes, nel *Terzo libro* della sua *Géométrie* aveva affermato che un problema geometrico allora poteva ritenersi risolto quando ne fosse stata data la richiesta costruzione geometrica. Questo non costituiva un principio nuovo, dal momento che tutta la tradizione della geometria classica aveva conferito alla costruzione dei problemi un ruolo essenziale nella risoluzione degli stessi. Ma, se per quanto riguarda la tradizione sintetico-euclidea la costruzione era un fatto insito nello stesso procedimento risolutivo, per quanto riguarda l'analisi algebrica la risoluzione raggiunta per via algebrica non comportava contemporaneamente la costruzione geometrica di quanto era richiesto. Descartes aveva appunto sancito che nella risoluzione analitica di un problema non ci si poteva limitare alla soluzione algebrica, ma si doveva comunque giungere alla costruzione geometrica di detta soluzione. Egli aveva infine dettato un criterio di economicità secondo il quale nel costruire un problema non si potevano usare curve più complesse di quelle richieste dal problema stesso: se il problema era piano (1° o 2° grado) bisognava usare riga e compasso, se solido (3° o 4° grado) si doveva fare uso di un cerchio e di una parabola (comunque di due coniche), se supersolido (5° o 6° grado) di un cerchio e delle parabola cubica (parabola cartesiana). Aveva poi lasciato intendere che per equazioni di grado ancora più alto si dovesse fare uso di un cerchio e di una parabola di ordine superiore. E però, mentre aveva mostrato come si poteva costruire la parabola cubica, non aveva poi fornito alcun metodo costruttivo per curve o parabole di ordine superiore.

È facile comprendere come man mano che matematici si andassero convincendo della impossibilità di ritrovare formule per radicali che risolvessero le equazioni di grado superiore al 4°, il metodo della costruzione delle equazioni assumesse per loro una posizione sempre più centrale. Dal 1637 al 1750 i matematici di ogni parte d'Europa, in gara tra loro, ricercarono le curve più *semplici* (ossia di ordine più basso) per risolvere equazioni di ogni grado.

Con il suo *De Costructione aequationum* Giacinto De Cristofaro diede in merito un importante contributo facendo in molti casi meglio di Descartes e di Fermat[50]. Il suo metodo si faceva apprezzare non solo perché in esso intervenivano curve di ordine inferiore a quelle adoperate dai due matematici francesi, ma anche perché esso era in grado di far convergere in uno i due differenti approcci dei due scienziati francesi. Laddove, infatti, Descartes, privilegiando il punto di vista geometrico della questione, non aveva fornito le equazioni delle due curve che costruivano l'equazione data, e Fermat, viceversa, privilegiando

[50] Fermat affrontò la questione nell'opera *De Solutione Problematum Goemetricorum per curvas simplicissimas, et unicuique generis proprie convenientes. Dissertatio tripartita*, in *Varia Opera Matematica*, Tolosae, apud Johannem Pech, 1679.

il punto di vista algebrico, si era limitato unicamente a determinare dette equazioni, De Cristofaro aveva preso in considerazione entrambi gli aspetti della questione, partendo dalla determinazione delle equazioni delle due curve la cui intersezione avrebbe fornito le radici dell'equazione data per poi mostrare la reale costruzione geometrica di dette curve.

Così nel costruire un'equazione di quarto grado completa di ogni suo termine

$$f(x)=0 \qquad (1)$$

egli manipolava opportunamente il polinomio f(x) in modo che la (1) potesse mettersi nella forma

$$g(x)=h(x)$$

con g(x) polinomio di 4° grado, quadrato di un binomio, e h(x) polinomio di 2° grado. Uguagliava, infine, detti polinomi a una nuova incognita y^2, ottenendo due nuove equazioni

$$g(x)=y^2$$

$$h(x)=y^2 .$$

Estraendo la radice quadrata di ambo i membri di queste equazioni, otteneva le equazioni di due coniche

$$k(x)=0 \qquad\qquad h(x)=0$$

le ascisse dei punti di intersezioni delle quali fornivano le radici cercate.

De Cristofaro mostrava come si potesse far sì che dette coniche si riducessero sempre a un cerchio e ad una parabola, ritenute da Descartes le curve le *più semplici* possibili per la costruzione e procedeva quindi alla costruzione geometrica di dette curve che risultava molto veloce e agile ricavando egli direttamente dalle equazioni k(x)=0 e h(x)=0 coordinate del centro e raggio del cerchio nonché coordinate del vertice, equazione dell'asse e parametro della parabola. Egli aveva poi mostrato che analogamente si potevano costruire equazioni di più alto grado utilizzando come una delle curve sempre un cerchio e per l'altra una curva di opportuno ordine, come Descartes aveva preferito che si facesse, o facendo uso di due curve di opportuno ordine, cosa più vicina alla via seguita da Fermat. Era appunto nella scelta di queste curve che il metodo di De Cristofaro, pur non privo di qualche menda, appariva migliore di quello dei due scienziati francesi.

Apprezzato da Leibniz, che lo aveva recensito sugli *Acta eruritorum*, il *De constructione aequationum* procurò a De Cristofaro notorietà in Italia e in altri paesi oltremontani. Parole di compiacimento ebbero per lui Michelangelo Fardella e Domenico Guglielmini, mentre con una sua lettera, Bernard Fontanelle,

segretario dell'*Académie des Sciences* di Parigi, comunicò le espressioni di vivo apprezzamento con le quali i membri di quella illustre accademia avevano accolto la sua opera[51].

Il *De constructione* era indubbiamente un'opera di pregio dalla quale trasparivano le qualità di algebrista non comuni possedute dall'autore, capace di manipolare con assoluta familiarità le equazioni algebriche. Essa, tuttavia, non era esente dal difetto comune a tutte le altre opere sulla costruzione delle equazioni. Infatti, se è vero che mostrava metodi generali per scrivere le equazioni delle curve l'intersezione delle quali avrebbe dato le radici dell'equazione data, al di là dei casi ben noti relativi ad equazioni fino al 6° grado, non aveva mostrato alcun metodo per descrivere le curve rappresentate da quelle equazioni. Non è un caso che lo stesso De Cristofaro, consapevole di ciò, avesse deciso di scrivere un altro trattato, *Descriptio curvarum omnium generum* che però non ci è pervenuto forse perché mai pubblicato, e che fu al centro di un'aspra polemica con Bartolomeo Intieri, autore che di fatto affrontò e risolse brillantemente la questione.

4. Bartolomeo intieri e la polemica con Giacinto de Cristofaro

Bartolomeo Intieri nacque a Pistoia tra il 1678 e il 1680, ma fu napoletano d'adozione[52]. Assai giovane, infatti, si trasferì a Napoli dove fu prima, amministratore della famiglia Corsini, e poi agente mediceo per il regno con un rilevante appannaggio che, per decreto della corte di Spagna, gli fu conservato anche dopo l'abbandono di questa carica. La sua attività di matematico puro fu piuttosto breve, praticamente concentrata al periodo in cui diede alla luce le sue due opere *Ad nova arcana geometrica detegenda aditus*[53] e *Apollonius ac Serenus promotus*[54]. Allora Intieri aspirava alla cattedra di Matematica dell'Università di Napoli, cattedra che dal 1695 teneva Agostino Ariani, prima in qualità di *interino*, cioè senza concorso, e poi a partire dal 1705 a seguito di apposito concorso, in modo definitivo. Dopo questo periodo Intieri orientò la sua ricerca matematica verso l'economia e la tecnologia. Frutto di queste ricerche furono i due volumi *Nuova invenzione dei mulini a vento*[55], e *Della perfetta conservazione de'*

[51] Cfr. R. GATTO, *Giacinto De Cristofaro*, cit.

[52] A tutt'oggi manca uno studio autonomo su questo importante personaggio della vita civile e culturale napoletana. Notizie della sua vita e delle sue opere si possono ricavare in R. AJELLO, *Arcana juris. Diritto e politica nel Settecento italiano*, Napoli, Jovene, 1976, pp. 397-400 e in F. VENTURI, *Settecento riformatore*, v. I, *Da Muratori a Beccaria*, Torino, Einaudi, 1969.

[53] B. INTIERI, *Ad nova arcana geometrica detegenda aditus*, Benevento, ex Typ. Archiepiscopali, 1703.

[54] B. INTIERI, *Apollonius ac Serenus promotus*, Napoli, Sellitto, 1704.

[55] B. INTIERI, *Nuova invenzione dei mulini a vento*, Napoli, Mosca, 1717.

grani[56]. Egli, inoltre, ideò un modello economico di polizza per il gioco del lotto, perfezionò il *palorcio*, una sorta di teleferica destinata al trasporto di materiali nelle zone montagnose del territorio napoletano. Non di meno va menzionato il fatto che egli fece istituire nel 1754, finanziandola a proprie spese, una cattedra di Diritto commerciale, la prima di un'università italiana, che fu affidata ad Antonio Genovesi e che fondò uno studio per l'addestramento dei commercianti per conto della famiglia Rinuccini di Firenze.

Intieri fu una figura centrale della vita culturale e civile napoletana del Settecento. Durante la sua vita mantenne sempre una fitta rete di relazioni epistolari extraregnicole. Di particolare rilevanza è il carteggio che intrattenne con Antonio Magliabechi, bibliotecario del Granduca di Toscana[57] nel quale troviamo documentati numerosi avvenimenti relativi al periodo in cui egli si interessò di matematica. Nella prima lettera, datata primo gennaio 1704, dopo aver descritto al Magliabechi la sua opera *Ad nova arcana geometrica detegenda aditus* da poco uscita dai torchi, Intieri lo informava dell'incresciosa polemica intrapresa con Giacinto De Cristofaro di cui si è detto sopra:

> "[...] devo avvisarla che 6 o 7 mesi fa cominciò il signor Giacinto di Cristofaro a spacciar parola che stava facendo un trattato delle medesime curve e che avrebbe scoperte nuove e belle cose in geometria. Or che ha saputo che io l'ho date in luce si lamenta fortemente di me stesso e doppo avermi parlato molto risentitamente e con minacce di voler stampare contro di me, vedendo non mi poter movere ha cominciato a trattar con un pò più dolcemente, pregandomi a voler dare a far rifar una pagina del mio libro e nominarlo con dire che sapevo che il medesimo stava di presente meditando le stesse cose. Io gli ho promesso purché il medesimo fusse venuto alla presenza dell'eccellentissimo Signor Marchese per farli sapere ciò che si doveva in onor del libro stampato a spese del medesimo cavaliero. L'intenzione mia era di farle confessar ciò che in presenza diceva cioè che io era andato molte volte in sua casa ma che mai aveva parlato di queste cose né fattomi vedere alcuna sua carta o figura o minima cosa. Il medesimo sta ripugnando in ciò ed io, consigliato da molti amici che stimo sommamente non solo per la profonda letteratura ma anco per i molti favori che mi comportano, sto risoluto di fare cosa alcuna di nuovo e tanto maggiormente che il non abbastanza lodato signor Marchese di San Marco, il quale per sua somma bontà mi dispensa molte grazie non mi vuole permettere una tal cosa, affermando il medesimo avermi molte volte sentito dire, prima che io parlassi di voler stampare cosa alcuna, che il medesimo Cristofaro diceva d'aver trovato belle cose ma che non parlava di cosa alcuna forse per paura di non esser rubato de' suoi pensieri. Il medesimo Cristofaro va ora dicendo di voler stampar una lettera mia inviata allo stesso quando stavo in villa con quel signore nella quale dichiaro che avevo inteso dal medesimo che voleva dar in luce alcune cose intorno a questa materia. Io proprio

[56] B. INTIERI, *Della perfetta conservazione de' grani*, Napoli, 1735.

[57] Le lettere di Intieri a Magliabechi sono pubblicate in A QUONDAM-M. RAK (curatori), *Lettere dal Regno,* cit., v. II, pp. 701-717.

> me ne rido perché ciò non mi par d'alcun mio pregiudizio, imperocché non essendo l'argomento della materia che si tratta nuovo, ma tentato da molti e particolarmente tentato da Giovanni de Witt che ha fatto la descrizione della prima parabola, iperbola ed ellissi, dal quale per dir la verità ho avuto grandissimi lumi, come potrà Vostra Signoria conoscere dal mio libretto, era lecito anche a me esercitarmi sopra tal materia. La causa poi dell'essermi nella medesima materia esercitato è stato l'avermi esposto al concorso della cattedra di matematica"[58].

Purtroppo non abbiamo la versione del De Cristofaro il quale pure da anni era in corrispondenza col Magliabechi. Tra le lettere a noi pervenute c'è un vuoto riguardante il periodo compreso tra il primo maggio 1703 e il 17 novembre 1705. E questo non ci permette di giudicare se l'accusa di plagio da lui portata contro Intieri fosse fondata o meno. Resta da dire che in una lettera a Celestino Galiani De Cristofaro, manifestò il proposito di pubblicare questo suo trattato sotto forma di epistola, ma, probabilmente consigliato dal Galiani, non ne fece nulla.

> "Le tre lettere indirizzate alli Signori Galizia, Graziani, ed a V.P. Rev.ma sono di molto uso. Mentre la prima contiene il modo di abbassare l'equazione di quattro dimensioni a due, quando sia di natura riducibile, secondo la regola di Ludovico de' Ferrari nostro italiano, [...]. La seconda il modo di descrivere i cerchi infiniti geometricamente e con ciò tutte le curve di natura geometrica, e questo si è fatto in grazia del Sig. D. Paolo Doria che le vuole mecaniche, [...] la terza finalmente contiene il modo di poter l'uomo ben giudicare della filosofia, e che sia ella in se stessa, e quale appresso di noi la natura delle cose, ed è appunto quella stessa lettera che io molti anni sono scrissi a V.P.R.ma quando godeva la conversazione del Sig. Burnet costì, però migliorata assai di molte cose come vedrà a suo tempo"[59].

Delle tre lettere annunciate ne fu pubblicata soltanto una, quella *Al dottissimo sig. D. Nicolò Galizia Professore primario della Dottrina Canonica nei Regi Studii di questa Città*, datata 5 novembre 1712[60]. Il perché della mancata pubblicazione delle altre resta sconosciuto. Per la terza lettera si può pensare che sia stato il Galiani a dissuadere De Cristofaro dal pubblicarla ritenendo non più attuale nel 1720, epoca in cui le idee newtoniane anche in Italia stavano ri-

---

[58] A. QUONDAM-M. RAK, *Lettere dal Regno*, cit. n. 585, pp. 705-708.

[59] Cfr. R.GATTO-G.GERLA-F.PALLADINO, *Lettere di Giacinto de Cristofaro a Bernard Fontanelle e a Celestino Galiani*, "Annali dell'istituto e Museo di Storia delle Scienze", IX (1984), 1, pp. 66-93, n. 12, p. 92. Per quanto riguarda Celestino Galiani, figura molto importante della vita culturale napoletana del primo Settecento a cui va il merito di essere stato tra i principali artefici dell'introduzione de newtonianesimo a Napoli, cfr. F. NICOLINI, *Un grande educatore italiano. Celestino Galiani*, Napoli, F. Giannini e figli, 1951; V. FERRONE, *Scienza Natrura Religione*, Napoli, Jovene, 1982.

[60] G. DE CRISTOFARO, *Della dottrina dei triangoli*, Venezia, 1720., pp. 46-75. Notizie su Nicolò Galizia si trovanmo in F. NICOLINI, *Un grande educatore italiano,* cit..

velando la debolezza di alcuni aspetti della filosofia naturale cartesiana. Per la seconda si può pensare che egli l'avesse pubblicato a parte e prima che uscisse alle stampe la *Dottrina dei triangoli*, dal momento che in questo libro de Cristofaro cita il suo trattato, *Descriptio curvarum omnium generum et aequationum omnium generalis constructio* del quale, però, come detto, non abbiamo trovata traccia.

5. La costruzione delle curve secondo Bartolomeo Intieri

Il volume di Intieri, *Ad nova arcana geometrica detegenda aditus*, si inserisce in quel fortunato filone di studi che, sulla scorta di quanto avevano mostrato Descartes e Fermat[61], pose al centro delle attenzioni dei matematici lo studio delle curve come luoghi geometrici.

Il volume consta di tre *Epistole* indirizzate a tre differenti e illustri esponenti della vita civile e culturale napoletana. La prima *Epistola* è indirizzata a Domenico Juvenaci, Principe di Cellamare, e può distinguersi in due parti: una prima in cui Intieri espone un suo metodo originale per descrivere nel piano, a partire dalla parabola di equazione $y^2=ax$, tutte le successive parabole di equazione $y^n=ax^{n-1}$, e una seconda parte nella quale mostra come si possa ottenere la composizione dei luoghi geometrici rappresentati dalle suddette equazioni,

> "opus a nullis quidam antheac, ut sciam. – sottolineava l'autore – peractum omnibus vero summopere optatum"[62].

Noi procederemo qui ad una dettagliata analisi di questo trattato che mai è stato preso in considerazione dagli studiosi che, evidentemente, non hanno compreso che si trattava di un'opera originale ed importante nell'ambito della teoria della costruzione delle equazioni.

---

[61] Cfr. P. DE FERMAT, *Ad locos planos et solidos isagoge*, in *Varia Opera Matematica*, Tolosae, apud Johannem Pech, 1679, pp. 1-8.

[62] Cfr. *Ad nova arcana,* cit., *Mathematicarum disciplinarum amatoribus.*

BARTHOLOMÆI INTIERI FLORENTINI AD NOVA ARCANA GEOMETRICA DETEGENDA ADITUS

Ad Illuſtriſſ. & Excellentiſſ. Dominum

D. HIERONYMUM ONERUM CABANILIUM S. MARCI MARCHIONEM,

Ducem S. Johannis Rotundi, Rodi, S. Severi, & Candelari Dominum, e Comitibus Trojæ, & Montellæ, &c.

BENEVENTI, E' Typographia Archiepiſcopali.
Anno reparatæ ſalutis MDCCIII.

Superiorum permiſſu.

La prima epistola

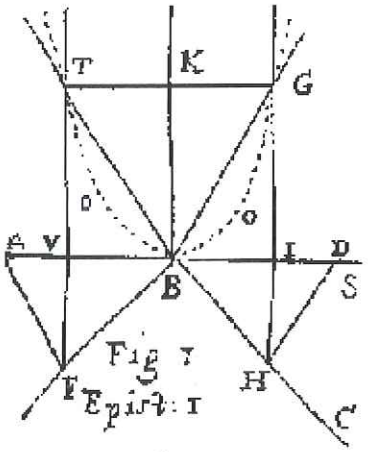


fig. 1

Intieri comincia col mostrare come la parabola di equazione $y^2=ax$, detta *prima parabola* o anche *parabola Apolloniana*, possa essere ottenuta come luogo del punto di intersezione di due rette che si muovono nel piano in modo opportuno.

Con riferimento alla fig. 1, la sua costruzione può così riassumersi. Si consideri il triangolo isoscele di base BH e lati uguali BI e IH; si prolunghi il lato BI a sinistra e a destra di I, rispettivamente verso i punti A e S, il lato BH verso il punto C ed, infine, il lato IH verso il punto G. Si consideri poi sulla retta AS, su cui giace il lato BI, un generico punto D ed il segmento ID. Si faccia muovere la semiretta HG nella direzione di BH, in modo che durante il moto si mantenga costantemente parallela a se stessa. Si ha che, mentre il punto H scorre su BC, contemporaneamente il punto I scorre sulla semiretta BS trascinando con sé il segmento ID. Si consideri, infine, la semiretta BG, libera di ruotare nel piano della figura intorno al punto B in modo tale, però, che nella sua rotazione si mantenga sempre parallela al segmento HD. Le semirette BG e HG si intersecano in un punto G che, in seguito al movimento della retta HIG nella direzione della retta AS, descrive la curva BOG.

Intieri dimostra che detta curva è la parabola di vertice B, che ha per parametro il segmento ID e per asse la semiretta BK parallela per B ad HG[63]. Essendo, infatti, le semirette BG e HD tra loro parallele, i triangoli DIH e BIG sono simili, per cui

$$ID : IH = BI : IG$$

e quindi, il rettangolo DIG è uguale al rettangolo BIH[64].

D'altra parte, essendo il triangolo BIH isoscele, si ha che BI=IH. Dunque il rettangolo BIH è un quadrato equivalente al rettangolo DIG, ossia

$$BI^2 = ID \cdot IG\ .$$

---

[63] Con analogo procedimento costruisce la curva simmetrica rispetto all'asse BK.

[64] Secondo i canoni classici dell'algebra geometrica il prodotto tra due segmenti è il rettangolo avente per lati i segmenti stessi. In questo caso il rettangolo BIH è quello di lati BI e IH, mentre il rettangolo DIG è quello di lati ID e IG. Si noti inoltre che Intieri usa il termine uguale alla maniera di Euclide, nel senso di uguale in superficie, ossia equivalente.

Ancora, essendo BI=GK, si ha che

$$GK^2 = ID \cdot IG$$

che esprime la proprietà della parabola secondo cui il quadrato costruito sull'applicata del punto G rispetto all'asse BK è uguale al rettangolo costruito sull'intercetta dello stesso G, sempre rispetto all'asse BK, e sul segmento dato ID[65].

Per mostrare come questo metodo si applichi iterativamente alla costruzione di tutte le parabole di ordine n (n>2), Intieri introduce alcune definizioni. Precisamente chiama: *direttrice* la semiretta BC da cui si origina la prima parabola, *descrivente* la semiretta HG che si muove nella direzione di BC mantenendosi sempre parallela a se stessa, *descrivente nella prima posizione* la semiretta HG quando coincide con la retta BK, *efficiente* la semiretta BG, *efficiente nella prima posizione* la semiretta BG quando coincide con la retta AS, *polo* il punto B fisso intorno al quale ruota l'efficiente BG, *intervallo* il lato retto ID di lunghezza costante.

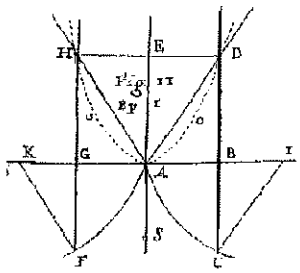


fig. 2

Premesso ciò, per costruire la *seconda parabola*, ossia la parabola cubica di equazione $y^3=ax^2$, assume per *direttrice* la *prima parabola* appena descritta, e ricorda che, come la proprietà fondamentale di questa parabola è che il quadrato dell'applicata rispetto all'asse BK di un qualsiasi punto G è uguale al rettangolo costruito sull'intercetta dello stesso punto G e sul parametro, ossia $BK^2=ID \cdot IG$, così quella della *seconda parabola* è che (fig. 2) il cubo dell'applicata del punto D rispetto all'asse AE è uguale al solido costruito sul quadrato dell'intercetta dello stesso D rispetto all'asse AE e il parametro, ovvero al solido costruito sul quadrato del segmento dato e l'intercetta, cioè:

$$DE^3 = BD^2 \cdot BI\ .$$

Con riferimento alla fig. 2, Intieri considera la parabola Apolloniana AC, di vertice A, diametro AB e parametro AS, e la retta CBD, ortogonale al diametro AB, la quale si muove in modo da restare costantemente ortogonale ad AB e in modo che, mentre il punto C descrive l'arco di parabola AC, il punto B scorra sulla semiretta AB trascinando con sé il segmento BI che si mantiene costantemente uguale ad AS. Considera, poi, la semiretta AD, libera di ruotare nel piano della figura intorno al punto A, in modo che nella sua rotazione si mantenga

[65] Seguendo Descartes, Intieri non introduce preliminarmente alcun sistema di riferimento, ma ne sceglie uno opportuno durante la sua trattazione. Come Descartes, chiama *applicate all'asse* le ascisse e *intercette* le ordinate.

sempre parallela al segmento CI. Le semirette AD e CD si intersecheranno nel punto D che, mentre CBD si muove del moto anzidetto, descrive la curva AOD.

Si tratta di una parabola di vertice A e asse la semiretta AE detta *seconda parabola*. Un qualsiasi suo punto D, infatti, verifica la condizione che il cubo costruito sulla sua applicata, rispetto all'asse AE (cioè DE^3) è uguale al solido costruito sul parametro BI e sul quadrato della sua intercetta, BD^2, oppure AE^2 (cioè $BI \cdot BD^2$). Ciò risulta immediatamente quando si osservi che, essendo le rette AD e CI tra loro parallele, i triangoli IBC e ABD sono simili, per cui

$$BI : CB = AB : BD \qquad (2)$$

e quindi

$$BI \cdot BD = CB \cdot AB\ . \qquad (3)$$

Moltiplicando ambo i membri di questa uguaglianza per BD, si ha

$$BI \cdot BD^2 = CB \cdot AB \cdot BD$$

e cioè il solido costruito su BI e sul quadrato di BD, è uguale al solido costruito su CB, AB e BD.

D'altra parte per la proprietà della prima parabola

$$CB^2 = AB \cdot AS$$

che, essendo BI uguale al parametro AS, potrà scriversi

$$CB^2 = AB \cdot BI$$

ossia

$$BI : CB = CB : AB$$

e, tenendo presente la (2), si avrà che BI, CB e AB sono in proporzione continua, cioè:

$$BI : CB = CB : AB = AB : BD$$

da cui si ricava che

$$AB^2 = CB \cdot BD$$

ed essendo per la (3) $CB = \dfrac{BI \cdot BD}{AB}$ si avrà

$$AB^2 = \frac{BI \cdot BD}{AB} \cdot BD$$

e quindi

$$AB^3 = BI \cdot BD^2$$

ovvero, tenendo conto che AB=DE, può anche scriversi

$$DE^3 = BI \cdot BD^2$$

come si doveva dimostrare[66].

Iterando questo procedimento, Intieri costruisce le infinite parabole di ordine n, fondando il suo ragionamento sull'assunzione che la parabola di equazione $y^{n+1}=ax^n$ è quella per cui la potenza di ordine n+1 di una qualunque applicata all'asse è uguale al solido costruito sulla potenza di ordine n dell'intercetta e sul parametro. A tale conclusione l'autore giunge avvalendosi del seguente ragionamento. Essendo, infatti, la prima parabola quella in cui il parametro sta all'applicata come la stessa applicata sta all'intercetta, ossia

$$BI : DE = DE : AE$$

e la seconda quella in cui il parametro sta all'applicata come il quadrato della stessa applicata sta al quadrato dell'intercetta, cioè

$$BI : DE = DE^2 : AE^2$$

l'n-esima parabola dovrà essere quella in cui il parametro sta all'applicata come la potenza di ordine n dell'applicata sta alla potenza di ordine n dell'intercetta, ossia quella per la quale vale la relazione

---

[66] Analogamente si costruisce l'arco di parabola AOH simmetrico di AOD rispetto all'asse AE. Si prolunga il diametro AB in direzione del punto G e si considera come direttrice la prima parabola AF di vertice A e parametro AS e come descrivente la semiretta FGH, che nel suo moto trascina i punti F e K, rispettivamente sulla parabola AF e sulla retta GAB facendo muovere il segmento GK in modo tale che risulti sempre parallelo a se stesso e in modo tale che GK=AS. Si considera, poi, una semiretta uscente dal punto A, libera di ruotare nel piano della figura intorno allo stesso punto A, mantenendosi, però, parallela al segmento FK. Il punto di intersezione H della descrivente FGH e dell'Efficiente AH descriverà la parabola AOH. Allora è possibile dimostrare che tutte le parallele all'Efficiente nella prima posizione saranno divise in due parti dalla retta AE ed essendo il cubo costruito sull'applicata del punto H, rispetto all'asse AE, uguale a quello costruito sull'applicata del punto D, si avrà ED=EH. Inoltre AE sarà l'asse della seconda parabola AOH.

$$BI : DE = DE^n : AE^n$$

da cui la potenza di ordine n+1 dell'applicata uguaglierà la potenza di ordine n dell'intercetta per il segmento dato, ossia

$$DE^{n+1} = BI \cdot AE^n .$$

La descrizione di questa curva può allora essere fatta seguendo lo stesso ragionamento usato per la seconda parabola, purché si assuma nella fig. 2 come *direttrice* AC la parabola di ordine n-1 di vertice A e di diametro AB appena descritta, nella quale la potenza di ordine n di una sua applicata sia uguale al solido costruito sulla potenza di ordine n-1 del parametro e sull'intercetta. Il punto D, intersezione della *descrivente* CBD, e dell'*efficiente* AD, mentre CD si muove parallelamente ad AS e in modo che C percorra la parabola AC, descrive la n-esima parabola di vertice A, asse AE e parametro AS. Infatti è verificata la proprietà di questa curva che la potenza di ordine n+1 dell'applicata rispetto all'asse AE di un suo qualsiasi punto, è uguale al solido costruito sulla potenza di ordine n dell'intercetta AE, oppure BD, e sull'intervallo BI.

La dimostrazione di ciò segue dalla similitudine dei triangoli IBC e ABD per cui si ha che

$$BI : CB = AB : BD$$

e quindi che

$$BI^n : CB^n = AB^n : BD^n .$$

E poiché per la proprietà della (n-1)-esima parabola AC si ha che

$$CB^n = BI^{n-1} \cdot AB$$

dove, però, BI non è da intendersi più come il parametro, ma come l'intercetta del punto C rispetto all'asse AB, mentre AB è il parametro. La parabola AC è infatti descritta dal punto C che è l'intersezione della *descrivente* CBD e dell'*efficiente* CI, con I punto fisso intorno a cui ruota CI, laddove nella descrizione della parabola n-1 esima tale ruolo era svolto dal punto A intorno al quale ruotava la semiretta AD. Allora, facendo un'opportuna sostituzione, si avrà

$$AB^n \cdot BI^{n-1} \cdot AB = BI^n \cdot BD^n$$

vale a dire

$$AB^{n+1}=BI\cdot BD^n$$

ed essendo AB=ED e BD=AE si avrà

$$ED^{n+1}=BI\cdot AE^{n+1}\ .$$

Prima di procedere oltre Intieri espone un altro suo metodo per descrivere queste stesse curve. Considera, nella fig. 3, la prima parabola AC, di vertice A, asse AB e parametro AS e, poi, l'angolo retto $D\hat{A}C$, libero di ruotare nel piano della figura intorno al vertice A e la retta CBD che si muove mantenendosi costantemente perpendicolare all'asse AB in modo tale che il punto C si sposti sulla parabola AC. In tale movimento il punto C costringerà il lato AC a ruotare e di conseguenza anche l'altro lato AD ruoterà e il punto D, intersezione di CBD e di AD descriverà la curva AOD che sarà proprio la *seconda parabola* di vertice A e di asse AE.

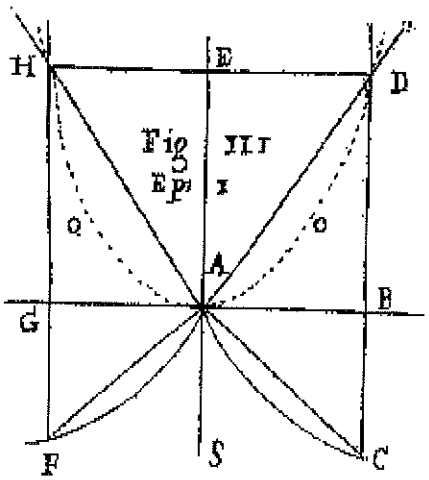


fig. 3

La curva così generata, infatti, gode della proprietà che il cubo di una qualunque delle applicate, ED, è uguale al solido costruito sul quadrato dell'intercetta AE e sul parametro AS. La dimostrazione parte dalla considerazione che CB, AB e BD sono in proporzione continua, ossia

$$CB : AB = AB : BD \qquad (4)$$

per cui lo sono anche i loro quadrati, ossia

$$CB^2 : AB^2 = AB^2 : BD^2\ .$$

Ma essendo per la proprietà della parabola apolloniana

$$CB^2=AB\cdot AS$$

si avrà

$$(AB\cdot AS) : AB^2 = AB^2 : BD^2$$

da cui

$$AB^3=AS\cdot BD^2$$

ed essendo AB=ED e BD =AE, si avrà infine

$$ED^3=AS\cdot AE^2 .$$

Con lo stesso metodo sarà descritta anche la parabola di ordine n. L'unica cosa, però, che varierà sarà il ruolo della *direttrice* AC, che in questo caso sarà la parabola di ordine (n-1). Dall'intersezione, poi, di AD e CBD si otterrà la curva AOD godente della proprietà che la potenza di ordine (n+1) delle applicate sarà uguale alla figura solida costruita sulla potenza di ordine n dell'intercetta e sul parametro AS. La dimostrazione è del tutto analoga alla precedente e procede dalla (4) e dal fatto che anche le potenze n-esime conservano la stessa proporzione, ossia

$$CB^n : AB^n = AB^n : BD^n .$$

Allora, per la proprietà della parabola (n-1)-esima , secondo cui

$$CB^n=AB^{n-1}\cdot AS$$

si avrà

$$(AB^{n-1}\cdot AS) : AB^n = AB^n : BD^n$$

e quindi

$$AB^{n+1}=AS\cdot BD^n .$$

Ed essendo AB=ED e BD=AE si avrà alla fine

$$ED^{n+1}=AS\cdot AE^n .$$

Intieri considerava questo secondo metodo inferiore al precedente offrendo esso alcune difficoltà quando della parabola da descrivere invece dell'asse è dato un qualsiasi diametro, e quando la parabola è riferita a un sistema di assi obliqui e non ortogonali. E tuttavia egli mostra una via per superare queste difficoltà cominciando dal caso di una parabola riferita ad un sistema di assi obliqui della quale sia dato l'asse.

Con riferimento alla fig. 4 descrive intorno al diametro AE la seconda parabola avente vertice A parametro AS e applicate inclinate secondo un dato an-

golo S Â B, la cui proprietà fondamentale è che il cubo di una qualunque delle applicate è uguale al solido costruito sul quadrato dell'intercetta e sul parametro. Per fare ciò conduce dal punto A la retta AB, tale che formi con AE l'angolo S Â B e traccia la prima parabola, AC, di vertice A, parametro AS, diametro AB e applicate, rispetto a quest'ultimo, inclinate secondo un angolo uguale a S Â B o al suo complementare. Dato un qualsiasi altro punto C della suddetta parabola e la sua applicata CB rispetto al diametro AB si ha che continua a valere la (3) nella quale, si potrà dimostrare che il punto D è un punto della seconda parabola, AOD. Analogamente un qualsiasi altro punto C appartenente alla prima parabola, permetterà di tracciare proprio la seconda parabola che si voleva determinare. è dato un diametro qualsiasi distinto dall'asse e la stessa parabola è riferita ad un sistema di assi obliqui egli fa vedere come questo caso possa essere ricondotto a quello precedente.

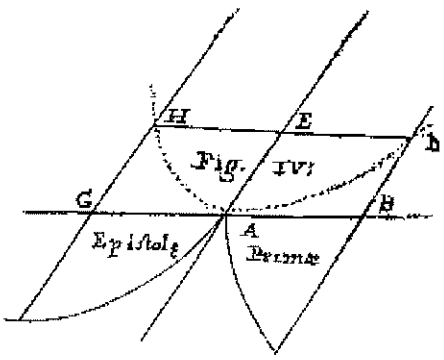


fig. 4

Descritta, infatti, la prima parabola di diametro AB, parametro AS (fig. 5) e applicate che formano con AC un determinato angolo S Â B, Intieri considera la retta AD perpendicolare per A ad AC e innalza dal punto B la parallela ad AC. Questa interseca AD nel punto D. Essendo l'angolo S Â B noto, noti saranno anche gli angoli B Â D e A B̂ D. D'altra parte anche il lato AB è noto, per cui saranno noti tutti gli altri elementi del triangolo ABD. Considerato poi il punto medio I di BD, preso AG=BI=ID, Intieri conduce dal punto G la semiretta parallela a BD che interseca BD in E. Assume quindi su di essa il punto medio F di GF, tale che GF=FE, e determina su questa retta un segmento FO, terzo proporzionale tra FG=FE ed AE, tale cioè che

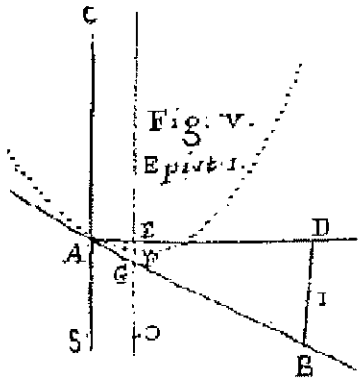


fig. 5

$$FE : FO = FO : AE$$

da cui

$$FO^2=FE\cdot AE\ .$$

Il punto F così determinato è il vertice della parabola, la retta per FE è l'asse, e FO è il parametro. Si è così ricaduti nel caso precedente avendo una parabola di dato l'asse riferita ad un sistema di assi obliqui. Dunque, la dimostrazione che questa è la parabola cercata ricalca quella data precedentemente.

A questo punto Intieri passa allo studio dei luoghi, cominciando da quelli la cui equazione algebrica è costituita da due soli termini dei quali l'uno è una certa potenza di una delle due incognite, e l'altro è il prodotto di una data potenza dell'altra incognita per un coefficiente noto, cioè

$$x^n=a^{n-m}y^m \quad (m<n)\ .$$

Egli parte con la costruzione del luogo geometrico rappresentato dall'equazione

$$x^3=ay^2$$

fissando un opportuno sistema di riferimento. Infatti dice:

> "Supposito initio quantitatis indeterminatae x puncto A (vide figuram 2 hujus epistolae) ita, ut eadem haec quantitas x sese estendere intelligatur ab A versus B: quantitas vero indeterminata y, supra hanc in dato angulo ABD exurgat"[67].

Dunque, con riferimento alla fig. 2, Intieri assume il punto A come origine di un riferimento di assi obliqui formanti tra loro un certo angolo $E\hat{A}D=A\hat{B}D$ del quale il lato AB è l'asse delle ascisse e il lato AE quello delle ordinate. Posto x=AB, y=AE e AS=a, considera, a partire dal punto E, la retta parallela ad AB che incontra nel punto D la retta passante per B parallela ad AE. Ricorre, poi, alla proprietà della parabola AOD, secondo cui il cubo delle applicate ED=AB, è uguale al solido costruito sul quadrato di AE=BD e sul parametro AS, ossia in formule

$$AB^3=AE^2\cdot AS$$

per cui facendo le opportune sostituzioni ottiene l'equazione data

$$x^3=ay^2\ .$$

Dunque il luogo rappresentato dalla curva AOD è la seconda parabola di vertice A e diametro AE.

Iterando questo procedimento Intieri costruisce, servendosi della parabola di ordine (n-1), il luogo geometrico rappresentato dall'equazione

---

[67] *Ibid.*, p. 17.

$$x^n = ay^{n-1} .$$

Ma poiché a questo stesso genere di luogo appartiene anche la parabola di equazione

$$x^n = a^{n-m}y^m \quad (n>m) .$$

Intieri fa vedere come questa si possa costruire facilmente. Con riferimento alla fig. 2, assunta come *direttrice* AC la parabola di ordine (m-1), per la quale la potenza di ordine m di una qualunque delle applicate è uguale al solido costruito sulla potenza di ordine (m-1) dell'intercetta e sul parametro, non è difficile far vedere che la parabola AOD è il luogo richiesto. Preso, infatti, un qualsiasi punto D come appare nella figura, essendo simili i triangoli CBI e ABD, si avrà

$$AB : BD = BI : CB$$

che, essendo AB=x, BD=AE=y e BI=AS=a, si potrà scrivere

$$x : y = a : CB$$

da cui

$$CB = \frac{ay}{x} .$$

D'altra parte, per la proprietà della parabola di ordine (m-1)

$$CB^m = AB^{m-1} \cdot BI = x^{m-1} \circ$$

e quindi

$$\frac{a^m y^m}{x^m} = x^{m-1}a .$$

Ossia

$$x^{2m-1} = a^{m-1}y^m$$

che, posto n=2m-1, diventa

$$x^n = a^{n-m}y^m .$$

Analogamente, procedendo oltre, Intieri fa osservare che allo stesso genere di luogo geometrico rappresentato dall'equazione

$$x^n = ay^{n-1}$$

appartiene altresì la parabola di equazione

$$x^n=a^{n-1}y$$

per la cui descrizione rimanda alla *Terza Epistola.*

A questo punto considera il caso particolare di n=7, ossia l'equazione di settimo grado

$$x^7=ay^6$$

per costruire la quale si serve della *sesta parabola* precedentemente descritta. Fa poi osservare che a questo stesso genere di luogo appartengono altre quattro equazioni

$$x^7=a^2y^5 \qquad x^7=a^3y^4 \qquad x^7=a^4y^3 \qquad x^7=a^5y^2 \qquad x^7=a^6y\,.$$

Per la costruzione delle ultime tre Intieri rimanda alla *Terza Epistola.* Per quanto riguarda le prime due invece procede al seguente modo. Data l'equazione $x^7=a^2y^5$, con riferimento alla fig. 2, nella quale si assume come *direttrice* AC la *quarta parabola* di equazione $x^5=a^3y^2$, si pone AB=x, BD=y e BI=a. Per la similitudine dei triangoli ABD e CBI, si ha

$$CB=\frac{ay}{x}$$

mentre per la proprietà della quarta parabola si ha che

$$CB^5=AB^2\cdot BI^3\,.$$

Ossia

$$\frac{a^5y^5}{x^5}=x^2a^3$$

e quindi

$$x^7=a^2y^5$$

che è l'equazione data[68].

Questo metodo, secondo l'autore, può essere usato per descrivere tutte le parabole di ordine qualunque rappresentate da equazioni incomplete che hanno solo due termini.

Passando all'esame delle equazioni con più di due termini Intieri comincia col considerare il luogo rappresentato dall'equazione

$$x^3-2bxy=ay^2 .$$

Traccia, a partire dal punto A (fig. 6), in direzione del punto I, una retta orizzontale ABI, e, a partire dal punto B una retta BD ad essa perpendicolare. Quindi dal punto A conduce una retta parallela a BD e perpendicolare ad ABI, sulla quale prende un punto M, tale che AM=b. Considera poi la retta per M parallela ad ABI la quale interseca la retta BD nel punto Q. Traccia infine la *prima parabola* VAC, di vertice V, diametro VQ, parametro BI, le cui applicate, rispetto al diametro VQ, sono i segmenti CQ. Pone AB=x, BD=y e BI=a e, per la proprietà della prima parabola, ricava che $MV=\frac{b^2}{a}$, con a parametro. Considera quindi VAC come *direttrice* e, dalla intersezione della *descrivente* CBQ e dell'*efficiente* AD, ottiene la curva cercata AOD. Considerato su quest'ultima un punto D qualsiasi, per la similitudine dei triangoli BIC e BAD ha che

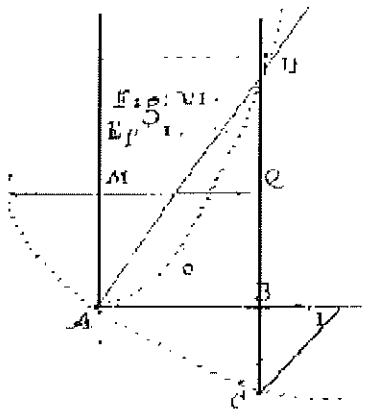


fig. 6

$$BI : CB = AB : BD$$

da cui

$$CB=\frac{BI\cdot BD}{AB}=\frac{ay}{x} .$$

[68] Per la costruzione dell'equazione $x^7=a^3y^4$ si assume, invece, come *direttrice* AC la terza parabola (fig. 2) e, procedendo allo stesso modo di prima si dimostra che e che $CB=\frac{ay}{x}$, e che essendo $CB^4=BI\cdot AB^3$, ossia $\frac{a^4y^4}{x^4}=ax^3$, si ottiene $x^7=a^3y^4$

D'altra parte, poiché

$$CQ=CB+BQ=CB+AM=\frac{ay}{x}+b$$

si ha che

$$CQ^2=\frac{a^2y^2}{x^2}+\frac{2aby}{x}+b^2 \qquad (4)$$

ma CQ è l'applicata rispetto al diametro VQ della prima parabola VAC, per cui il suo quadrato è uguale al rettangolo costruito sul parametro e sull'intercetta VQ, cioè

$$CQ^2=VQ\cdot BI=a\cdot\left(\frac{b^2}{a}+x\right)=b^2+ax\,. \qquad (5)$$

Confrontando (4) e (5) si ha allora

$$\frac{a^2y^2}{x^2}+\frac{2aby}{x}+b^2=b^2+ax\,.$$

Ossia

$$x^3-2bxy=ay^2\,.$$

Intieri si propone quindi di costruire il luogo geometrico rappresentato dall'equazione

$$by^2=ax^2-x^3$$

e lo fa assumendo nella fig. 7 un riferimento con origine il punto A, asse delle ascisse la retta ABV, e asse delle ordinate la retta applicata in B e perpendicolare ad ABV. Assume, poi, e traccia la prima parabola VCE, di vertice V, diametro VA e parametro BI=b. A tale parabola dà il ruolo di *direttrice*, ad una delle applicate, CBD, quello di *descrivente* e alla retta AD quello di *efficiente*.

Dall'intersezione di CBD e di AD si determina la curva ADGV, che è il luogo cercato. Se si prende un qualsiasi punto D su ADGV, essendo AB=x, BD=y, BI=b e VA=a, si avrà, dalla similitudine dei triangoli BCI e ABD, che

$$BI : CB = AB : BD$$

da cui

$$CB = \frac{BI \cdot BD}{AB} = \frac{by}{x} .$$

D'altra parte, essendo VB=VA-AB, sarà

$$VB=a-x$$

e, poiché

$$CB^2 = \frac{b^2y^2}{x^2} = BI \cdot VB = b(a-x)$$

si ha

$$\frac{b^2y^2}{x^2} = ba-bx$$

che, ridotta a forma canonica, fornisce l'equazione data

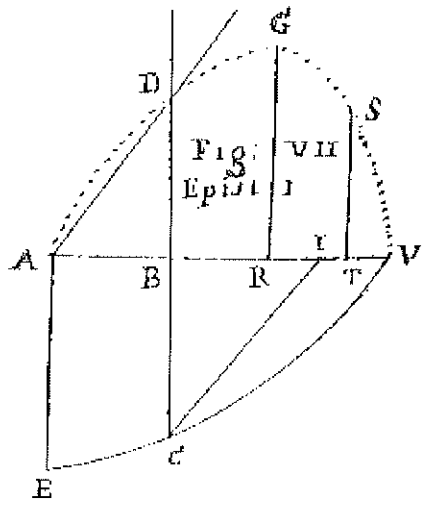


fig. 7

$$by^2 = ax^2 - x^3 .$$

Intieri afferma che la proprietà di questa curva è simile alla proprietà della parabola Apolloniana dimostrata da Pappo nell'ultima proposizione del Libro IV delle *Collezioni Matematiche*[69]. L'unica differenza consiste nel fatto che, mentre lì si ragionava nel piano, qui ogni considerazione è fatta nello spazio.

Non vi è dubbio che la curva descritta ADGV sia proprio quella cercata. Infatti, preso su di essa un qualsiasi punto D e condotto a partire da esso un segmento CD ortogonale ad AB, il solido costruito sul quadrato di AB e sul parametro VB è uguale al solido costruito sul quadrato di BD e sul parametro BI.

Di questo asserto, comunque, Intieri fornisce una seconda dimostrazione. Essendo i triangoli ABD e BCI simili, si ha che

$$BI : CB = AB : BD$$

ovvero

$$BI^2 : CB^2 = AB^2 : BD^2 .$$

[69] *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones a Federico Commandino Urbinate in Latinum Conversae et Commentarijs illustratae*, Bononiae, Ex Typographia Haerdum de Ducijs, 1660, p. 112, Theorema XXVI, Propositio XLIII: «Sit recta linea AB positione, et magnitudine data, et ad rectos angulos ipsa CD. Sit autem rectangulum ACB aequale ei quod data recta linea, ex CD continetur. Dico punctum D positione parabolam contingere".

E poiché $CB^2 = BI \cdot VB$, segue che

$$BI^2 : (BI \cdot VB) = AB^2 : BD^2$$

da cui

$$AB^2 \cdot VB = BI \cdot BD^2 .$$

Qui l'autore confessa di non aver avuto tempo per stabilire con certezza che la curva ADGV è proprio la *seconda parabola*, anche se ci sono molti indizi che sembrano suggerirglielo. Osserva, infatti, che se al posto della prima parabola VCE avesse considerato una retta, la curva generata ADGV sarebbe stata proprio la *prima parabola* e sarebbe risultata evidente la predetta proprietà di Pappo.

Considerato, infatti, nella fig. 8 un triangolo isoscele VEA, assunta come *descrivente* la retta CBD, che si muove mantenendosi costantemente parallela al lato EA in modo che C scorra sul lato VE, preso come *polo* il punto A, come *efficiente* la semiretta AD e come *intervallo* il segmento BI, Intieri fa vedere che la curva descritta dall'intersezione della *descrivente* e dell'*efficiente* è tale che, preso su di essa un qualsiasi punto D e condotta per esso la retta BD parallela ad EA, si ha che il rettangolo costruito sull'intercetta AB e su VB è uguale al rettangolo costruito sull'intervallo BI e su BD.

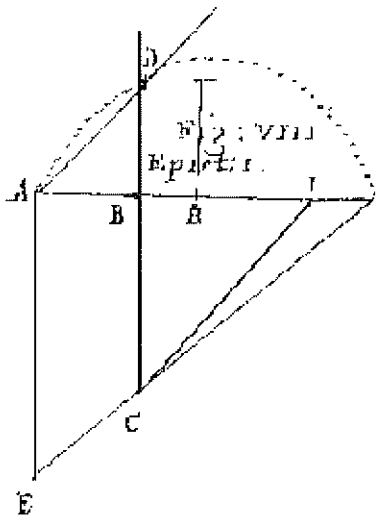


fig. 8

La dimostrazione procede allo stesso modo di quella riportata per la curva precedente. Infatti, essendo simili i triangoli ABD e BCI, si ha che

$$AB : CB = BI : CB .$$

Cioè

$$AB \cdot CB = B \cdot BI$$

che, essendo il triangolo VEA isoscele, potrà scriversi

$$AB \cdot VB = BD \cdot BI$$

relazione che esprime il fatto che rettangolo ABC, ovvero il rettangolo ABV, è equivalente al rettangolo IBD.

A questo punto Intieri fa osservare che non è necessario imporre la condizione che l'angolo $E\hat{A}V$ deve essere retto, cosa fatta da Pappo e tutti gli altri autori che avevano trattato la questione. Se, infatti, sulla parabola ADGV si conduce una qualsiasi retta VA, e se da qualsiasi punto D di tale curva si conduce il diametro, il rettangolo ABV sarà uguale al rettangolo costruito su BD e sul parametro BI. Se allora si assume nella fig. 7 come direttrice la curva VCE tale che il cubo di qualunque applicata è uguale al solido costruito sul quadrato del parametro e sull'intercetta, sarà descritta la curva ADGV in cui il *planoplanum*, cioè la figura costruita sul cubo di AB e su VB, è uguale al *planoplano*, cioè alla figura costruita sul cubo di BD e sul parametro BI. Essendo, infatti, simili i triangoli ABD e BCI, risulta che

$$BI : CB = AB : BD$$

da cui si ha anche che

$$CB^3 \cdot AB^3 = BD^3 \cdot BI^3$$

e poiché $CB^3 = VB \cdot BI^2$, sostituendo si ha

$$AB^3 \cdot VB = BD^3 \cdot BI .$$

Analogamente, se la curva *direttrice* VCE è tale che la potenza di ordine n dell'applicata è uguale al solido costruito sulla potenza di ordine n-1 del parametro e sull'intercetta, allora si ha che il solido costruito sulla potenza di ordine n di AB e su VB è uguale al solido costruito sulla potenza di ordine n di BD e sul parametro.

Dall'osservazione di queste proprietà Intieri ricava un metodo per la determinazione dei punti di minimo e di massimo delle curve, a suo dire, più semplice di quello esposto dal Fermat[70].

---

[70] Cfr. P. DE FERMAT, *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, in P. DE FERMAT, *Varia Opera Mathematica*, cit., pp. 63-73. Fermat aveva risolto precisamente il problema di determinare su un segmento AC di lunghezza B un punto E tale che il rettangolo AEC (ossia il rettangolo avente dimensioni AE ed EC) fosse uguale a Z (con Z minore dell'area del rettangolo massimo). Dunque, posto, come fa Fermat (Fermat indica, alla maniera di Viète, con vocali maiuscole le incognite e con consonanti maiuscole i coefficienti) A=AE, sarà Z=A(B-A), ossia $Z=AB-A^2$ (*) Poiché questa è un'equazione "anceps", ammette cioè due soluzioni distinte, detta $E \neq A$ la seconda radice, deve valere anche la relazione Z=E(B-E), cioè $Z=EB-E^2$ (**) Dal confrontando delle (*) e (**) si ottiene facilmente $B=\frac{A^2-E^2}{A-E}=A+E$. Fermat afferma che se si fa crescere

Data la retta VA della fig. 8, si vuole determinare un punto I tale che sia massimo il rettangolo costruito su AI e su IV. Un problema che era stato risolto già da Euclide che, nella proposizione 27 del VI libro degli *Elementi* aveva dimostrato che il massimo rettangolo richiesto è il quadrato costruito sulla metà di VA[71]. Intieri accennava al fatto che detto problema poteva essere risolto facendo uso di una semicirconferenza senza tuttavia specificarne il modo. Probabilmente egli pensava alla circonferenza avente diametro la retta VA ed alla circostanza, specificata dopo, che il massimo rettangolo sarebbe stato quello avente vertice nel punto della semicirconferenza tale che la retta parallela a VA tracciata da esso risultasse tangente alla circonferenza. Tale punto evidentemente è quello appartenente alla perpendicolare dal centro della circonferenza nel qual caso I è il centro della semicirconferenza e, dunque, il massimo rettangolo, avendo per lati due raggi, è il quadrato avente lato la metà di VA.

Se si vuole determinare il massimo della seconda parabola, con riferimento alla fig. 7, bisogna determinare un punto G della curva ADV tale che tracciata la perpendicolare GR a VA, GR risulti massimo. Ciò, per la proprietà della parabola cubica, equivale a determinare su VA un punto R tale che risulti massimo $AR^2 \cdot RV$ cioè risulti massimo il solido costruito sul quadrato di AR e su RV.

Se, invece, si vuole trovare il punto di massimo della terza parabola, il punto R di VA dovrà essere tale che $AR^3 \cdot RV$ sia massimo. E così di seguito. Ma come procedere alla determinazione di G e quindi di R soddisfacente le condizioni sopra dette?

Sia la curva AGV della fig. 7 la seconda parabola. Per la proprietà di questa curva, condotta da un suo qualsiasi punto una retta GR che formi un angolo qualsiasi con VA, il solido costituito dal quadrato di AR e da RV è uguale al solido costituito dal quadrato di GR e dal segmento dato BI, cioè

$$AR^2 \cdot RV = GR^2 \cdot BI \,. \qquad (6)$$

Si vuole determinare un punto G in modo tale che GR sia massima, ossia tale che la parallela a VA passante per G cada tutta al di fuori della curva, ovvero sia ad essa tangente.

Intieri risolve questo problema con metodo analitico e suppone che GR sia massima. Pone VA= a, BI=b, AR=x, per cui RV=VA – AR=a-x. La (6) allora può essere scritta

---

Z la differenza A-E decresce fino a divenire uguale a 0 quando Z è massimo. In tal caso, allora, A=E e B=2A, ovvero A=B/2.

[71] Così esattamente recita la proposizione 27 del VI libro degli *Elementi*: "Di tutti i parallelogrammi applicati ad una stessa retta e che siano mancanti di parallelogrammi simili e similmente disposti rispetto a quello descritto sulla metà della retta, è massimo il parallelogramma che è applicato alla metà della retta ed è simile al parallelogrammo mancante.", cfr. EUCLIDE, *Gli Elementi*, a cura di A. Frajese e L. Maccioni, Torino, Utet, 1988.

$$x^2(a-x)=b\cdot GR^2$$

da cui

$$GR^2=\frac{x^2(a-x)}{b} .$$

Poiché GR è massima, se si prende un qualsiasi altro punto D della curva e si traccia la parallela BD a GR sarà BD<GR. Allora, posto BR=y, sarà AB=x – y, VB=a+y – x, e, per la stessa proprietà dalla curva $AB^2\cdot VB=BI\cdot BD^2$, ovvero

$$BD^2=\frac{(x-y)^2\cdot(a-x+y)}{b} .$$

E dovendo essere $BD^2<GR^2$, sarà

$$\frac{(x-y)^2\cdot(a-x+y)}{b}<\frac{x^2(a-x)}{b}$$

da cui si ricava che

$$2ax+3xy<ay+3x^2+y^2$$

e, a maggior ragione,

$$2ax+3xy<ay+3x^2+y^2-(ay+y^2) .$$

Cioè

$$2ax+3xy<3x^2$$

e quindi

$$2a+3y<3x .$$

Intieri fa notare che deve essere necessariamente $3x\leq 2a$. Se, infatti, fosse $2a<3x$, per 3y molto piccolo potrebbe accadere che $2a+3y<3x$. Se $3x=2a$, in ogni caso, per quanto piccolo sia y, si ha $2a+3y>3x$.

> "Unde si dempta quantitate 3y fiat 2a aequalis 3x – scrive Intieri – habebitur x=2a diu: per 3"[72]

[72] *Ibid.*, p. 27.

come dire che, fatto tendere y a 0 (soppressa la y), si ha che 2a=3x e quindi $x=\frac{3}{2}$.

Allora Intieri conclude che se R divide VA in modo tale che AR sia i due terzi di VA, GR sarà massima, e massimo sarà il solido costruito sul quadrato di AR e su RV, la qual cosa

> "a multis demonstratum est, novissime vero, simplicissima, atque omnium elegantissima methodo ab Antonio Monfortio, Viro omnium virtutum genere ornatissimo, nullique in Mathematicis secundo"[73].

La stessa cosa accade se la curva ADGV è la parabola di terzo, di quarto o ancora di più alto grado.

Ora Intieri era in grado di determinare analiticamente il punto R del segmento VA tale che il rettangolo di lati AR e RV sia massimo.

Posto

$$VA=a \qquad AR=x$$

dove R è il punto di VA che si deve determinare, sarà

$$RV=a-x$$

e il rettangolo di lati AR e RV avrà area

$$x(a-x)=ax-x^2 .$$

Se, invece si pone

$$AR=x+y$$

in corrispondenza si avrà

$$RV=a-x-y$$

per cui il rettangolo suddetto avrà area

$$(x+y)(a-x-y)=ax+ay-x^2-2xy-y^2 .$$

Poiché si vuole che questa area sia massima dovrà essere

---

[73] *Ibid.*, p. 28. Qui Intieri si riferisce al matematico napoletano Antonio Monforte e al *De Problematum determinatione*, cit.

$$ax-x^2=ax+ay-x^2-2xy-y^2$$

dalla quale fatte le dovute semplificazioni e eliminato y^2 si ottiene

$$ay-2xy=0$$

ovvero

$$a=2x$$

e quindi

$$x=\frac{a}{2} .$$

Intieri non dice perché bisogna eliminare il termine y^2.

A conclusione di questa epistola Intieri metteva in evidenza il fatto che la descrizione di queste parabole poteva essere di grande aiuto nella costruzione delle equazioni. Diceva che molti autori se ne erano serviti per costruire le equazioni senza far vedere il modo in cui possono essere descritte. Intieri mostrava qui il metodo di Menecmo per inserire due medie proporzionali tra due grandezze date, a e b, mediante l'intersezione di un'iperbole e di una parabola. Considerata (fig. 9) una qualsiasi retta AE, si descriva la *seconda parabola* ADS, di vertice A, parametro b e asse la retta AE. Poi dal punto A si conduca la retta perpendicolare all'asse AE sulla quale si consideri un punto B tale che AB=a. Da B si tracci la retta parallela all'asse AE, e si stacchi su di essa il segmento BT=AB. Le rette per AB e AE si assumano come asintoti di un'*iperbole apolloniana* oDo descritta dal punto T. Questa iperbole intersecherà la *seconda parabola* ADS nel punto D: i segmenti ED e DC staccati rispettivamente sulla parallela ad AB e AE sono le medie proporzionali cercate.

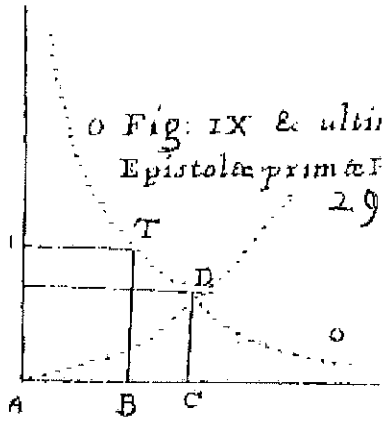


fig. 9

Intieri non fornisce la dimostrazione di questo asserto, ma non è difficile constatare che essendo D un punto della parabola vale la relazione $DC^2=a\cdot AC$, ossia $DC^2=a\cdot AE$ e quindi

$$a:DC=DC:ED .$$

D'altra parte, essendo D anche punto dell'iperbole, vale la relazione

$$ED \cdot DC = a \cdot b,$$

e quindi

$$a:DC = ED:b\ .$$

Ne segue allora

$$a:DC = DC:ED = ED:b\ .$$

Fin qui la *Prima Epistola*.

La seconda Epistola

Nella seconda *Epistola*, indirizzata a Didaco Vincenzo Vidania, Cappellano Maggiore dell'Università di Napoli, Intieri mostra un metodo per descrivere nel piano, a partire dall'*iperbole apolloniana*, le infinite iperboli e le infinite ellissi di ordine superiore. Fa poi vedere come, con lo stesso metodo, si possano ricavare anche le principali proprietà di queste curve, si possano costruire i luoghi geometrici rappresentati da equazioni costituite da due o più termini, e infine si possano costruire le equazioni di 5° e 6° grado facendo uso di un cerchio e di un'iperbole cubica.

Come aveva fatto nella precedente *Epistola* per la parabola, Intieri, comincia col mostrare la generazione della *prima iperbole*. Considera (fig. 10) due rette FB e KL che si intersecano in un punto A secondo un angolo qualsiasi e conduce, da un generico punto K della retta LA, la retta parallela a FB; assume, infine, su di essa un generico punto C dal quale innalza la semiretta CED parallela alla retta LAK. Considera quindi il segmento AC e, sulla retta FB, un segmento di lunghezza assegnata EB. Fa poi traslare la semiretta CED nella direzione di FB in modo tale che il punto C si muova lungo la retta KC trascinando con sé il segmento AC che, essendo fissato nell'estremo A, può solo ruotare intorno ad A. Per effetto di questo movimento il segmento dato EB viene trascinato lungo la sua retta di applicazione AB in modo che il punto E rimanga fisso

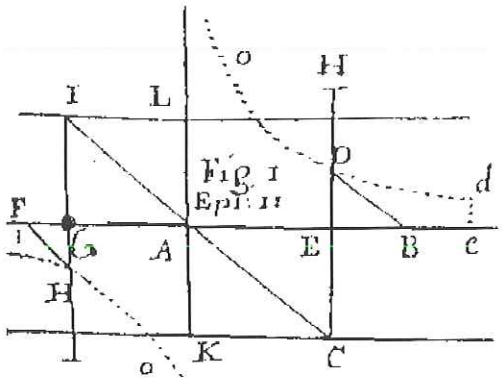


fig. 10

sulla semiretta CED. Se allora sull'altro suo estremo B viene applicata la semiretta BD libera di ruotare nel piano della figura intorno a B in modo da mantenersi sempre parallela al segmento AC, il punto D, intersezione di BD e di CED, a seguito della traslazione di CED, descrive la curva OD.

Questa curva gode della proprietà che, preso su di essa un qualsiasi punto D e condotta DE parallela a LA ed incidente la retta FB in E, il rettangolo costruitosui segmenti AE e DE è uguale al rettangolo costruito sui segmenti noti CE ed EB. Infatti, essendo AC e BD parallele, i triangoli BDE e CAE sono simili, per cui vale la proporzione

$$EB:DE = AE:CE$$

dalla quale si ricava che

$$EB \cdot CE = DE \cdot AE$$

che è la proprietà fondamentale dell'iperbole equilatera. Dunque la curva ottenuta è proprio la *prima iperbole*, o *iperbole apolloniana*, avente per asintoti le rette AB e LA, centro il punto A e rettangolo asintotico il rettangolo AED[74].

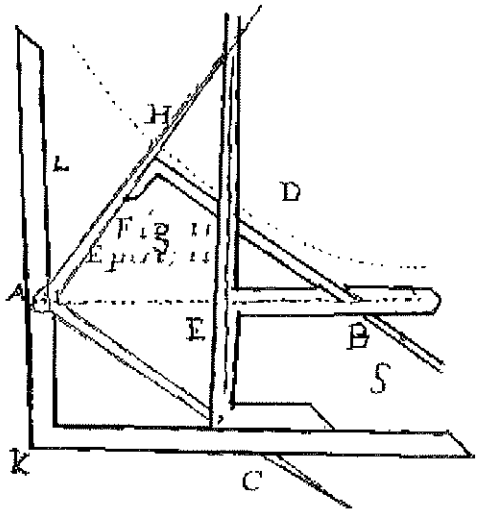


fig 11

Al fine di mostrare quanto facile e preciso fosse il suo metodo, prima di passare alla descrizione delle altre iperboli, Intieri descrive un dispositivo meccanico da lui inventato (fig. 11), mediante il quale si può far muovere la retta CE, ovvero la retta AC, in modo che la semiretta BD, applicata nel punto B e libera di ruotare intorno ad essa, si mantenga parallela ad AC.

[74] Con un analogo ragionamento, poi, l'autore descrive anche il secondo ramo di questa iperbole, cioè la curva HO. Egli prende, infatti, AL uguale ad AK e conduce, dallo stesso punto L, una retta parallela alla retta FAB. Prolunga il segmento CA fino ad incontrare nel punto I la retta LI e applica in I la semiretta IGH parallela alla retta LAK. Fa poi traslare IGH in modo che il punto I scorra lungo la retta LI, il segmento AI si muova circolarmente intorno ad A ed il segmento GF, uguale al segmento dato EB, venga trascinato lungo la sua retta di applicazione mantenendo, però, il punto G solidale alla retta IGH. Sul rimanente punto F, invece, viene fissata la semiretta FH, libera di ruotare nel piano della figura intorno allo stesso F, in modo tale, però, da mantenersi sempre parallela al segmento IA. Dalla intersezione di FH e di IGH ottiene il punto H che, per effetto della traslazione genera la curva HO.

Il dispositivo è costituito da una squadra TKV, sulla quale, in un punto A del lato verticale TK, è imperniata una seconda squadra PAR che può ruotare attorno ad A. Sul lato AP di quest'ultima è fissata, a una certa distanza da A, una squadra a elle GHL la quale, evidentemente, è parallela al lato AR. Sul lato KV della prima squadra scorre un'altra squadra a forma di F capovolta PEUNZ che porta, negli estremi del lato verticale PN, due fori attraverso i quali passano i lati AP e AR della squadra PAR. Il tratto compreso tra questi due fori presenta una fenditura attraverso la quale passa il lato HL della squadra GHL, della quale l'estremo L è infilato in un foro B praticato nel lato EU. In questo dispositivo EC ed EU sono tratti di lunghezza fissata.

Quando la squadra a forma di F capovolta viene fatta scorrere su KV, la squadra PAR ruota intorno ad A trascinando nel suo movimento la HL, che scorre nella fenditura di PN, e il punto D, intersezione di PN e HL, descrive la curva HD.

A questo punto l'Intieri, come già aveva fatto nella *Prima Epistola*, dovendo usare anche nelle descrizioni successive sia CD, DB, EB, KC, sia il punto A decide di indicarli sempre con gli stessi nomi, per cui chiama: CED: *descrivente*, DB: *efficiente*, EB: *intervallo*, KC (sia come curva, sia come retta) *direttrice*, A: *polo*.

Passando alla descrizione della *seconda iperbole*, Intieri fa notare che, essendo la prima iperbole quella per cui $EB \cdot CE = AE \cdot DE$, la seconda sarà quella per cui

$$EB \cdot CE^2 = AE \cdot DE^2$$

e analogamente quella di ordine n sarà quella per cui

$$EB \cdot CE^n = AE \cdot DE^n .$$

Per la descrizione della suddetta seconda iperbole, considera, nella figura 3, due rette KL e FB che si intersecano nel punto A secondo un angolo qualsiasi ed assume come direttrice al posto della retta AC della fig. 10 la *prima iperbole* oC descritta dalla intersezione della *descrivente* CED e dell'*efficiente* AC, avente come asintoti le rette AK e AB e come centro il punto A. Per effetto del movimento di CED, che avviene in modo tale che C descriva la prima iperbole oC in modo che CED si mantenga sempre parallela a se stessa, l'*intervallo* EB scorre lungo la sua retta di applicazione e l'*efficiente* BD, applicata nel punto B stesso, ruota intorno a quest'ultimo mantenendosi sempre parallela alla retta AC. In tale moto il punto D, intersezione di CED e di BD, descrive la curva oD, che è la *seconda iperbole*. Quest'ultima avrà gli asintoti LA e AB e il centro A coincidenti con quelli dell'iperbole direttrice. La sua proprietà principale è che il solido costruito sul quadrato di una qualunque intercetta, AE, per l'applicata DE è

uguale al solido costruito sul quadrato di CE, che, per la proprietà della prima iperbole, è uguale al rettangolo costruito su AE per CE, per l'intervallo EB.

Potendosi, infatti, scrivere la proporzione

$$AE^2 : AE \cdot CE = AE : CE$$

poiché per la proprietà della *prima iperbole* si ha che

$$EB : ED = AE : CE$$

si ricava che

$$AE^2 : AE \cdot CE = EB : DE$$

e quindi ciò che si voleva dimostrare:

$$AE^2 \cdot DE = AE \cdot CE \cdot EB .$$

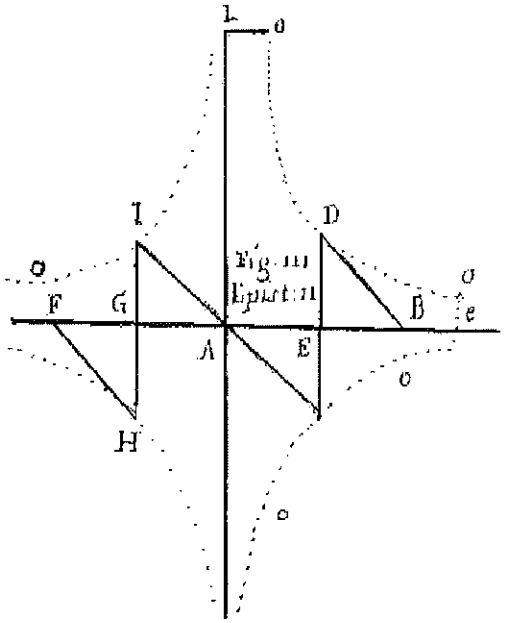


fig. 12

Il metodo di Intieri può anche spiegare il particolare andamento asintotico di questa curva. Presi, infatti, su di essa due punti D e d (fig. 12), e considerate le loro rispettive distanze DE, AE e de, Ae dagli asintoti LA e AB della *seconda iperbole*, si ha che

$$AE^2 \cdot DE = Ae^2 \cdot de$$

e quindi

$$AE^2 : Ae^2 = de : DE$$

ed poiché AE<Ae, segue anche che de<DE, e ciò dice che la curva oD non tende agli asintoti allo stesso modo, ma si avvicina più rapidamente alla retta ABe che alla retta LA[75].

Allo stesso modo Intieri descrive la *terza iperbole*, che gode della proprietà che il solido costruito sul cubo dell'intercetta AE per l'applicata DE è uguale al solido costruito sul cubo di CE per l'intervallo EB. In tal caso egli assume nella fig. 12 come *direttrice* la *seconda iperbole* oC, descritta dalla intersezione della

[75] Analogamente l'autore costruisce il secondo ramo OH della *seconda iperbole* OD.

descrivente CED e dell'*efficiente* AC, avente come asintoti le rette AB e AK e come centro il punto A.

Facendo muovere la retta CED nella direzione di EB mantenendosi sempre parallela a se stessa e in modo che il punto C percorra la *seconda iperbole* oC, l'*intervallo* BE scorre lungo la sua retta di applicazione e l'*efficiente* BD, applicata in B, ruota intorno a quest'ultimo mantenendosi sempre parallela alla retta AC. Il punto D, intersezione di CED e di BD, descrive la curva oD, che è la *terza iperbole*. Quest'ultima avrà gli asintoti LA e AB e il centro A coincidenti con quelli dell'iperbole direttrice. La sua proprietà principale è che il solido costruito sul cubo di una qualunque intercetta AE per l'applicata DE è uguale al solido costruito sul cubo di CE per EB. Preso, infatti, sulla *terza iperbole* un qualsiasi punto D, valendo la proporzione

$$AE^3 : AE^2 \cdot CE = AE : CE$$

e sapendo che

$$AE : CE = EB : DE$$

si ha che

$$AE^3 : AE^2 \cdot CE = EB : ED$$

e quindi

$$AE^3 \cdot ED = AE^2 \cdot CE \cdot EB$$

che è ciò che si doveva dimostrare.

Da quanto detto si può sintetizzare il metodo di Intieri nel seguente modo. Per descrivere l'iperbole di ordine n a partire da quella di ordine n-1 si assume nella fig. 12 come direttrice oC l'iperbole di ordine n-1, descritta dalla intersezione della descrivente CED e dell'efficiente AC, avente come asintoti le rette AB e AK e come centro il punto A, e si fa poi traslare la retta CED nella direzione di EB in modo che il punto C descriva la direttrice oC. Si avrà allora che l'*intervallo* EB trasla lungo la sua retta di applicazione e che l'*efficiente* BD, applicata nel punto B stesso, ruota attorno a quest'ultimo mantenendosi sempre parallela alla retta AC. Per effetto di questi movimenti il punto D, intersezione di CED e di BD, descrive la curva oD, che l'iperbole di ordine n. Quest'ultima avrà gli asintoti LA e AB uguali a quelli dell'iperbole *direttrice*, il centro A e come proprietà principale che il solido costruito sulla potenza di ordine n di una qualunque intercetta AE per l'applicata ED sarà uguale al solido costruito sulla potenza di ordine n di CE per l'intervallo EB.

La dimostrazione segue dal fatto che, valendo le proporzioni

$$AE^n : AE^{n-1} \cdot CE = AE : CE$$

e

$$AE : CE = EB : ED$$

si ha

$$AE^n : AE^{n-1} \cdot CE = EB : ED$$

e quindi

$$AE^n \cdot ED = AE^{n-1} \cdot CE \cdot EB$$

che è la proprietà dell'iperbole di ordine n.

Ma questo non è l'unico metodo che consente di descrivere le infinite iperboli. Intieri fa vedere, infatti, come si possa giungere allo stesso risultato utilizzando per *direttrice* la parabola invece dell'iperbole.

Considerata (fig. 13) la parabola AC di vertice A, diametro AEB, parametro EB e applicate rispetto al diametro AE le rette CE parallele ad AK, facendo muovere la generica applicata CE in modo che essa durante il moto sia sempre parallela a se stessa mentre il punto C descrive la parabola AC, la retta AC, fissa nell'estremo A, ruota attorno ad A e il segmento EB scorre sul diametro trascinando nel suo moto la semiretta BD che, essendo fissata in B, si muove circolarmente intorno allo stesso punto B, mantenendosi, però, sempre parallela alla retta AC. Dunque la parabola AC è la *direttrice*, CDE è la *descrivente*, BD è l'*efficiente*, EB l'*intervallo* e il vertice A è il *polo*. Il punto D, intersezione dell'*efficiente* e della *descrivente* descrive la curva oD, che sarà la *seconda iperbole* avente per asintoti la retta LA tangente alla parabola nel vertice A ed il diametro AB, per centro il punto A. È infatti verificata la proprietà di questa curva secondo cui, preso un qualsiasi suo punto D e condotta ED parallela all'asintoto LA, il solido costruito su AE e sul quadrato di ED è uguale al solido costruito sul quadrato dell'*intervallo* EB e sul parametro EB della parabola.

Essendo, infatti, i triangoli ACE e DEB simili,

$$CE : AE = ED : EB$$

e quindi sia ha anche che

$$CE^2 : AE^2 = ED^2 : EB^2 .$$

D'altra parte, per la proprietà della parabola

$$CE^2 = AE \cdot EB$$

ed allora si ha

$$AE \cdot EB : AE^2 = ED^2 : EB^2 .$$

Ossia

$$EB^3 = AE \cdot ED^2$$

che è quanto si doveva dimostrare[76].

Se si vuole procedere alla descrizione dell'iperbole di ordine n, la cui proprietà fondamentale è che la potenza n-ma di una qualunque delle applicate è uguale alla potenza (n-1)-ma del quadrato dell'intercetta per il parametro. bisogna assumere nella fig. 13 per *direttrice* AC la parabola di ordine n-1. Dalla intersezione della *descrivente* CED e dell'*efficiente* BD si ottiene il punto D che, movendosi CED in modo da mantenersi costantemente parallela a se stessa e in modo che C descriva la parabola *direttrice*, descrive la curva oD che è l'iperbole n-ma.

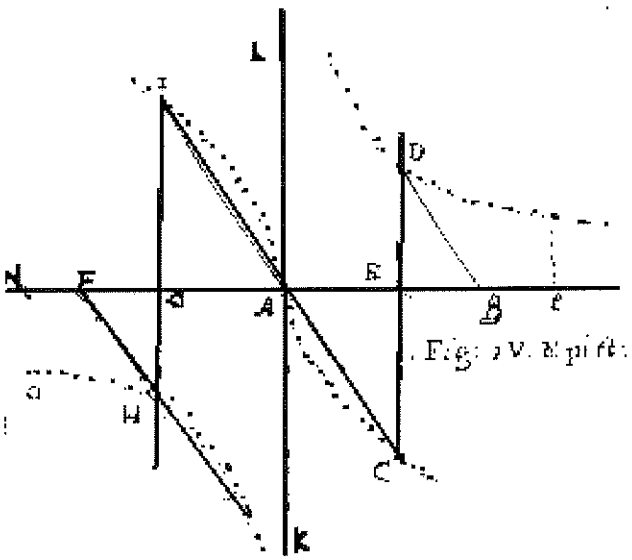


fig. 13

La dimostrazione procede dal fatto che, essendo simili i triangoli ACE e DEB, si ha che

[76] L'altro ramo dell'iperbole può essere descritto nel seguente modo: si assuma come direttrice la prima parabola avente vertice nel punto A, diametro la retta AE prolungata verso G e per parametro EB, sia poi la retta IGH la *descrivente*, applicata al diametro AG e parallela a CD, sia FH l'*efficiente* e FG = EB l'*intervallo*. La curva oH, che si originerà dall'intersezione dell'*efficiente* e della *descrivente*, è il secondo ramo dell'iperbole.

$$CE^{n-1} : AE^{n-1} = ED^{n-1} : EB^{n-1} .$$

Ma, per la proprietà della parabola di ordine n-1 si ha che

$$CE^{n-1} = AE^{n-2} \cdot EB$$

da cui si ottiene che

$$AE^{n-2} \cdot EB : AE^{n-1} = ED^{n-1} : EB^{n-1}$$

da cui

$$EB^n = \frac{AE^{n-1} \cdot ED^{n-1}}{AE^{n-2}} .$$

Ossia

$$EB^n = AE \cdot ED^{n-1}$$

che è quello che si doveva dimostrare.

Il metodo sopra esposto si fonda essenzialmente sulla conoscenza della proprietà fondamentale dell'iperbole da costruire, conoscenza che consente di determinare anche altre proprietà della curva considerata che Intieri si limita ad enunciare senza darne dimostrazione «ne in magnum volumen habeat epistola»[77].

Una prima proprietà è che il centro dell'iperbole è centro di simmetria per l'iperbole stessa nel senso che tutte le rette passanti per esso (distinte dagli asintoti) incontrano i due rami dell'iperbole in punti tali che il segmento da esse determinato è diviso dal centro in parti uguali

Una seconda proprietà è che presi due punti D e d su una qualunque di queste iperboli, come nella figura 12, e condotte le rette ED e le parallele all'asintoto LA, si ha che

$$AE^2 : Ae^2 = de : ED .$$

Una terza proprietà è che presi due punti, come C e B sull'iperbole di ordine n CPD della fig. 14, i cui asintoti sono le rette AG e AH, e condotte due rette parallele GCPH ed EBDF che intersecano l'iperbole nei punti P e D, valgono le relazioni:

$$CG \cdot CH^n = EB \cdot FB^n$$

$$CG^n \cdot CH = EB^n \cdot FB .$$

[77] *Ibid.*, p. 46.

Infine che il segmento di tangente KLM nel vertice L dell'iperbole di ordine n è diviso da L in parti tali che $KL = \frac{1}{n}KM$.

Come aveva fatto per le parabole, Intieri passa poi alla costruzione dei luoghi geometrici mediante iperboli le cui equazioni sono costituite da due termini o possono essere ricondotte a una tale forma.

Il primo luogo è quello rappresentato dall'equazione $x^2y=a^3$ nella quale x ed y sono indeterminate ed a è una quantità nota. Si tratta della *seconda iperbole* la cui costruzione si effettua nel seguente modo.

> "In figura tertia – scrive Intieri, ponamus A esse initium quantitatis indeterminatae x; atque eadem quantitas x per rectam AE positione datam sese estendere intelligatur; quantitas autem y, supra hanc in dato angulo; puta AED, exurgere concipiatur"[78].

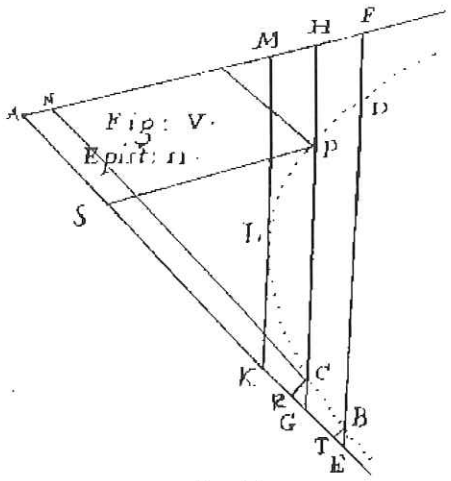


fig. 14

Intieri, per usare una terminologia moderna, fissa un sistema di assi ortogonali di origine A, asse x la retta FB e asse y la retta KL (fig. 13). Traccia quindi, con il metodo esposto precedentemente, la *seconda iperbole* oD di asintoti LA e AB e dimostra che essa è il luogo cercato. Per far vedere ciò prende su oD un punto D qualsiasi, conduce la retta ED parallela all'asintoto AK e pone AE = x e ED = y. Poiché la proprietà di tale curva è che il solido costruito sul quadrato di AE e su ED è uguale alla potenza dell'iperbole, che è a^3, ottiene proprio l'equazione di partenza $x^2y = a^3$ [79].

Analogamente fa vedere che il luogo rappresentato dall'equazione

$$x^3y = a^4$$

è la terza iperbole, e quello rappresentato dall'equazione

$$x^4y = a^5 .$$

è la quarta iperbole.

---

[78] *Ibid.*, p. 48.

[79] Intieri afferma che se l'equazione fosse stata $y^2x = a^3$ si sarebbe avuto lo stesso luogo.

Questa, però, non è l'unica iperbole di quinto genere da lui considerata. Egli infatti fa vedere che anche il luogo rappresentato dall'equazione

$$x^3y^2 = a^5 .$$

appartiene allo stesso genere di iperbole.

Si assume come *direttrice* nella fig. 12 la seconda iperbole oC, di asintoti AE e AK, come *descrivente* la retta CED, come *polo* il punto A, come *intervallo* il segmento EB = a, e come *efficiente* la retta BD. La curva oD così risultante è il luogo designato dalla suddetta equazione. Se infatti, come sopra, pone AE = x e ED = y, dalla similitudine dei triangoli BED e CEA, si ottiene che

$$EB : ED = AE : CE$$

da cui

$$CE = \frac{xy}{a} .$$

D'altra parte, poiché per la proprietà della seconda iperbole il solido costruito sul quadrato di CE e su AE deve essere uguale al solido dato a^3, si può scrivere

$$\frac{x^2y^2}{a^2} \cdot x = a^3$$

e quindi l'equazione di partenza

$$x^3y^2 = a^5 .$$

Per quanto riguarda i luoghi che conducono ad equazioni di sesto grado, Intieri dice che questi possono essere costruiti, adoperando la quinta iperbole descritta con il metodo precedentemente esposto, con una tale facilità da non necessitare di ulteriori spiegazioni rispetto a quanto detto per la costruzione dei precedenti luoghi. Per quanto riguarda, invece, la costruzione dei luoghi di settimo grado, quelli che conducono alle equazioni

$$x^6y = a^7 \qquad\qquad y^6x = a^7$$

si eseguono facilmente con il metodo adoperato per le analoghe equazioni di grado inferiore.

Per quanto riguarda, invece, la costruzione del luogo designato dall'equazione

$$x^5y^2 = a^7$$

considerata nelle fig. 12 come direttrice la quarta iperbole oC, di centro A, asintoti AE e AK, come *descrivente* la semiretta CED, come *efficiente* la semiretta BD, polo il punto A, intervallo EB = a, si ottiene la curva oD che è quella cercata. Infatti, preso su quest'ultima un punto D qualsiasi, e posto AE = x, ED = y, essendo simili i triangoli CEA e BED, si ha

$$CE = \frac{xy}{a}$$

e poiché per la proprietà della quarta iperbole $CE \cdot AE^3 = a^5$, si ha che

$$\frac{x^2y^2}{a^2} \cdot x^3 = a^5$$

e quindi

$$x^5y^2 = a^7 .$$

Per la curva rappresentata dall'equazione

$$x^4y^3 = a^7$$

si procede come prima con l'unica differenza che bisogna assumere nelle fig. 12 come direttrice la *seconda iperbole* oC (e non la terza) la cui proprietà porterà a scrivere l'uguaglianza

$$\frac{x^3y^3}{a^3} \cdot x = a^4$$

da cui l'equazione di partenza

$$x^4y^3 = a^7 .$$

> "Atque – conclude Intieri – ex his omnibus manifeste apparet allatam methodum talem esse, qua simpliciorem inveniri posse non puto, dum tanta elegantia, atque facilitate omnes hae curvae, et miro quidem ordine describi possint"[80].

[80] *Ibid.*, p. 51.

Ma questo metodo, precisa Intieri, si può adoperare solo quando l'equazione del luogo è costituita da due termini. Quando l'equazione del luogo è costituita da più termini bisogna operare differentemente come segue.

Se nella figura 13 si suppone che la curva AC non sia una parabola, ma la prima iperbole equilatera, avente AN per asse traverso, G come centro, vertice A e per applicate rispetto al diametro AE le rette, come CE, parallele a LA, assunta AC come *direttrice*, la retta CE come *descrivente*, la retta BD parallela alla retta AC come *efficiente*, si ottiene la curva oD, che è la *seconda iperbole*, avente come asintoti le rette AB e LA, come *polo* il vertice A e come *intervallo* il segmento dato ED. La proprietà di quest'ultima è che, preso su di essa un generico punto D, e condotta ED parallela all'asintoto LA, il solido costruito sul quadrato dell'applicata ED e sull'intercetta AE è uguale al solido costruito sul quadrato dell'*intervallo* EB e sul segmento NE (con N un opportuno punto dell'asse traverso FB), ossia

$$ED^2 \cdot AE = EB^2 \cdot NE .$$

Ossia

$$ED^2 \cdot AE = EB^2 \cdot (AN+AE) .$$

Posto AN = a, EB = b, AE = x, ED = y, si ha allora:

$$xy^2 = b^2(a+x)$$

e quindi

$$xy^2 = ab^2+b^2x .$$

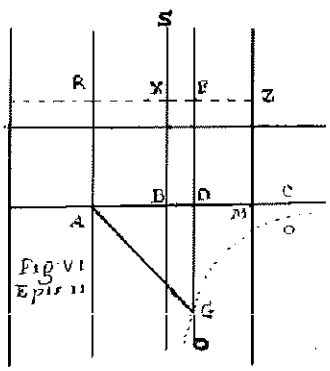


fig. 15

A questo punto Intieri riporta un altro luogo affrontato da Descartes nel secondo libro della *Géometrié* e da tutti ritenuto difficilissimo. Egli considera nella fig. 15 la prima iperbole oG avente per asintoti BC e BS, la cui potenza è uguale a due volte il quadrato di DC e la assume come direttrice. Prolungato, poi, l'asintoto BC fino ad A, in modo che AB = DC, assegnato alla retta GDF, parallela all'asintoto BS, il ruolo di *descrivente*, alla retta CF, parallela ad AG, quello di *efficiente*, e posto DC come *intervallo*, assunto infine A come *polo*, descrive la curva oF che egli dice essere un'iperbole del secondo genere, i cui asintoti sono le rette BC e BX, il cui centro è B, e la cui proprietà è che, preso sulla stessa un qualsiasi punto, come F, e condotta DF parallela all'asintoto BX, il solido costruito sul quadrato di BD e

sulla retta DF più il solido costruito su AB, BD e DF, è uguale a due volte il cubo di AB, ossia al solido costruito sulla potenza dell'iperbole per l'Intervallo dato. Infatti, essendo i triangoli CDF e AGD simili, si ha

$$DC : DF = AD : DG$$

da cui

$$DC \cdot DG = DF \cdot AD .$$

Moltiplicano ambo i membri per BD si ottiene

$$BD \cdot DC \cdot DG = BD \cdot DF \cdot AD$$

e poiché

$$BD \cdot DF \cdot AD = BD \cdot DF \cdot (AB+BD) = AB\ BD \cdot DF + BD^2 \cdot DF$$

si ha che

$$BD^2 \cdot DF + AB\ BD \cdot DF = BD \cdot DC \cdot DG .$$

D'altra parte, per la proprietà della prima iperbole OG, si ha che

$$BD \cdot DG = 2DC^2 = 2AB^2$$

e quindi alla fine si trova

$$BD^2 \cdot DF + AB\ BD \cdot DF = 2AB^3 \quad (1)$$

che è quanto si doveva dimostrare.

Questo metodo può essere generalizzato, nel senso che se si assume come direttrice oG l'iperbole di ordine n-1, in modo che il solido costruito sulla potenza (n-1)-esima di BD e su DG sia uguale al solido dato, allora la curva oF descritta con lo stesso ragionamento sarà tale che il solido costruito sulla potenza n-esima di BD e su DF più il solido costruito sulla potenza (n-1)-esima di BD sul segmento dato AB e su DF, è uguale al solido dato, che è ottenuto moltiplicando la potenza dell'iperbole per l'*intervallo*, cioè:

$$BD^n \cdot DF + AB\ BD^{n-1} \cdot DF = 2AB^n .$$

Ritornando, però, alla seconda iperbole oF appena descritta, Intieri sostiene che, se sull'asintoto BX si prende il segmento BE uguale al segmento dato AB,

e dal punto E si conduce la retta HN parallela all'asintoto BC, che interseca l'iperbole descritta oF, in O, è chiaro che

$$BD^2 \cdot DF = BD^2 \cdot (DH+HF) = BD^2 \cdot DH + BD^2 \cdot HF$$

che sostituita nella (1), da

$$BD^2 \cdot DH + BD^2 \cdot HF + AB \cdot BD \cdot DH + AB \cdot BD \cdot HF = 2AB^3$$

ed essendo DH = BE = AB, si ha che

$$BD^2 \cdot DH + BD^2 \cdot HF + AB^2\, BD + AB \cdot BD \cdot HF = 2AB^3$$

da cui

$$BD^2 \cdot HF + AB \cdot BD \cdot HF = 2AB^3 - AB^2\, BD - BD^2\, DH\,. \quad (2)$$

Il primo membro di questa uguaglianza può essere espresso in funzione di FR, FX e HF (FX e FR segmenti appartenenti alla parallela per F ad AB). Essendo, infatti, FX = BD, AB = FR-FX e DH = AB, si ha

$$BD^2 \cdot HF + AB \cdot BD \cdot HF = FX^2 \cdot HF + (FR-FX) \cdot FX \cdot HF\,.$$

Per quanto riguarda il secondo membro, considerate le rette PI, RA, ZM parallele a BX e tali che PR = RX = FZ, non è difficile mostrare che esso può essere espresso in funzione di BE = AB, FP e FZ. Infatti, risultando BD = FX = FP – 2 FZ, si potrà scrivere

$$2AB^3 - AB^2 \cdot BD - BD^2 \cdot DH = 2BE^3 - BE^2(FP-2FZ) - (FP - 2FZ)^2 \cdot EB$$

e quindi la (2) diventa

$$FX^2 \cdot HF + (FR-FX) \cdot FX \cdot HF = 2BE^3 - BE^2(FP-2FZ) - (FP - 2FZ)^2 \cdot BE\,. \quad (3)$$

Intieri utilizza questo risultato per far vedere come esso risolva immediatamente il noto problema di Pappo, per 4 rette parallele e una quinta ad esse perpendicolare, affrontato da Descartes nel secondo libro della sua *Géométrie*.

Con riferimento alla fig. 15, il problema può essere così enunciato:

> "Date le quattro rette parallele PI, RA, BX, ZM equidistanti tra loro e una quinta retta KN ad esse ortogonale, trovare un punto, F, dal quale condotte le rette perpendicolari alle date, come HF, FR, FP, FZ e FX, il solido costruito su HF, FX e

FR è uguale al solido costruito sulle due rimanenti FP, FZ e su un segmento qualsiasi dato, per esempio BE, oppure AB".

Descartes aveva dimostrato che il luogo dei punti F così determinati era la parabola cubica (detta appunto parabola cartesiana) di equazione

$$y^3 - 2\,ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy \qquad (4)$$

avendo posto

$$y = FX \qquad x = HF \qquad a = PR = RX = FZ\,.$$

Aveva poi fatto vedere che detta curva poteva essere generata assumendo come *direttrice* una *parabola apolloniana*, con asse parallelo alle rette parallele date, che traslasse nella direzione dell'asse in modo che il vertice K si mantenesse sempre su di esso, e come *descrivente* una retta capace di ruotare nel piano della parabola intorno al punto I e in modo tale, intersecando l'asse della parabola in un punto L, il segmento KL da esso staccato a partire dal vertice K durante la sua rotazione e la traslazione della parabola, rimanesse di lunghezza costante. Il punto F, intersezione della *parabola apolloniana* con tale retta, descriveva il luogo cercato, ossia la parabola cubica (2).

La figura 6 riproduceva proprio le ipotesi del problema suddetto: le rette PI, RA, BX, ZM sono, infatti, parallele ed equidistanti, inoltre la retta EH è a queste perpendicolare. Intieri aveva dimostrato che, in tali ipotesi, vale la (2). Ma a differenza di Descartes che aveva costruito il problema facendo uso di una parabola, secondo Intieri si partiva dalla considerazione dell'iperbole oF, di centro B, asintoti BE e BC e *intervallo* d la cui proprietà è che, preso sulla stessa un qualsiasi punto, F, e condotta DF, parallela all'asintoto BE il solido che è costruito sul quadrato di BD per l'applicata DF più il solido costruito sulle due BD, DF e sulla terza data d è uguale a due volte il cubo di d, cioè

$$BD^2 \cdot DF + BD \cdot DF \cdot d = 2d^3\,. \qquad (5)$$

Costruita la figura come prima, e posto

$$x = BD = EH \qquad y = HF \qquad FR = x + d,$$

si ha che il solido costruito su BD, HF e FR sarà

$$BD \cdot HF \cdot FR = xy(x+d)\,.$$

Allo stesso modo, essendo FP = x+2d, FZ = d – x, si ha che il solido costruito su di essi e su d, cioè

$$FP{\cdot}FZ{\cdot}d = (x+2d)(d - x)d = 2d^3 - x^2d - d^2x\,.$$

Imponendo allora la condizione del problema che BD·HF·FR = FP·FZ·d, si avrà l'equazione

$$x^2y+xyd = 2d^3 - x^2d - d^2x\,.$$

Ma quest'equazione è la stessa che esprime la proprietà della curva (5). Essendo, infatti, DF=d+y, poiché il solido costruito sul quadrato di BD per DF più il solido costruito sui tre BD, DF, e su d deve essere uguale a due volte il cubo di d, si avrà l'equazione

$$x^2(d+y)+(d+y)dx = 2d^3$$

ossia

$$x^2d+x^2y = 2d^3 - d^2x - dxy$$

da cui

$$x^2y+xyd = 2d^3 - x^2d - d^2x\,.$$

Dunque il luogo descritto dal punto F è un'iperbole cubica diversamente da quanto trovato da Descartes. Questa discrepanza è dovuta al fatto che i due autori non hanno considerato, nella richiesta uguaglianza del prodotto di linee, gli stessi fattori. Se Intieri avesse considerata la stessa uguaglianza di Descartes, cioè

$$FP{\cdot}FR{\cdot}FZ = FX{\cdot}FM$$

avrebbe trovato come luogo una parabola cubica, come Descartes.

A questo punto, Intieri afferma che dal momento che è chiaro come descrivere tali curve sul piano, non c'è alcuna differenza nel dover costruire un'equazione di secondo grado o una di grado n.

Descartes nel terzo libro della sua *Géométrie* aveva, mostrato un metodo per costruire tutte le equazioni di 5° e 6° grado come intersezione di un cerchio e di una parabola cubica.

Intieri fa osservare che il metodo cartesiano, proprio per la sua generalità, relativamente ad alcune equazioni particolari, diviene troppo laborioso. Se ad esempio si vuole costruire l'equazione

$$x^6 = ax^5 - b^6$$

arla in un'altra ripiena di tutti i suoi termini, che ammetta tutte radici positive e che sia tale che il coefficiente del terzo termine sia maggiore del quadrato della metà del coefficiente del termine di secondo grado, tutte cose, dice Intieri, "quae ferreum hominem defatigarent"[81], mentre la costruzione di tale equazione risulta molto facile procedendo nel seguente modo.

Nella fig, 16, si considera il cerchio ADC, di diametro AC = a e dall'estremo A conduce AS perpendicolare al diametro AC e traccia la seconda iperbole oD di centro A, con asintoti AC e AS, così che preso su di essa un generico punto D e condotta DB, perpendicolare all'asintoto AC, il solido costruito sul quadrato di AB e su DB sia uguale a b^3. Dall'intersezione dell'iperbole e del cerchio dato si ottiene il punto D. Il segmento DS parallelo al diametro del cerchio AC sarà la radice positiva x dell'equazione proposta.

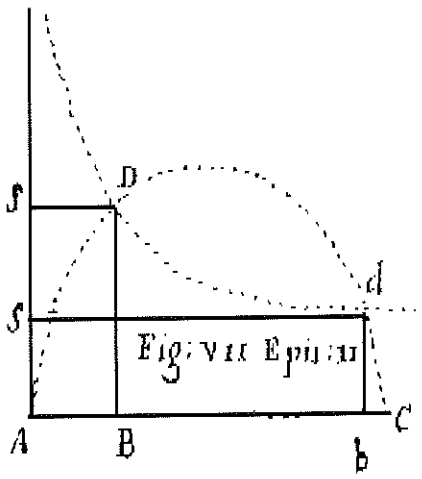


fig. 16

Intieri non fa vedere perché DS è radice dell'equazione data; probabilmente dà per scontata tale verifica. La cosa segue immediatamente quando si tenga presente che, essendo D un punto dell'iperbole considerata sarà

$$DS^2 \cdot DB = b^3 \qquad (6)$$

e che, essendo D anche un punto della circonferenza sarà

$$DB^2 = AB \cdot BC = AB(AC - AB).$$

Allora, elevando al quadrato la (6) e sostituendovi DB^2 con AB(AC – AB) e DS con AB, si ottiene

$$AB^4\, AB(AC - AB) = b^6$$

[81] *Ibid.*, p. 57.

e posto x= AB si ha

$$x^5(a - x) = b^6$$

e quindi l'equazione data

$$x^6 = ax^5 - b^6.$$

Passa poi alla costruzione dell'equazione di sesto grado

$$x^6 - qx^5 - p^2x^4 - rx^2+n^2 =0$$

e lo fa considerando (fig. 17) l'iperbole di secondo ordine DN con asintoti AC e AL, che si intersecano ortogonalmente nel punto A, il cui rettangolo asintotico è n^3, e la cui proprietà è che, preso su di essa un generico punto, D, e condotta DE parallela all'asintoto AL, il solido costruito sul quadrato di AE e di ED è uguale a n^3. Prende, poi, sull'asintoto AC il segmento $AC=\frac{q}{2}$ e innalza, a partire dal punto C, il segmento di perpendicolare $CB=\frac{r^4}{2n^3}$.

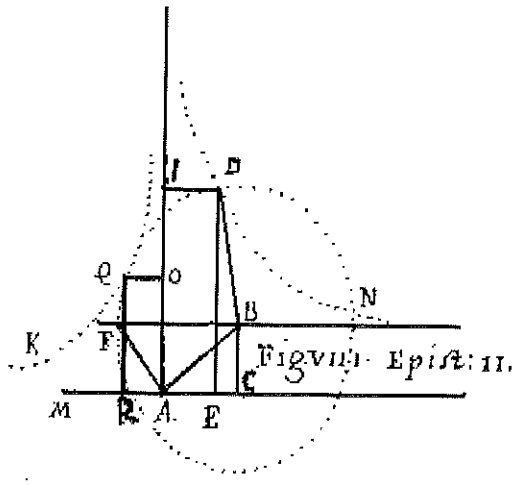


fig. 17

Considera quindi il segmento AB, innalza, a partire dal punto A, il segmento di perpendicolare AF = p, e traccia infine il segmento BF. Descrive, poi, il cerchio di centro B, di raggio BF che interseca l'iperbole descritta nel punto D. Conduce a partire dal punto D la parallela DL ad AE, che interseca la stessa AL nel punto L e fa vedere che DL è la radice positiva dell'equazione proposta.

Infatti, condotta DE parallela all'asintoto AL e posto AE = DL = x, per la proprietà dell'iperbole DN, è $DE = \frac{n^3}{x^2}$.

Allora

$$DG = DE - GE = DE - CB = \frac{n^3}{x^2} - \frac{r^4}{2n^3}.$$

$$DG^2 = \frac{n^6}{x^4} - \frac{r^4}{x^2} + \frac{r^8}{4n^6} .$$

Posto $AC = \frac{q}{2}$, $AE = x$, $CE = GB = \frac{q}{2} - x$, si ha

$$GB^2 = \frac{q^2}{4} - qx + x^2$$

ed essendo

$$GB^2 + DG^2 = BD^2 = BF^2$$

si ha che

$$BF^2 = \frac{n^6}{x^4} - \frac{r^4}{x^2} + \frac{r^8}{4n^6} + \frac{q^2}{4} - qx + x^2 .$$

D'altra parte

$$BF^2 = AF^2 + AB^2 = AF^2 + AC^{2+}CB^2 = p^2 + \frac{q^2}{4} + \frac{r^8}{4n^6}$$

per cui si avrà l'equazione

$$\frac{n^6}{x^4} - \frac{r^4}{x^2} + \frac{r^8}{4n^6} + \frac{q^2}{4} - qx + x^2 = p^2 + \frac{q^2}{4} + \frac{r^8}{4n^6}$$

che, ridotta a forma canonica, diviene

$$x^6 - qx^5 - p^2x^4 - rx^2 + n^2 = 0$$

ossia l'equazione di partenza.

Se nella fig, 17 si considera poi la seconda iperbole QK, con centro A e asintoti AM e AL, tale che il solido che è costruito sul quadrato di AR e sul segmento QR è uguale a n^3; e così che anche questa intersechi il cerchio in un punto, Q, e da questo sia condotto QR, parallelo all'asintoto AL ed ortogonale all'asintoto AM, non sarà difficile verificare che il segmento AR sarà la radice negativa dell'equazione proposta.

La conclusione di Intieri è che in modo analogo possono essere costruite tutte le altre equazioni prive di qualche termine, qualunque sia il loro grado.

A questo punto l'autore fa vedere come si possa effettuare agevolmente la costruzione se al posto del cerchio si adopera l'ellisse. Se ad esempio nella fig. 16 al posto del cerchio ADC consideriamo una curva del genere delle ellissi, la cui proprietà è che preso un qualsiasi punto, D, e condotta DB parallela all'asintoto AS, il solido che è costruito sul quadrato di AB per BC è uguale al cubo dell'applicata DB, invece l'iperbole oD interseca questa curva in un punto, come D e condotta DB parallela all'asintoto AS, l'intercetta AB sarà la radice dell'equazione di nono grado.

Infatti, per la proprietà dell'iperbole oD,

$$AB^2 \cdot BD = b^3$$

ed essendo AC = a, AB = x, si avrà

$$BD = \frac{b^3}{AB^2} = \frac{b^3}{x^2} .$$

D'altra parte BC = a –x, e quindi, dovendo essere il solido costruito sul quadrato di AB e di BC uguale al cubo di DB, cioè

$$AB^2 \cdot BC = BD^3$$

si avrà

$$x^2(a - x) = \frac{b^9}{x^6}$$

ossia l'equazione

$$x^9 - ax^8 + b^9 = 0 .$$

Se si vogliono inserire sei medie proporzionali tra due segmenti dati, a e b, posta come x la prima di dette medie, si troverà l'equazione

$$x^7 = ba^6$$

che può essere agevolmente costruita in questo modo[82].

[82] Intieri non dice come quest'equazione venga fuori. Probabilmente egli ha iterato il ragionamento fatto da Descartes per inserire due medie proporzionali tra due segmenti dati a, b. Infatti, da a:x=x:b si ricava $b=\frac{x^2}{a}$, e quindi si può scrivere $a:x=x:\frac{x^2}{a}=\frac{x^2}{a}:b$. Da questa si ricava che

Si considerino nella fig. 18 le due rette AB e AD, che si intersecano in A ortogonalmente tra loro e si tracci la seconda parabola AOC, di vertice A, asse AD e parametro il segmento dato a, tale che il cubo di qualunque applicata CD è uguale al solido costruito sul quadrato del parametro a e sull'intercetta AD[83]. Allo stesso modo con vertice A, asse AB, e parametro il segmento dato b, sia descritta la seconda parabola, nella quale il cubo dell'ordinata è uguale al solido costruito sul quadrato dell'intercetta e sul parametro. Tali parabole si intersecheranno nel punto C, la cui applicata CD all'asse AD è la prima delle medie proporzionali cercate. Condotta, infatti, l'ordinata BC ortogonalmente all'asse AB, e posto CD=AB=z, si avrà, per la proprietà della parabola AOC:

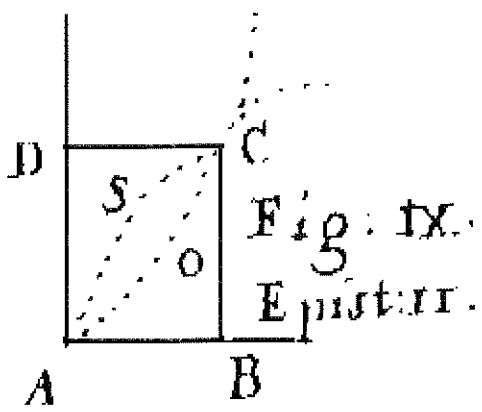


fig. 18

$$BC = \frac{z^3}{a^2} .$$

Poiché il cubo di BC è uguale al solido costruito sul quadrato di AB e sul parametro, cioè

$$BC^3 = AB^2 \cdot b = z^2 \cdot b$$

si avrà che

$$\frac{z^9}{a^4} = z^2 \cdot b$$

e quindi

$$z^9 = a^6 b z^2$$

ossia

$$z^7 = b a^6$$

il che assicura che z soddisfa l'equazione di partenza.

$b=\frac{x^3}{a^2}$, per cui si ha che $a:x=x:\ \frac{x^2}{a}=\frac{x^2}{a}:\frac{x^3}{a^2}=\frac{x^3}{a^2}$: b. E così di seguito fino all'inserimento delle sei medie proporzionali richieste.

[83] Per questa proprietà Intieri rimanda alla terza epistola.

Dunque Intieri aveva costruito un'equazione di settimo grado con due parabole del secondo genere. Ciò gli dava agio di criticare la classificazione delle curve per generi fatta da Descartes. Questi aveva ordinato le curve classificando di primo genere quelle corrispondenti ad equazioni di 2^o grado, di secondo genere quelle corrispondenti ad equazioni di 3^o e 4^o grado, di terzo genere quelle corrispondenti ad equazioni di 5^o e 6^o grado e così di seguito.

Ma non si deve tralasciare a questo punto che il ragionamento per trovare le medie proporzionali servendosi di queste parabole è certamente molto semplice, e può essere utilizzato, scegliendo opportunamente l'ordine di dette curve, per inserire un numero qualsiasi di medie proporzionali.

Se, infatti, queste parabole sono entrambe parabole prime, CD sarà la prima media proporzionale da trovare, quando tra le due date si devono inserire due medie proporzionali.

Assunta, invece, la curva AOC come seconda parabola (come sarà descritta nella terza epistola), se la curva ASC è la prima parabola, CD sarà la prima media proporzionale quando tra le due date si vogliono inserire quattro medie continuamente proporzionali, se ASC è la seconda parabola descritta nella prima epistola, CD sarà la prima media proporzionale da trovare, quando tra le due date devono essere inserite sei medie continuamente proporzionali.

Infine qualora la parabola AOC è la terza parabola (come sarà costruita nella terza epistola) e ASC la seconda parabola (sempre secondo la costruzione che sarà fatta nella terza epistola), in cui il cubo dell'applicata è uguale al solido costituito dal rettangolo delle date e dall'intercetta, CD sarà la prima di dieci medie proporzionali da inserire tra due segmenti dati. E così di seguito.

A questo punto, con spirito polemico contro quelli che facevano uso di curve senza descriverle, Intieri si propone di mostrare come si possa descrive l'ellisse da lui adoperata per la costruzione dell'equazione di nono grado. Si tratta di una curva che egli dice è molto semplice da descrivere ma anche assai diversa dall'iperbole e dalla parabola.

Egli considera nella figura 19 un triangolo rettangolo BAL isoscele sulla base BL, e costruisce sul lato AB un angolo retto $A\hat{D}B$. Considera poi la retta ECD parallela a LA, la quale trasla nella direzione di AB in modo che il punto E, percorrendo il lato BL, trascina con sé il suddetto angolo retto. Applica poi, nel punto E, la semiretta EB libera di ruotare intorno allo stesso punto E, la quale, nella sua rotazione, formi con DB sempre un angolo retto. Intieri dimostra che, per effetto di questi movimenti, il vertice D dell'angolo retto $A\hat{D}B$ descrive la curva AFDB, la cui proprietà è che, preso su di essa un qualsiasi punto F, e condotta FH perpendicolare ad AB, il solido che è costruito sul quadrato di AH e su HB è uguale al cubo di FH, cioè

$$AH^2 \cdot HB = FH^3 .$$

Infatti, poiché per ipotesi il triangolo BAL è isoscele e HG è parallela ad AL, anche il triangolo BHG è isoscele ed è quindi HG = HB.

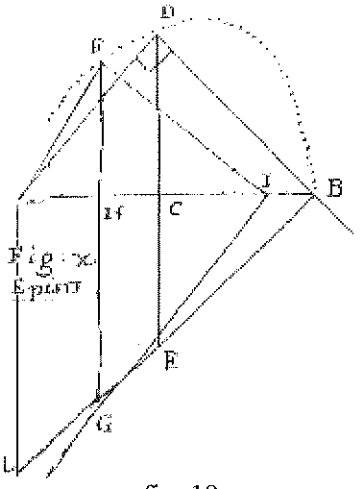


fig. 19

Poiché gli angoli $A\hat{F}I$, $F\hat{I}G$ sono retti, AF e GI sono tra loro parallele e i triangolo AHF e IHG sono simili. Ne segue allora che

$$AH:FH = HI:HG$$

ossia

$$AH \cdot HG = FH \cdot HI\ .$$

Moltiplicando ambo i membri per AH, e tenendo conto che HG = HB, si ottiene

$$AH^2 \cdot HB = AH \cdot FH \cdot HI$$

$$\text{Ma } AH \cdot FH \cdot HI = FH^3,$$

e dunque

$$AH^2 \cdot HB = FH^3\ .$$

Da ciò si deduce facilmente che $AH^2:FH^2 = FH:HB$. Da ciò – conclude Intieri-si deduce che questa curva "circulum uno gradu excedat", ossia supera il cerchio di un solo grado. Sul cerchio, infatti, AH:FH = FH:HB. Poiché dopo la prima potenza

segue il quadrato, dopo il cerchio segue quella curva sulla quale il quadrato di AH sta al quadrato di FH, come la stessa FH sta a HB.

Nel caso in cui il triangolo BAL, nella stessa fig. 19, non sia isoscele, la curva AFDB descritta allo stesso modo sarà quella che segue l'ellisse, cioè sarà quella in cui vale la relazione

$$AH^2 \cdot HB : FH^3 = AB : LA$$

Infatti, dal parallelismo di GI e AF, consegue la similitudine dei triangoli

$$AHF \text{ e } IHG,$$

per cui

$$AH : FH = HI : HG$$

da cui

$$AH \cdot HG = HI \cdot HG$$

$$AH^2 \cdot HG = AH \cdot HI \cdot HG = FG^3 .$$

E poiché vale la proporzione

$$AH^2 \cdot HG : AH^2 \cdot HB = HG : HB$$

si ha che

$$FH^3 : AH^2 \cdot HB = HG : HB$$

ma

$$HG : HB = AL : AB$$

dunque

$$FH^3 : AH^2 \cdot HB = LA : AB$$

e invertendo

$$AH^2 \cdot HB : FH^3 = AB : LA$$

come si doveva dimostrare.

Se allora si vuole descrivere la curva che segue a questa, ossia quella che occupa il secondo luogo dopo il cerchio, bisogna fare come segue.

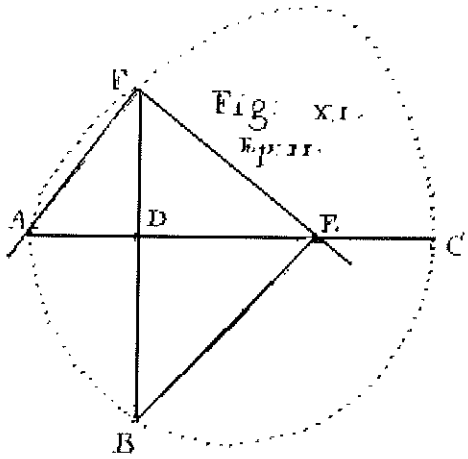


fig. 20

Si consideri nella fig. 20 il semicerchio ABC, di diametro AC; la semiretta BD applicata al diametro AC si muova nella direzione di AC in modo da restare sempre parallela a se stessa e in modo che l'estremo B rimanga sempre sul semicerchio ABC. Nello stesso punto B sia applicato il segmento BE, inclinato di un angolo di 45° rispetto al diametro AC, il quale si muova, per effetto del movimento della retta BD, in modo da formare con BD sempre lo stesso angolo. Inoltre sulla semiretta BD si consideri un punto F tale che l'angolo $A\hat{F}E$ sia retto e in modo tale che F rimanga sempre sulla retta BDF mentre i lati AF ed FE passino sempre per i punti A ed E, essendo E il punto di intersezione di BE col diametro AC. Intieri dimostra che il vertice F dell'angolo retto $A\hat{F}E$ descrive la curva che gode della proprietà che, preso un suo qualsiasi punto F, e condotta da esso l'applicata FD al diametro AC, il *planoplanum* costruito sul cubo di AD per DC è uguale al *quadratoquadrato* del segmento DF, cioè

$$AD^3 \cdot DC = DF^4 .$$

Infatti, essendo l'angolo $A\hat{F}E$ retto

$$AD:DF = DF:DE$$

e quindi

$$AD^3:DF^3 = DF^3:DE^3 . \qquad (7)$$

Essendo $DE = BD$, anche $DE^3 = BD^3$.
D'altra parte,

$$BD^3 = BD \cdot BD^2 \text{ e } BD^2 = AD \cdot DC$$

per cui

$$BD^3 = AD \cdot DE \cdot DC .$$

Inoltre

$$DF^3:AD \cdot DE \cdot DC = DF:DC . \quad (8)$$

Infatti

$$DF^2 = AD \cdot DE$$

e quindi il cubo di DF, e il solido costruito su AD, DE, DC avendo la stessa base, stanno tra loro come le rispettive altezze, DF e DC.
Allora tenendo presente (7) e (8) si ha che

$$AD^3:DF^3 = DF:DC$$

$$DF^4 = AD^3 \cdot DC$$

ossia: il *planoplano* costruito sul cubo di AD e su DC è uguale al *quadratoquadrato* costruito su DF, e Intieri può concludere dicendo:

> "Cum itaque demonstratum in hac curva sit, ita esse cubum AD ad cubum DF, ut eadem DF ad rectam DC, atque angulus, quem facit FD cum diametro DC sit rictus, cubus vero quadratum subsequatur, vel secundum locum post latus obtineat; ideo et haec curvam, quam superiori loco descripsi, uno gradu superat; at circulum duobus"[84].

[84] *Ibid.*, p. 65.

E allora, se si fa uso dell'ellisse invece del cerchio, la curva descritta nel modo sopra indicato supererà l'ellissi piana di due gradi.

Sarà allora facile costruire il luogo designato dall'equazione $\frac{dy^3}{b} = ax^2\text{-}x^3$; esso, infatti, come è stato mostrato sopra, è la curva che segue di un grado l'ellisse piana, o il cerchio, nel caso che d=b. Se invece l'equazione fosse stata $\frac{dy^4}{b} = ax^3 - x^4$, allora il luogo sarebbe stata proprio la curva poc'anzi descritta.

La Terza Epistola

La *Terza epistola*, indirizzata a Giovanni Michele Gabanilio, è divisa in tre parti. Nella prima Intieri espone un metodo per descrivere nel piano le infinite parabole rappresentate dalle equazioni $y^m=ax^{m-1}$, diverso dal precedente perché qui si assume come generatrice una parabola con convessità rivolta verso l'*efficiente* BD. Nella seconda parte, fa vedere come si possono descrivere le stesse parabole per mezzo delle iperboli. Infine, nella terza parte espone un ulteriore metodo per descrivere le parabole di equazione $y^{m+n}=a^mx^n$.

Relativamente alla prima parte, fa vedere innanzitutto come si possa generare la parabola cubica. A tale scopo, parte dalla considerazione che alle parabole di secondo genere appartengono certamente due curve, delle quali la prima gode della proprietà secondo cui il solido costruito sul quadrato dell'intercetta e su un segmento dato (il parametro), è uguale al cubo dell'applicata, mentre la seconda gode della proprietà secondo cui il solido costruito sul quadrato del parametro e sull'intercetta è uguale al cubo dell'applicata. Tali curve evidentemente hanno rispettivamente equazioni:

$$y^3=ax^2 \qquad\qquad y^3=a^2x\ .$$

Avendo già descritto il primo luogo nella *Prima epistola*, Intieri passa direttamente alla descrizione del secondo luogo adoperando lo stesso metodo usato in precedenza.

A tal fine, infatti, traccia, (fig. 21) la *prima parabola* HAC avente come vertice il punto A, diametro una qualunque retta AG e parametro il segmento dato EB, tale che le applicate rispetto al diametro AG, siano parallele alla tangente, AB, alla parabola nel vertice A. Fa, poi, muovere la semiretta CED in modo che essa resti costantemente parallela a se stessa e che il punto C descriva la parabola HAC trascinando nel suo moto il segmento dato EB lungo la retta AEB. Considera poi la semiretta di origine A che ruota nel piano della fig. intorno ad A in modo da risultare sempre parallela al segmento CB. Le semirette AD e CD si

intersecano in un punto D che, per effetto del moto di CED, descrive la curva oD.

Intieri dimostra che questa curva è la *seconda parabola* di vertice A coincidente con quello della parabola AC, e diametro AF. La proprietà principale di questa curva è che il cubo di una qualunque delle applicate, come DF, è uguale al solido costruito sul quadrato del parametro EB e sull'*intercetta* AF[85]. Infatti, essendo i triangoli CBE e AED simili, si ha che

$$ED : AE = EC : EB$$

e moltiplicando sia EC che EB per EB, si avrà

$$ED : AE = EC \cdot EB : EB^2 .$$

D'altra parte, essendo per la proprietà della *prima parabola*

$$EC \cdot EB = AE^2$$

segue che

$$AE^3 = ED \cdot EB^2$$

o meglio, essendo AE=DF e

$$ED = AF,$$

$$DF^3 = AF \cdot EB^2 .$$

Dunque, la parabola descritta è proprio la *seconda parabola*, per la quale, evidentemente, si possono ripetere tutte le cose già dette nella *Prima epistola*. Intieri chiama questa curva *parabola solida* o *parabola cubica*. Analogamente chiamerà *planoplana* o *parabola quadratoquadratica* la *terza parabola*, e così di seguito per tutte le altre successive parabole.

Volendo mostrare come, partendo da questa parabola, si possano costruire tutte le infinite altre, analogamente a quanto fatto nelle due precedenti epistole,

[85] È possibile costruire la curva simmetrica di AOD rispetto all'asse AF nel seguente modo: prolungato, nella fig. 1, la retta AE verso I, si faccia traslare la semiretta HLM lungo AB, in modo che H si muova lungo la parabola ACH e che il segmento IL venga trascinato lungo la sua retta di applicazione AI. Si congiungano, poi, i punti I e H in modo tale che la semiretta AM sia sempre parallela al segmento HI. Dall'intersezione di AM e di HM si ottiene il punto M che al traslare di HLM descriverà la curva AOM che sarà la curva simmetrica di AOD.

Intieri chiama: *direttrice* la curva ac, *descrivente* la semiretta ced, *efficiente* la semiretta ad, *intervallo* il segmento dato eb, *polo* il punto a

Supposto (fig. 21) che la *direttrice* AC sia la parabola (n-1)-esima e che tanto la *descrivente* CD, quanto l'*efficiente* AD si muovano come sopra detto, la curva AoD, originata da tali movimenti, avrà come *polo* il vertice della stessa parabola, come *intervallo* il parametro della *direttrice* e come *applicate* i segmenti DF, paralleli ad AB. La sua proprietà è che il solido costruito su EB^n e sull'*intercetta* AF è uguale alla potenza di ordine (n+1) dell'*applicata* DF, ossia

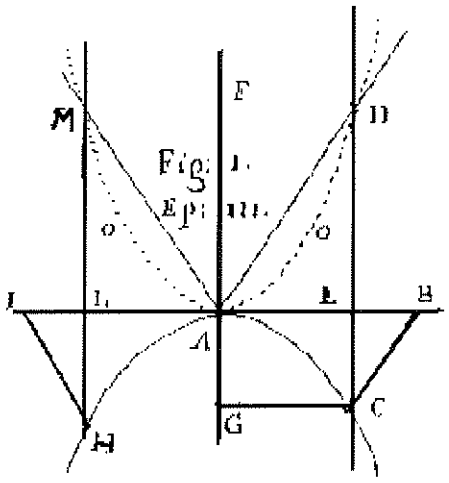


fig. 21

$$EB^n \cdot AF = DF^{n+1}$$

da cui

$$EB^n : DF^n = DF : AF .$$

Infatti, essendo i triangoli AED e CBE simili, si ha che

$$ED : AE = EC : EB$$

e, moltiplicando EC ed EB per EB^2, si ha

$$ED : AE = EC \cdot EB^{n-1} : EB^n .$$

Ma, dalla proprietà della *parabola di ordine n*

$$EC \cdot EB^{n-1} = AE^n$$

per cui

$$ED : AE = AE^n : EB^n$$

ed, essendo AE=DF e ED=AF, si ha che

$$DF^{n+1} = EB^n \cdot AF .$$

Analogamente si può costruire la curva simmetrica rispetto all'asse AF.

A questo punto Intieri propone anche un altro metodo, con il quale si possono descrivere le stesse curve servendosi, però, delle iperboli descritte nella *Seconda epistola.*

Si consideri (fig. 22) la *prima iperbole* CZ, la cui potenza sia S^2 e i cui asintoti AB e AG si intersecano ortogonalmente nel punto A. Si consideri inoltre l'angolo retto $D\hat{A}C$ libero di ruotare nel piano della fig. intorno ad A, e si faccia muovere la semiretta CED in modo da restare sempre parallela all'asintoto AG e in modo da trascinare con sé il punto C sull'iperbole CZ e il lato AC. Le semirette CD e AD si intersecano in un punto D, che, per effetto del moto della semiretta CED, descrive la curva DAM che sarà la *seconda parabola*, la cui proprietà principale è che, preso un qualsiasi punto D, e condotta DF, il cubo di DF è uguale al solido costruito sull'*intercetta* AF e sulla potenza S^2 dell'iperbole. Infatti, essendo l'angolo $D\hat{A}C$ retto, la retta AE è perpendicolare a CD, per cui

$$ED : AE = AE : EC$$

e moltiplicando tanto AE quanto EC per AE, si avrà

$$ED : AE = E^2 : EC \cdot AE .$$

Ma, per la proprietà dell'iperbole, $EC \cdot AE = S^2$, e allora

$$ED : AE = AE^2 : S^2$$

vale a dire

$$AE^3 = ED \cdot S^2$$

che è quanto si doveva dimostrare[86].

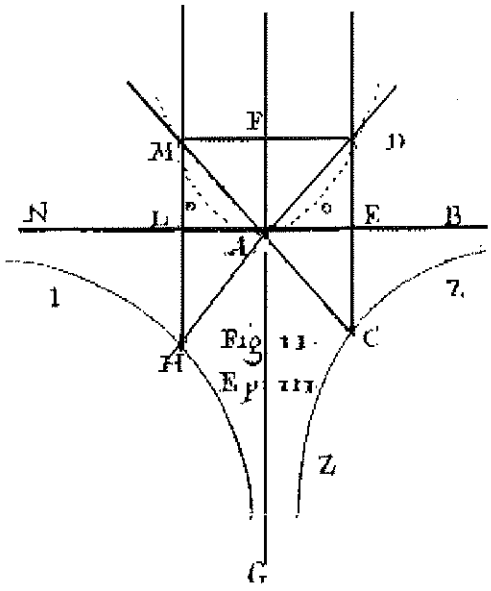


fig. 22

Anche questo metodo può essere generalizzato per descrivere una parabola di qualsiasi ordine. Per esempio, volendo descrivere la parabola di ordine n, bisognerà assumere come *direttrice* l'iperbole di ordine n-1, cioè quella tale che il solido costruito sulla potenza di ordine (n-1) di AE e su EC è uguale al solido dato. Si otterrà così, che la curva descritta dalla *direttrice*, sarà la parabola di ordine n tale che la potenza di ordi-

[86] È chiaro che analogamente può essere costruita la curva a questa simmetrica.

ne (n+1) di una qualunque delle applicate, come DF, sarà uguale al solido costruito sulla potenza dell'iperbole *direttrice* e sull'*intercetta* AF.

La dimostrazione procederà con un ragionamento del tutto identico a quello precedente. Infatti, dal momento che

$$ED : AE = AE : EC .$$

Moltiplicando AE ed EC per AE^{n-1}, si avrà

$$ED : AE = AE \cdot AE^{n-1} : AE^{n-1} \cdot EC .$$

Ma, per la proprietà dell'iperbole di ordine (n-1), $EA^{n-1} \cdot EC$ è uguale al solido dato, per cui è chiaro che il solido costruito su ED, oppure sull'*intercetta* AF e sulla potenza dell'iperbole *direttrice* è uguale alla potenza di ordine (n+1) di AE, ovvero dell'*applicata* DF, come si doveva dimostrare.

Intieri afferma che, analogamente a quanto fatto vedere nella *Prima epistola*, queste parabole possono essere descritte anche nel caso in cui il diametro considerato non sia un asse; ma non lo dimostra.

Poi, passa allo studio dei luoghi, le cui equazioni algebriche sono costituite da due soli termini, partendo dalla costruzione da quello rappresentato dall'equazione

$$x^3=a^2y$$

con x ed y incognite ed a coefficiente noto. A tale scopo fissa un opportuno sistema di riferimento.

Infatti, scrive :

> "[...] in fig. prima huius epistolae, A sit immutabile initium quantitatis indeterminatae x, quaeque per rectam positione datam AEB sese extendere intelligatur; vero supra hanc in dato angulo exsurgere concipiatur, puta AED... facillime quidam construi idem poterit [...]"

per dirla in termini moderni, Intieri assume un sistema di riferimento ortogonale avente origine nel punto A, asse delle ascisse la retta AE, asse delle ordinate la retta AF (vedi fig. 21). Prolunga, poi, AF in direzione del punto G e traccia la *prima parabola* avente per vertice A, diametro AG, parametro a e come applicate tutte le rette che da qualunque punto di questa curva sono condotte parallele alla stessa AE. Assunta, quindi, tale parabola come *direttrice*, come *polo* il vertice A, come *Intervallo* EB=a, come *descrivente* la semiretta CED e come *efficiente* la semiretta AD, descrive la curva AoD, che è che il luogo cercato. Preso, infatti, un qualsiasi punto D su AoD, condotta ED e posto AE=x e ED=y, per quanto già dimostrato precedentemente, si ha che il cubo costruito su A-

E=DF=x, cioè x^3, è uguale al solido costruito sul quadrato dell'*intervallo* EB, e su ED=AF, cioè a^2y, per cui si ha l'equazione data

$$x^3=a^2y$$

Analogamente si potrà procedere per costruire il luogo rappresentato dall'equazione

$$y^3=a^2x$$

Intieri quindi passa alla costruzione del luogo geometrico rappresentato dall'equazione

$$x^4=a^3y$$

Nella stessa fig. 21 descrive la *terza parabola*, che sarà il luogo ricercato e che avrà come vertice il punto A, come diametro AF, e per *intervallo* il segmento a, uguale al parametro della *direttrice*. Considerato poi un punto, D di quest'ultima, e tracciato il segmento ED parallelo al diametro AF, pone AE=x e ED=y. Dovendo essere la potenza di quarto ordine di AE, oppure di DF uguale al solido costruito sul cubo dell'*intervallo* e su ED, oppure su AF, vale a dire $AE^4=a^3\cdot ED$, si avrà l'equazione di partenza

$$x^4=a^3y$$

Analogamente si costruisce il luogo rappresentato dall'equazione

$$y^4=a^3x$$

e quello rappresentato dall'equazione di quinto grado

$$x^5=a^4x$$

Intieri fa poi vedere come si costruisce la parabola di equazione

$$x^5=a^3y^2$$

che appartiene allo stesso genere del precedente luogo $x^5=a^4x$. Nella fig. 1, descrive la *seconda parabola* AC di vertice A, diametro AG, *parametro* il segmento indicato nell'equazione con a, e applicate rispetto al diametro AG tutte le parallele alla retta AE. La proprietà principale di tale curva è che il cubo di una qualunque delle applicate è uguale al solido che è costruito sul quadrato dell'*intercetta* e sul parametro a. Assunta per *direttrice* la curva AC, per *descri-*

vente la retta CD, per *efficiente* AD, per *polo* A, e per *intervallo* il segmento EB=a, descrive la curva AoD, che sarà il luogo cercato. La dimostrazione, come è stato detto sopra, procede dal fatto che i triangoli CBE e AED sono simili, per cui

$$AE : ED = EB : EC$$

ovvero

$$x : y = a : EC$$

cioè

$$EC = \frac{ya}{x}$$

Poiché il solido costruito sul quadrato di EC e sul parametro della parabola AC è uguale al cubo di GC, ovvero AE, cioè

$$\frac{y^2a^2}{x^2} \cdot a = x^3$$

da cui si avrà l'equazione

$$x^5 = y^2a^3$$

che è il luogo cercato.

Di questa parabola il punto A sarà il vertice, AF sarà il diametro, a il parametro e le applicate invece saranno tutte le parallele ad AB. La proprietà principale di questa curva è che la potenza di quinto ordine di una qualunque delle applicate è uguale al solido costruito sul cubo dell'*intervallo* EB e sul quadrato dell'*intercetta* AF.

Essendo, infatti, i triangoli DEA ed CBE simili si ha che

$$ED : AE = EC : EB$$

e quindi

$$ED^2 : AE^2 = EC^2 : EB^2$$

da cui

$$ED^2 : AE^2 = EC^2 \cdot EB : EB^3$$

Ma, per la proprietà della parabola di secondo ordine si ha che

$$EC^2 \cdot EB = AE^3$$

Quindi

$$ED^2 : AE^2 = AE^3 : EB^3$$

Ossia

$$AE^5 = ED^2 \cdot EB^3$$

Analogamente si può ottenere la costruzione dei luoghi geometrici rappresentati da equazioni algebriche di sesto grado.

Nella precedente epistola Intieri aveva costruito i luoghi di 7° grado rappresentati dalle equazioni

$$x^7 = ay^6 \qquad x^7 = a^2y^5 \qquad x^7 = a^3y^4$$

Ora fa vedere come si possano costruire i luoghi rappresentati dalle equazioni

$$x^7 = a^6y \qquad x^7 = a^5y^2 \qquad x^7 = a^4y^3$$

Inizia con il far vedere come si costruisce il luogo rappresentato da

$$x^7 = a^5y^2$$

la cui curva potrà essere descritta, usando sempre la fig. 1, in cui, posto tutto come sopra, la *direttrice* AC sarà quella descritta nel luogo precedente, cioè tale che la potenza di sesto ordine di una qualunque delle applicate, come GC, sia uguale al solido costruito sul quadrato dell'*intercetta* e sul cubo del segmento dato EB, la curva AoD sarà quella cercata. Quest'ultima avrà come proprietà che la potenza di sesto ordine di una qualunque delle *applicate*, come DF, sarà uguale al solido costruito sulla potenza di quinto ordine dell'*intervallo* e sul quadrato dell'*intercetta* AF. Poiché

$$ED^2 : AE^2 = EC^2 : EB^2$$

si ha che

$$ED^2 : AE^2 = EC^2 \cdot EB^3 : EB^5$$

da cui per la proprietà della parabola *direttrice*, essendo $EC^2 \cdot EB^3 = AE^5$, si ha che

$$ED^2 : AE^2 = AE^5 : EB^5$$

per cui, posto EB=a, AE=x e ED=y, si ha

$$y^2 : x^{2=} x^5 : a^5$$

vale a dire

$$x^7 = a^5 y^2$$

che è proprio ciò che si doveva dimostrare.

Il luogo che resta da costruire è

$$x^7 = a^4 y^3 .$$

Intieri lo fa assumendo come *direttrice* AC la *terza parabola*, cioè quella in cui la potenza di quarto ordine GC è uguale al solido costruito sul cubo dell'*intercetta* e sul parametro, ossia sull'*intervallo* EB. Operando come in precedenza si ottiene che il luogo cercato è la curva AoD. Infatti preso un qualsiasi punto sulla stessa, come D, si ha che

$$EC = \frac{ay}{x}$$

dove a è l'*intervallo*. Ora, poiché il cubo di questa EC per l'*intervallo* a, è uguale alla potenza di quarto ordine di AE, si avrà

$$\frac{a^3 y^3}{x^3} \cdot a = x^4$$

vale a dire un'equazione di questo tipo

$$x^7 = a^4 y^3$$

come si doveva dimostrare.

Con lo stesso ragionamento possono essere costruiti tutti quei luoghi, le cui equazioni si elevano a qualsiasi grado.

Intieri, a questo punto, afferma che questi stessi luoghi possono essere composti anche assumendo come direttrici le iperboli; ma non lo fa vedere. In più, afferma che con lo stesso metodo sopra adoperato possono essere composti an-

che i luoghi rappresentati da equazioni costituite da più di due termini. Tuttavia anche in questo caso egli lascia al lettore la relativa dimostrazione.

È inoltre convinto che, potendosi costruire facilmente tutti i luoghi di terzo e quarto grado, possono essere altresì costruiti facilmente anche tutti i rimanenti, qualunque sia il loro grado. Analogamente, egli afferma che, se si trovano le proprietà delle curve che appartengono al secondo genere, possono essere trovate anche quelle relative alle altre curve di ordine superiore. Dimostra ciò riportando il seguente esempio.

Essendo stato dimostrato nella fig. 8 della *Prima epistola* che, considerato il triangolo isoscele AEV, assunto come *polo* il punto A, come *descrivente* la semiretta CBD, che si muove mantenendosi costantemente parallela al lato EA in modo che C scorra sul lato EV, preso come *intervallo* un qualunque segmento assegnato BI, come *efficiente* la semiretta AD che si muove sempre parallela alla retta CI, Intieri fa vedere che la curva ADV descritta dall'intersezione della *descrivente* e dell'*efficiente* è tale che, preso un qualsiasi punto D su di essa, e condotta per esso la semiretta BD parallela ad EA, il rettangolo costruito su AB e su BV è uguale al rettangolo costruito su BD e su BI. Se, nella fig. 8, il segmento EV della stessa *Prima epistola* non fosse una retta, ma la *prima parabola* di vertice V, diametro AV, *intervallo* BI e con le *applicate* parallele a CBD, la curva descritta ADV sarebbe tale che, preso un punto D su di essa, e condotta BD, il solido costruito sul quadrato di AB e su BV è uguale al solido che è costruito sul quadrato di BD e su BI. Se invece si considera come *direttrice* VCE la *seconda parabola,* si genera la curva ADV, di vertice V, diametro AV, e parametro uguale all'*intervallo* BI, nella quale, preso un qualsiasi punto, come D, e condotta BD, il solido costruito sul cubo di AB e su BV sarà uguale al solido costruito sul cubo di BD e sull'*intervallo* e così via.

Intieri dimostra, poi, che, con lo stesso metodo, può essere descritta la curva che gode della proprietà che il solido costruito sul quadrato di AB e su BV è uguale al solido costruito sul quadrato dato e su BD.

Per far vedere ciò descrive la *prima parabola* ACE, di vertice A, diametro AG, e parametro uguale a BI, e la sua tangente AV nel punto A (fig. 23). Su questa curva, assunta come *direttrice*, fa muovere la *descrivente* CBD parallelamente al diametro AG. Considera, quindi, il segmento AV, assume V come *polo*, il parametro della parabola *direttrice*, ossia il segmento BI, come *intervallo*, VD come *efficiente* (che sia sempre parallela alla retta CI), e descrive la curva ADV che gode della proprietà secondo la quale, preso un qualsiasi suo punto D, e condotta BD come al solito, il solido costruito sul quadrato di AB e su BV è uguale al solido costruito sul quadrato dell'*Intervallo* e su BD. E infatti essendo simili i triangoli DBV e CBI, si ha che

$$BV : BD = BI : CB$$

e quindi

$$BV : BD = BI^2 : BI \cdot CB$$

E poiché per la proprietà della *prima parabola* AC, $BI \cdot CB = AB^2$, si ha

$$AB^2 \cdot BV = BI^2 \cdot BD$$

come si doveva dimostrare.

Per quanto è stato dimostrato nella prima epistola risulta allora chiaro che, se il punto B divide AV in parti tali che AB sia i due terzi di AV, la perpendicolare BD innalzata da B alla curva è la più grande di quelle che possono essere condotte da un punto di AV alla curva stesa. Sicché, la parallela per D ad AV incontrerà la curva ADV solo nel punto D, ossia sarà ad essa tangente.

Allo stesso modo, se la curva *direttrice* ACE fosse la *seconda parabola* descritta precedentemente in questa stessa epistola, nella quale il cubo di qualunque delle applicate è uguale al solido costruito sull'*intercetta* e sul quadrato del parametro BI, e si assumessero per *descrivente*, *intervallo*, ed *efficiente* le stesse di prima, la curva così descritta godrebbe della proprietà che, il solido costruito sul cubo di AB e su BV è uguale al solido costruito sul cubo dell'*intervallo* e su BD.

Infatti, per la similitudine dei triangoli DBV e CBI si ha che

$$BV : BD = BI : CB$$

da cui

$$BV : BD = BI^3 : BI^2 \cdot CB$$

E poiché per la proprietà della parabola *direttrice* ACE il solido costruito sul quadrato di BI e su CB è uguale al cubo di AB, si ha

$$BV : BD = BI^3 : AB^3$$

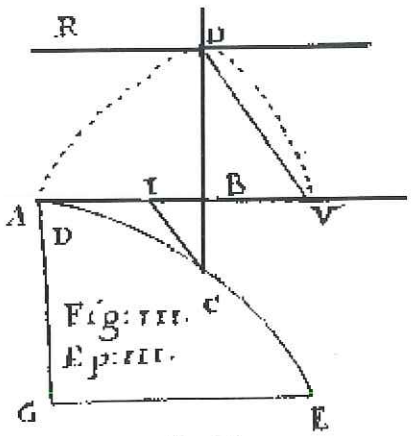


fig. 23

che è quanto si voleva dimostrare.

Allo stesso modo se BV fosse la quarta parte di tutto AV, e se fosse condotta da B la perpendicolare BD alla curva, questa sarebbe la massima tra tutte quelle che da qualunque punto di AV si possono condurre alla curva. Condotta allora per D la retta DR parallela alla retta AV, questa toccherebbe la curva nel solo punto D, ovvero sarebbe tangente alla curva.

E parimenti se la curva *direttrice* AC fosse la *terza parabola* descritta in questa epistola. In tal caso la curva ADV sarebbe tale che il solido costruito sulla potenza di quarto ordine di AB e su BV è uguale al solido costruito sulla potenza di quarto ordine dell'*intervallo* e su BD.

Dunque, una volta acquisito il metodo delle potenze o delle dimensioni a seconda delle curve che si considerano, risulta chiaro che le stesse proprietà della *prima parabola*, ovvero della prima *iperbole*, si adattano anche per quelle di ordine superiore. Da questo, quindi, Intieri è indotto a credere che possano essere scoperte le proprietà di qualunque curva, purché siano pertinenti alle curve del *secondo genere*.

Il volume di Intieri fu recensito negli *Acta eruditorum*[87]. L'estensore della nota colse a pieno la novità di quest'opera indicata come uno dei contributi più interessanti alla teoria della costruzione delle equazioni.

> "Regulae cartesianae de construendis aequationibus – tra l'altro scriveva – ad quintam vel sextam dimentionem assurgentibus multo faciliorem substituit, eas nempe sine nulle preparatione constuendi per Circulum et hyperbolam secondi generis. Monet autem (quod in Actis nostris primis notavit Bernoullius) non bene a Cartesio problematum un certas classes divisionem institutam esse"[88].

Montucla, invece, ignorò questo trattato limitandosi a citare Intieri solo per l'*Apollonius ac Serenus promotus*[89], opera che, per altro, Montucla confessava di non aver trovato e quindi di non aver letto. E tuttavia ciò non gli aveva impedito di emettere su Intieri un giudizio a dir poco frettoloso:

> "Il est encore divers Géomètre Italiens, contemporains de ces premiers ou plus récens, qu'on peut citer comme ayant resté attachés à la Géométrie ancienne. De ce nombre est le Géomètre Intieri, Neapolitain, dont on a un livre intitulé, Apollonius ac Serenus promoti (Neap. 1704. 4). Mais ne l'ayant jamais rencontré, J'ignore jusq'à quel point ce Géomètre a été au-de-là de ce qu'on savoit déjà sur cette matière"[90].

Lo stesso *Apollonius*, infatti, per quanto opera legata ai canoni classici della trattatistica delle coniche denotava in più parti la formazione prevalentemente analitica di Intieri.

---

[87] T. V (1706), p. 271.

[88] *Ibid.*

[89] Quest'opera fu recensita negli *Acta eruditorum* 1704.

[90] J.E. MONTUCLA, *Histoire des mathematiques dans laquelle on rend compte de leur progres depuis leur origine jusqu'à nos jours, ou' l'on expose le tableau et le developpement des principales decouvertes, les contestations qu'elles ont fait naitre, et les principaux traits de la vie des mathematiciens le plus celebres*, Paris, chez C.Ant. Jombert, 1758, t. III. p. 10.

6. Agostino Ariani

Molte delle notizie sulla vita e le opere di Agostino Ariani si ricavano dalle *Memorie della vita e degli scritti di Agostino Ariani*, scritte dal figlio Vincenzo[91], il quale dice di essere stato incitato a scrivere queste *Memorie* da Jacopo Facciolati, professore di Logica a Padova, il quale in una lettera del 1754 gli aveva scritto:

> "Quod de Patris tui vita, studiisque scrivere cogitas, facis pro boni, gratique filii officio. Ille tibi mortalem vitam detit, tu immortales reddes.[.....]"[92].

Vincenzo aggiunge anche che, avendo perso il padre quando era ancora molto piccolo, per adempiere alla sua opera aveva dovuto ricorrere all'aiuto di numerosi uomini illustri che avevano conosciuto il padre ed avevano avuto modo di apprezzarlo.

Promogenito di una famiglia di 6 figli, Agostino nacque a Napoli il 5 settembre 1672. Per compiacere la famiglia si avviò agli studi giuridici e all'età di 16 anni, nel 1688, conseguì la laurea in giurisprudenza. In tali studi fu assistito prima da Giovanni Lionardo Rodoerio e poi da D. Niccolò Caravita, padre del celebre avvocato Domenico Caravita al quale in seguito Agostino dedicherà un'edizione con proprie note, ma che non porta il suo nome, del commento agli *Elementi* di Euclide, della quale ci interesseremo qui in seguito[93]. Dopo aver esercitato per qualche anno la professione di avvocato, decise di seguire la sua vocazione e si dedicò allo studio dalla filosifia e dalla matematica. Aveva appreso i 6 libri degli *Elementi* di Euclide da Guglielmo di Linghax, cavaliere fiammingo, amico di suo padre che dimorò per molto tempo in casa sua e che per gratitudine verso l'amico, avviò Agostino allo studio della geometria. Secondo quanto scrive Vincenzo, il padre Agostino affrontò poi da solo lo studio della geometria solida. Passò subito dopo a quello delle coniche di Apollonio, che studiò direttamente dal testo greco e che in seguito approfondì sui trattati di Guillame de L'Hospital[94], di Philippe de La Hire[95] e di Jacopo Milnes. Si rivolse poi allo studio dell'algebra e dell'analisi algebrica, studiando le opere di Tar-

[91] Cfr. V. ARIANI, *Memorie della vita e degli scritti di Agostino Ariani*, Napoli, nella stamperia di Antonio Longobardo, 1782.

[92] La lettera è stata pubblicata in: J. FACCIOLATI, *Epistolae Latinae*, Patavi, Ex Typographia Seminarii, 1745, pag.278 ed è stata citata in V. ARIANI *Memorie*, cit., p. 2.

[93] Cfr. *Euclidis Elementorum libri sex. Ex traditione Federici Commandini. Nonullis adjunctis notis accuratissimis*, Neapoli, Ex typographia Felicis Mosca, Sumptibus Antonimi Porpora, 1728.

[94] Cfr. G.F.A. DE L'HOSPITALE, *Traite analytique des sections coniques et deur usage pour la resolution des equations dans le problemes tant detrminez qu'indeterminez*, A Paris, chez, Montalant, 1720.

[95] Cfr. PH. DE LA HIRE, *Nouveaux elemens des sections coniques, les lieux geometriques, la construction, ou effection des equations. Par m. de La Hire, de l'Academie Royale des Sciences*, Paris, Cusson, Jean Baptiste & Witte, Pierre, 1701.

taglia, Clavio, Maurolico, Comandino, Viète, Ghetaldi, Descartes, Fermat, Sluse, Schooten, Milet de Chalet, Sturm, Tacquet. Ma soprattutto, – scrive Vincenzo – la geometria che studiò con maggiore interesse

> "fu quella di Renato, la quale diede occasione, ed argomento di meditare a non pochi Matematici oltremontani, e sopra di cui oltre pensando alla maggiore altezza pervenne in Londra il Cavaliere Isacco Newton"[96].

Non di meno coltivò l'astronomia. Lesse e studiò il *De revolutionibus* di Copernico, l'*Almagestum novum* di Riccioli, gli *Elementi astronomici* di David Gregory, l'*Introduzione alla vera astronomia* e le *Lezioni fisiche* di Giovanni Keil, le istituzioni astronomiche di Giovanni Mercatore, le opere di Abatengio, di Metio, di Ismaele Bulliando, di Christian Longomontano, di Tycho Brahe, di Keplero, di Christian Huygens, il *Sistema delle comete* di Jacob Bernoulli,

> "e finalmente riposò sulle fatiche immortali del grande Galileo, che può dirsi il vero Astronomo d'Italia e 'l Maestro di non pochi valentuomini oltremontani"[97].

Nello stesso tempo scrutava il cielo con un telescopio che si era fatto venire da Londra e frequentava, insieme ad altri uomini illustri, la casa di Antonio Monforte, tra i primi a Napoli ad interessarsi di astronomia. Passò poi all'*Analisi degli Infiniti* studiando le opere di Niewentit, di Volsio e soprattutto i *Principia* e l'*Arithmetica universale* di Newton. Fu di fatto il primo a introdurre a Napoli gli studi newtoniani.

Il 30 gennaio del 1695, a soli 23 anni, gli fu conferita la cattedra di Matematica, succedendo al P. Agostino di S. Tommaso d'Aquino delle Scuole Pie.

Federico Amodeo, nella sua *Vita matematica napoletana* dice che nella lettera del Facciolati a Vincenzo Ariani, si legge che Agostino aveva ottenuto la cattedra di Matematica per concorso[98], ma che da una relazione fatta a S. M. Cattolica sopra la cattedra dello Studio di Napoli, si rileva che nel 1700 la Cattedra di Matematica era quadriennale con stipendio di 110 ducati e che la teneva, senza concorso Agostino Ariani[99].

Nell'accademia di Medinacoeli Ariani tenne varie dissertazioni:

Intorno al Mar Caspio (16 maggio 1698)
Delle perle e della di loro generazione (23 maggio 1698)

---

[96] V. ARIANI *Memorie*, cit., pp. 75-76.

[97] *Ivi*, p. 94.

[98] Cfr. F. AMODEO, *Vita matematica Napoletana*, Napoli, Giannini e figli, 1905 parte I, p. 6 nota n. 1. .In verità nella citata lettera di Facciolati non vi è alcun riferimento circa la cattedra di Matematica tenuta da Ariani.

[99] Purtroppo non ci è stato possibile reperire il documento ufficiale (che attesti la veridicità della situazione di quell'epoca), posseduto dal Grande Archivio di Napoli, in quanto è andato distrutto nell'incendio causato dai Tedeschi nella loro ritirata del 1943.

Intorno alle Mofete (30 maggio 1698)
Sopra la vita di Ottone Imperatore (18 aprile 1699)
Sopra la vita di Ottone Imperatore (16 maggio 1699)
Sopra la vita di Vitello Imperatore (30 maggio 1699)

Dopo queste tenne un *Discorso geometrico col quale generalmente si dimostra la Diffinizione quinta del libro sesto de gli Elementi di Euclide*[100], e tre letture *In lode della Geometria e intorno alla_utilità della suddetta scienza* che portano le seguenti date:

la 1ª il 14 agosto 1700
la 2ª il 15 gennaio 1701
la 3ª il 21 maggio 1701

Nel frattempo aveva scritto anche (il 29 aprile del 1700) un *Ragionamento Storico–Politico sulla vita di Aurelio Alessandro Severo XXV – Imperatore di Roma.*

In seguito scrisse sonetti dedicati a diverse persone tra cui il Viceré, S.M. Cattolica, S.E. ecc...

7. Il discorso di Agostino Ariani «intorno all'utilità della geometria».

L'affermazione dell'*ars analytica* cartesiana a Napoli fu accompagnata da un contorno di aspre polemiche tra i fautori del nuovo metodo geometrico e i sostenitori della purezza del metodo sintetico euclideo degli antichi. In realtà la geometria cartesiana non sembrava affatto rispondere allo statuto di scienza stabilito da Aristotele negli *Analitici secondi* al quale aderivano perfettamente gli *Elementi* di Euclide, secondo il quale è scienza solo ciò che è passibile di dimostrazione e una scienza dimostrativa si fonda su principi indimostrabili certi ed assoluti. Nella geometria cartesiana non esistono assiomi né teoremi da dimostrare; essa si fonda sull'assunto che una curva è un'equazione e viceversa e sostituisce la deduzione geometrica della dimostrazione sintetica con l'algoritmo algebrico. Possedeva una tale geometria requisiti di scienza? Gli anticartesiani non riscontrando in essa i precetti di scienza sanciti da Aristotele la tacciavano di essere priva di fondamenti certi. Di contro, a sostegno della fondatezza di tale scienza, i cartesiani rabattevano che con essa non solo si ritrovavano in modo assai più rapitdo e semplice tutti i rsultati stabiliti dalla geometria degli antichi, ma si potevano in più risolvere con altrettanta rapidità e semplicità numerosi altri problemi che, fino ad allora, con la geometria sintetica degli antichi non si era stati in grado di risolvere, ovvero erano stati risolti solo con grande fatica. Questa polemica si era andata sovrapponendo ad un'altra discussione apertasi a

[100] Di questa lettura non ci è pervenuta traccia. Data l'importanza dell'argomento che nel suo testo degli *Elementi* qui nel seguito analizzato è poco approfondito, ci resta la curiosità di conoscere la via da lui intrapresa in merito.

Napoli nella secondà metà del secolo XVII con il diffondersi di una teoria geometrica zenonista e anti-euclidea che aveva alimentato un forte scetticismo nei confronti della scienza geometrica[101]. In questo ambito si colloca il discorso *Intorno all'utilità della geometria*[102] pronunciato da Agostino Ariani nell'Accademia di Medinaceli; un discorso costituito da tre parti, *Lezione Prima*, *Ragionamento Secondo* e *Ragionamento terzo*, con lo scopo dichiarato propagandere i pregi della geometria, scienza troppo spesso ignorata e «negletta», e di far conoscere l'utilità che da essa poteva derivare anche a quanti intendevano onseguire professioni che apparentemente poco o nulla avevano a che fare con essa. Per questo Ariani si rivolgeva principalmente ai giovani perché

> "i di loro animi della nobiltà ed utilità di esse scienze s'invaghissero, ed allo studio delle medesime maggiormente s'incoraggiassero"[103].

Come detto nella breva biografia di Ariani, il *Discorso* fu letto in tre successive sedute dell'Accademia e per questa ragione consta di tre parti: *Lezione Prima, Ragionamento Secondo, Ragionamento Terzo*.

La *Lezione Prima* era dedicata a mostrare i vantaggi che possono venire alla mente umana dall'acquisizione di un abito geometrico. Lo studio della geometria – spiega Ariani – è indispensabile a bene educare la mente umana, a predisporla alla giusta razionalità, a fornirle quelle doti di discernimento necessarie a distinguere il vero dal falso, a dotarla degli strumenti più adatti per non fermarsi alle prime conoscenze superficiali e parziali, ma risalire all'essenza delle cose al fine di acquisire i principi della scienza generale «dalla quale tutte le altre dipendono»[104]. Geometria, – continua Ariani – etimologicamente significa scienza della terra ma, nel tempo, questo termine ha acquisito il significato più generale di scienza delle grandezze cioè di «tutto ciò che si può accrescere o diminuire»[105]. Il suo maggior pregio è quello di studiare le grandezze non nella loro realtà fisica, ma nella loro essenza, cosa che consente di rilevare non solo le proprietà delle stesse in assoluto, ma anche quelle relative al rapporto reciproco con altre grandezze. È proprio la ricerca di tali reciproche relazioni che «c'insegna a conoscere la verità, e ci dà il metodo di ritrovarla, et a perfettamente dimostrarla»[106]. Insomma il metodo di indagine geometrica perfeziona la mente umana e conduce gli uomini a un diritto uso della ragione. Qui, con chiaro riferimento alle teorie gnosologiche cartesiane, Ariani spiega che la mente umana consiste

---

[101] Cfr. R. GATTO, *Tra scienza e immaginazione. Le matematiche presso il collegio gesuitico napoletano (1552-1670 ca.)*, Firenze, Olschki, 1994, pp. 235-261.

[102] Il discorso è stato trascritto da. M. DONZELLI in appendice al suo *Natura e humanitas nel giovane Vico*, Napoli, Istituto Italiano per gli studi storici, 1970, pp. 164-188.

[103] *Ivi*, p. 164.

[104] *Ivi*, p. 165.

[105] *Ivi*, p. 166.

[106] *Ibid.*

nella pura «cogitazione», è capace di elaborare concetti, emettere giudizi, fare ragionamenti. E poiché i ragionamenti non sono altro che «ragioni di ragioni», ossia ragioni che si deducono da altre precedentemente dimostrate o giustificate in virtù di principi generali, ne segue che la geometria che procede per successive deduzioni da principi veri ed evidenti «eziandio anche ad un rustico», può insegnare «il diritto uso ed il verace discernimento in ogni discorso, ed intorno a qualunque materia di ragionare»[107]. Ecco perché ragionando geometricamente si può scoprire ogni verità nascosta senza incorrere nel pericolo di essere ingannati «dalla moltitudine delle massime oscure ed incerte, che sono i principi de' falsi ragionamenti, ne' quali sovente volte sogliono gli uomini inciampare»[108]. Il riferimento al dogmatismo della scolastica è evidente. La geometria insegna la via per esercitare la *libertas philosophandi* rivendicata dai moderni, e conduce a riconoscere la verità. I ragionamenti umani, diversamente dalla deduzione geometrica, possono nascere da falsità o da principi oscuri e possono svolgersi con inferenze non sempre logicamente conseguenti. Solo l'esercizio della geometria con la chiarezza e l'esattezza delle sue dimostrazioni può educare la mente umana al giusto raziocinio «in qualunque scienza, e in qualunque altro umano divisamento»[109]. Vero è che la logica insegna le regole per poter bene istruire un ragionamento e giungere alla scoperta della verità, ma queste regole, che consistono solo nella pratica del ragionare, non possono essere di reale giovamento nelle continue occasioni del discorrere quotidiano. Esse, infatti, sono numerose e richiedono un'applicazione costante della nostra mente; in più non insegnano a distinguere i principi veri da quelli falsi[110] perché il ragionamento logico, per quanto corretto, può partire anche da premesse false[111].

Ma perché, allora, lo studio della geometria veniva trascurato dai giovani? Per spiegare ciò Ariani ricorreva al mito platonico della caverna. L'anima umana è nei primi anni dell'infanzia «tutta immersa e seppellita nella materia del corpo»[112]; essa allora comincia col percepire e concepire le sole idee derivanti dalle cose circostanti scoperte dai sensi. Gli uomini sono allora naturalmente portati alla conoscenza delle cose sensibili ed esteriori, ovvero ad una conoscenza parziale e incompleta delle stesse cose, sicché non deve meravigliare il fatto che la maggior parte dei giovani si applicano soltanto «a quegli studj e a quelle cose che solo i sensi possono lusingare», e soltanto in pochi si dedicano alla ricerca di una verità puramente spirituale.

---

[107] *Ibid.*

[108] *Ivi*, p. 167.

[109] *Ibid.*

[110] *Ivi*, p. 168.

[111] Il confronto con la logica non era casuale. I sostenitori dell'aristotelismo avevano a lungo contrapposto il procedimento logico sillogistico a quello geometrico deduttivo, proclamando il primato del primo sul secondo.

[112] *Intorno all'utilità*, cit., p. 168.

> "Or questo amore e questo diletto della nuda verità – continua Ariani – e questo allontanamento dell'anima dall'immagini corporee dalla cieca corrispondenza de' sensi s'ottiene perfettamente per mezzo delle pure contemplazioni di questa scienza"[113].

Incita, allora, i giovani a coltivare la scienza geometrica, la sola capace di fare acquistare alla mente maggiore libertà, di consentirle di formulare idee chiare e distinte, di connetterle tra loro per costruire un discorso complesso, o di separarle e analizzarle nei loro dettagli; permettendo così di spogliare le cose dal loro abito materiale e sensibile e di risalire alla loro essenza. L'esercizio della geometria, aggiungeva Ariani, «rende forte ed attenta la nostra mente»[114], le amplia le facoltà cognitive, la predispone a mettere ordine tra le idee dal momento che

> "è cosa propria delle geometriche verità il dipendere da una lunga catena de' principj ch'egli bisogna seguitare per arrivare alla conseguenza; e poiché questa conseguenza riceve tutta la sua forza da questi principj, egli fa di mestieri che la mente vegga nello stesso tempo molte cose distintamente, e ciò che è chiaro, e ciò che non è chiaro, le quali cose non si possono fare senza distendere e portare la sua veduta più lontano che si suole nelle altre ordinarie sue operazioni"[115].

A questo punto Ariani fava un esplicito riferimento all'analisi algebrica cartesiana, cioè all'uso dei «meravigliosi metodi» della geometria accoppiata all'aritmetica e all'algebra, che consentono trovare vie brevi e universali per ridurre idee diverse di molte cose ad una sola idea, e di intendere facilmente molte più cose di quanto normalmente se ne comprendano. Ordinando le idee analiticamente si possono comprendere agevolmente altre discipline che richiedono meno applicazione

> "come avviene che avvezzandosi il corpo umano a portare un grosso peso, che il medesimo poi quasi non senta quello d'un altro più leggiero"[116].

Nel *Ragionamento Secondo* Ariani si proponeva di dimostrare quanto la geometria fosse utile «all'acquisto ed alla condotta d'una ben intesa e ragionevole filosofia»[117]. Qui cartesianesimo e galileismo si fondono insieme nell'atto di dimostrare che la geometria era la chiave interpretativa del «sì vasto libro della natura»[118]

---

[113] *Ivi*, p. 169.
[114] *Ivi*, p. 170.
[115] *Ivi*, pp 170-171.
[116] *Ivi*, p. 172.
[117] *Ivi*, p. 165.
[118] *Ivi*.

"Girate gli occhi per qualche spazio d'intorno – dice Ariani - e le cose di questo mondo visibile, cioè a dire quelle che nel cielo tutto il giorno regolarmente ci si muovono intorno e che nella terra del continuo produr si veggono, attentamente considerate: che ritrovando tutte e quante queste si sono sotto il genere della grandezza comprese, e non di altro che nella varia figura e diverso movimento di esse e delle loro parti fra loro divisarsi diversamente, chiaramente conoscerete che non potendosi per modo alcuno la natura e le varie proprietadi delle grandezze, e delle figure e de' moti (dalla diversità delle quali tre cose tutti gli effetti e le varie apparenze delle cose naturali dipendono) da niun'altro che da' soli geometri considerare, esser più che necessario nell'investigazion della natura, o sia per la condotta d'una ben intesa e ragionevole filosofia, lo studio della scienza delle grandezze e delle figure geometriche. E se più in dentro in risguardo col pensiere v'inoltrate, e questo modo creato nel regolato procedimento de' suoi moti e de' suoi effetti (onde dipendono tutte le diverse cose che noi veggiamo, e che nella fisica si divisano) in considerando vi fermerete, chiaramente conoscerete questo mondo non esser altro che una grandissima e ben intesa machina, in tal modo dal suo Creatore concepita e disposta, che col continuo e regolato movimento del tutto e delle sue parti meravigliosamente produci tutti quagli effetti che, come s'è detto, nel cielo e nella terra del continuo da noi si veggono; delle quali in qual modo mai se ne potrà rendere, benché all'oscuro, piccola ragione, non che a fondo penetrare, senza il lume della scienza meccanica, cioè a dire senza il fondamento della geometria, dalla quale solo dipende[119]?

Solo la geometria, considerando il corpo nella sua pura essenza, «cioè la sua lunghezza, larghezza, e profondità»[120], era in grado di descrivere il mondo fisico, di procedere a una compiuta analisi «del moto in generale ed in particolare», di determinarne le proprietà, le leggi che regolano il rapporto tra quantità di materia estensione e forma, di studiarne e comprenderne gli effetti fisici mediante dimostrazioni rigorose nelle quali entrano in gioco la grandezza del corpo, la proporzione delle sue parti, la sua configurazione geometrica. «Geometricamente filosofando» – continuava Ariani – ad esempio, potremorenderci conto del differente peso specifico «di tutti i diversi corpi che si ritrovano nella terra»[121].

Ariani analizzava i rapporti tra geometria e fisica, discipline legate insieme da un solido vincolo dal quale non si poteva prescindere essendo esse «non sì

[119] *Ivi*, pp. 172-173.

[120] *Ivi*, p. 174.

[121] Scrive Ariani: "Per dimostrazion geometrica conosceremo che una particella di mercurio, che ragionevolmente si suppone quasi simile ad una d'acqua, avvenga che questa sia più piccola, racchiuda sotto la sua superficie maggior estensione di corpo, o sia di materia, che a proporzione non ne racchiude una di acqua; dimostrandosi da' geometri che l'estensione, o sia la materia de' corpi simili nella figura, sia nella sesquialtera proporzione delle loro superficie; o pure secondo altri autori, che suppongono le parti del mercurio rotonde, saranno queste più solide di quelle dell'acqua, o di alcun'altra materia di figura dissimile nelle sue parti, o di superficie non maggiore: perché fra tutte le figure solide la sferica è quella che sotto alla sua superficie racchiude maggior materia, come quella che fra tutte le altre figure d'egual superficie è la più capace, come eziandio da' geometri di dimostra" (*Ibid*).

divise se non che come il genere dalla sua specie». Anche se la natura presenta i suoi fenomeni sotto aspetti particolari, bisognava essere in grado di cogliere i principi generali che ne regolano i comportamenti. Non si possono, infatti, comprendere gli effetti particolari se non si conoscono in universale le cause e le regole dei fenomeni stessi; conoscenza che può essere conseguita solo attraverso l'investigazione geometrica, senza la quale è come «un voler caminare per entro a' riposti segreti della natura alla cieca e senza gambe»[122]. Il movimento dei corpi – continuava Ariani –, segue precise leggi, quelle che il «gran Galileo» aveva geometricamente dimostrato nei suoi *Dialoghi* costruendo «senza fallo una nuova scienza di moto, non mai da niun antico concepita»[123]. Egli aveva aperto la strada per la quale si sono, «con più lume di geometria incamminati» Wallis, Roberval, Borelli e soprattutto Newton «celebre matematico de' nostri tempi nell'Inghilterra, uomo di somma dottrina e d'ingegno sollevato»[124].

Come poi poter studiare la composizione dei moti se non mediante l'uso della geometria che, sola, consentiva di determinare la traiettoria del mobile soggetto a moti differenti; come calcolare l'accelerazione di un moto, come spiegare le ragione del galleggiamento dei corpi, «della gravità, del flusso e riflusso del mare, de' mirabili effetti della calamita, e della materia del fuoco»[125]?

> "Chi tali cose trar vorrebbe da'suoi principi, vedrebbe chiaramente il tutto dipendere dal diverso moto e dalla diversa figura della materia creata, la quale. Del continuo movendosi in giro, e dal centro del suo moto sforzandosi di scostare, fa sì che i corpi in varie guise movendosi e divisandosi si rieduchino in diversi luoghi del cielo e della terra, alla loro agitazione proporzionati; onde tutte le testè mentovate cose e tutti li rimanenti effetti della natura dipendono e si produchino. Ora questo movimento in giro della materia celeste, e questa forza che have la medesima di scostarsi sempre dal centro, riceve tutto affatto il suo fondamento da non poche geometriche veritadi"[126].

Per non dire poi dell'ottica, dei suoi fenomeni, delle sue leggi, dei colori, dell'iride, tutte cose meravigliose che talvolta potevano apparire inspiegabili e che, invece, trovavano nella geoemtriala loro spiegazione razionale.

Nel *Ragionamento Terzo* Ariani confuta le tesi degli scettici che, "tutti immersi nella materia", mettevano in dubbio la certezza delle scienze geometriche. Ariani si riferisce in particolare alla tradizione scettica da Sesto Empirico a Hobbes i cui argomenti contro la certezza della matematica erano da lui definiti il prodotto del "cieco e fallace pregiudicio de' sensi"[127]. Questi, infatti, erano fautori di una geometria che considerava gli oggetti nella loro fisicità e non ide-

---

[122] *Ivi*, p. 175.
[123] *Ivi*, p. 176.
[124] *Ivi*, p. 176.
[125] *Ivi*, p. 178.
[126] *Ivi.*
[127] *Ivi*, p. 180.

alizzati attraverso l'astrazione della materia dalla forma. Riferendosi alla distinzione cartesiana tra *res cogitans* e *res estensa*, Ariani puntualizzava la differenza tra mente e corpo. La prima, dice, è:

> "una sostanza che pensa, in varie guise le sue cogitazioni formando: cioè intendendo, dubitando, affermando, negando, volendo, non volendo, immaginando, sentendo e ricordandosi"[128]

la seconda, invece, ribadisce essere

> "una sostanza, la cui essenza consiste solamente nell'esser lungo, largo e profondo, come da' razionali filosofanti con gran chiarezza si sia dimostrata"[129].

La mente – spiega Ariani – è sostanza puramente pensante «e non distesa», indipendente dal corpo; delle cose sensibili e materiali coglie l'essenza e di esse forma le idee generali «pure e spirituali».

Ora gli scettici dicevano essere falsa l'idea di punto, linea, superficie e corpo concepita dai geometri. Un punto privo di dimensioni, infatti, non poteva generare la linea. Ma essi assimilavano il punto fisico con quello matematico confondendo l'oggetto materiale con quello metafisico. La linea – precisa Ariani – «da' geometri non si considera composta né generata dal moto d'un qualche punto»[130]; questo era un modo di dire utile a fare intendere il concetto di linea. La linea è, infatti, concepita dai geometri

> "come una distanza di due termini, o sia come una lunghezza d'una superficie senza pensare per allora alla sua larghezza o profondità; come, a cagione d'esempio, noi potremo pensare bene alla sola lunghezza della nuova strada Medina, senza por mente alla larghezza della medesima"[131].

Per questo la linea è incorporea, non è fisicamente generata dal fluire di un punto, né da un punto allungato, né da molti punti ordinatamente allungati, per quanto la nostra mente può immaginare in essa un punto indivisibile che la divida in parti o che ne segni il termine. Anzi è proprio questa la definizione euclidea di punto: termine di una linea. Esso come la linea non ha alcunché di materiale, è pura creazione della mente; è un ente che non si può afferrare con i sensi, ma che si può bene concepire e comprendere con la mente.

E tale era anche il concetto di superficie, termine del corpo, concetto ideale, la cui realtà

---

[128] *Ibid.*
[129] *Ivi.*
[130] *Ivi*, p. 183.
[131] *Ibid.*

> "sarà fondata nella nostra mente non altrimenti che l'idea della linea; potendo bene noi con la mente pura chiaramente e distintamente considerare la sola lunghezza e larghezza d'un corpo, così in particolare come in generale, senza badare ala sua altezza, o vogliam dire alla sua profondità, e con questo pensiero avere la verace idea della geometrica superficie"[132].

Falso dunque è affermare, come facevano gli scettici, che nei concetti della geometria non c'è alcunché di reale. Questo è un pregiudizio dovuto ad un'idea errata della realtà, fatta coincidere unicamente col mondo materiale e sensibile, e che rifiutava il mondo delle idee. Gli scettici confondono l'essenza degli oggetti geometrici con la loro fisicità; si fermano a considerare il mondo corporeo come loro appare senza riuscire a concepire quello metafisico incorporeo delle idee e delle pure forme geometriche. Dipendendo soltanto "dalla tirannia dei sensi", essi sostengono che "non possiamo formare idea alcuna spirituale, che per mezzo del corpo non ci venghi somministrata", e così facendo – termina Ariani – "ci fanno sovente errare nella investigazione della verità"[133].

8. La tradizione euclidea del primo settecento

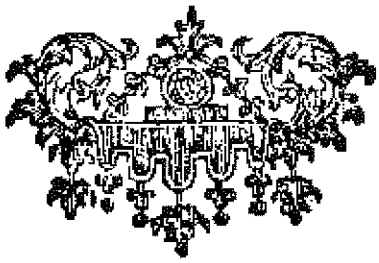
Nel 1718 usciva alle stampe un *Euclidis Elementorum libri sex. Ex traditione Federici Commandini. Nonnullis adjunctis notis accuratissimis,* privo del nome del traduttore e autore delle «molte e accurate note aggiunte». Come abbiamo già detto, però, non c'è dubbio che questi dovesse essere Agostino Ariani. Ne fanno fede, oltre alla già citata testimonianza del figlio Vincenzo, alcuni con punti del discorso *Intorno all'utiità della Geometria* ripresi e ripetuti nel commento di detto volume. Il volume si apre con una prefazione nella quale l'editore Antonio Porpora, rivolgendosi al lettore scrive che, avendo deciso di far ristampare i sei libri della geometria piana di Euclide ad uso della gioventù studiosa delle scuole di Napoli, riuscì ad ottenere «ab Eruditissimo quopiam hujusce rei» l'aggiunta di un corredo di note che servissero ad illustrare meglio tutti quei punti la cui comprensione di solito non risultava agevole. In realtà Ariani non si limitò a delucidare i punti più ostici della trattazione euclidea, ma vi aggiunse parecchio di suo, intervenendo in alcune tra le più difficili e intricate dimostrazioni, aggiungendo osservazioni, corollari, scolii, esempi, delineando così un vero e proprio percorso didattico dell'insegnamento della geometria elementare eucidea. In particolare, come Antonio Porpora avvertiva rivolgendosi al lettore

[132] *Ivi*, p. 186.
[133] *Ivi*, p. 188.

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBRI SEX.

Ex traditione Federici Commandini.

Nonnullis adjunctis notis accuratiſſimis.





NEAPOLI MDCCXVIII.
Ex Typographia Felicis Moſca.
Superiorum permiſſu.

Sumptibus Antonii Porpora
In cujus Bibliotheca venduntur.

ELEMENTA

GEOMETRIÆ PLANÆ,

SEU

ELEMENTORUM EUCLIDIS

PRIORES LIBRI SEX,

OPERA, AC STUDIO

NICOLAI
DE MARTINO

In Illuſtri Lyceo Neapolitano Mathematum Profeſſoris recogniti, ac illuſtrati.



NEAPOLI MDCCLXXIV.

Typis, & Expenſis Cajetani Caſtellano.

Superiorum permiſſu.

DEGLI ELEMENTI
DELLA
GEOMETRIA PIANA
COMPOSTI
DA EUCLIDE MEGARESE
E tradotti in Italiano, ed illustrati
DA
D. PIETRO DI MARTINO
LIBRI VI.
Ultima edizione correttissima

NAPOLI
PRESSO GENNARO REALE

"graecum in super Euclidis exemplar non semel consuluit, ex quo nonnullos didicit Interpraetum latinorum lapsus, vitavitque praesertim in V, et in VI libro"[134].

Ariani, dunque, aveva scelto come guida l'Euclide del Commandino[135] ma, in più di un caso, come ad esempio con la difficile teoria delle proporzioni dei libri V e VI, aveva preferito interpretare il pensiero di Euclide direttamente dalla fonte greca. Undici anni dopo, nel 1729 uscì alle stampe un nuovo testo dei primi sei libri degli *Elementi* di Euclide, dovuto a Nicolò De Martino[136].

Poco più che ventenne, Nicolò De Martino tenne la cattedra di Matematica dell'università di Napoli come *interino*, cioè come sostituto di Ariani e, dal 1732, a seguito della rinuncia di Ariani, avendo superato il concorso appositamente bandito, ne divenne titolare[137].

I testi di Ariani e di Nicolò De Martino, per certi aspetti presentano una notevole identità di vedute tanto da lasciare ipotizzare che lo stesso De Martino, almeno in parte, abbia collaborato alla compilazione del testo di Ariani, o che quest'ultimo abbia fortemente influenzato il De Martino. Francamente a noi pare più attendibile la prima ipotesi soprattutto se si tiene presente che quando nel 1718 fu edito l'*Euclide* di Ariani, questi, sempre più assorbito dagli impegni derivanti dalla numerose cariche pubbliche da lui ricoperte, già da sette anni aveva di fatto lasciato al De Martino l'insegnamento universitario. Vi è dunque uno stretto legame tra questi due testi; e tuttavia relativamente ad alcune importanti questioni, quali ad esempio quella relativa all'angolo di contatto, si riscontrano punti di vista antitetici. Ciò che più di ogni altra cosa li accomuna è l'impostazione metodologica con la quale vengono introdotti gli enti fondamentali della geometria piana, impostazione che ritroviamo in altri analoghi manuali degli *Elementi* di Euclide prodotti a Napoli come quello di Pietro De Martino, fratello di Nicolò e professore di Astronomia dell'Università di Napoli, pubblicato a Napoli nel 1736. A differenza dei primi due volumi, si trattò in quest'ultimo caso di un manuale scritto in lingua italiana[138] che forse anche per questo ebbe una grandissima diffusione difficilmente registrabile per altri ma-

---

[134] *Euclidis Elementorum*, cit., *Antonius Porpora Lectori.*

[135] F. COMMANDINO, *Euclidis Elementorum Libri XV, Una cum scholijs antiquis. A Federico Commandino Urbinate Nuper in Latinum conversi, commentarijsque quibusdam illustrati*, Pisauri, Apud Camillum Francischinum, 1572.

[136] Cfr. *Elementa Geometriae planae seu Elementorum Euclidis priores sex libri, opera ac studio Nicolai De Martini In illustri Lyceo Neapolitano Mathematum Professoris recogniti, ac illustrati*, Neapoli, Mosca, 1729.

[137] Sulla vita e l'opera di Nicolò De Martino e del fratello Pietro cfr. *Dizionario Biografico degli Italiani*, voce a cura di P. NASTASI, nonché F. AMODEO, *Vita matematica*, Napoli, Giannini e figli, v. I, 1905, pp. 73-95.

[138] P. DE MARTINO, *Gli elementi della geometria piana composti da Euclide Megarese e tradotti in italiano ed illustrativa D. Pietro di Martino libri VI*, Napoli, 1736.

COMANDINO	ARIANI	N. DE MARTINO	P. DE MARTINO
Diffinitiones	*Definitiones*	*Definitiones*	**Prima sorta di Principi** *Definizioni*
I e *comm.*	I	I *comm*	I
II e *comm.*	II	II *comm*	II
III e *comm.*	III	III *comm*	III
IV e *comm.*	V	V *comm*	IV
	Spiegazione		
V e *comm.*	VI	VI *comm*	V
VI e *comm.*	IV	IV *comm*	VI
	Spiegazione		
VII e *comm.*	VII	VII *comm*	VII
VIII	*Spiegazione*		*Spiegazione*
	VIII	VIII *comm*	VIII
IX e *comm.*	*Spiegazione*		
	IX	IX *comm*	IX
X			*Spiegazione*
	X	X *comm*	X
XI	*Spiegazione*		
XII e *comm.*	XI	XI *comm*	XI
	XII	XII *comm*	XII
XIII e *comm.*			*Spiegazione*
XIV e *comm.*	XIII	XIII *comm*	XIII
	XIV	XIV *comm*	XIV
XV e *comm.*			*Spiegazione*
XVI *comm.*	XV	XV	XV
XVII e *comm.*	XVI	XVI *comm*	XVI
XVIII	XVII	XVII *comm*	XVII
XIX e *comm.*	XVIII	XVIII	XVIII
	XIX	XIX *comm*	XIX
XX	*Spiegazione*		*Addizione*
XXI	XX	XX *comm*	XX
XXII	XXI	XXI *comm*	XXI
XXIII e *comm.*	XXII	XXII *comm*	XXII
XXIV	XXIII	XXIII *comm*	XXIII
XXV	XXIV	XXIV	XXIV
XXVI	XXV	XXV	XXV
XXVII	XXVI	XXVI *comm*	XXVI
XXVIII	XXVII	XXVII	XXVII
XXIX	XXVIII	XXVIII	XXVIII
comm.	XXIX	XXIX	*Spiegazione*
XXX	*Spiegazione*	*comm*	XXIX
XXXI	XXX	XXX *comm*	XXX
XXXII	XXXI	XXXI *comm*	XXXI
XXXIII	XXXII	XXXII *comm*	XXXII
	XXXIII	XXXIII	XXXIII
XXXIV *comm.*			*Spiegazione*
	XXXIV	XXXIV	XXXIV
XXXV e *comm.*			*Spiegazione*
	XXXV	XXXV *comm*	XXXV
	Spiegazione		
	XXXVI	XXXVI *comm*	

nuali di matematica di quel periodo. I testi di Nicolò e di Pietro godettero, infatti, dell'apprezzamento di numerosi studiosi che li adoperarono anche nel loro insegnamento. Di essi furono fatte numerose ristampe fino ai primi decenni dell'Ottocento[139] diffuse, non solo nel Regno di Napoli, ma anche nel resto d'Italia e in molti paesi d'oltralpe. Si tratta, indubbiamente, di due testi molto validi, ricchi di annotazioni, corollari, scoli, esempi che agevolano la lettura e la comprensione degli aspetti più problematici dell'opera di Euclide, differenti tra loro, oltre che nella lingua, nello stile essendo destinati a un differente pubblico: prevalentemente, agli studenti dell'Università quello di Nicolò, agli studenti delle scuole private e, in seguito anche a quelli delle Accademie militari, il secondo. Se confrontati con l'Euclide di Commandino, che fu il testo di riferimento per la gran parte degli studiosi di quel periodo, ma anche se confrontati tra di loro, si riscontra tra questi tre testi una diversa disposizione di alcune definizioni, assiomi e proposizioni. Ciò evidentemente fu dovuto alle particolari scelte didattiche di questi autori dei quali è palese l'intento di rendere più intellegibili e logicamente connesse alcune questioni sulle quali i commentatori di Euclide avevano più volte espresso dubbi e perplessità.

Riteniamo di fare cosa utile presentando prospetti comparativi di questi tre testi dai quali si possano evincere affinità, continuità e diversità nelle scelte dei tre autori. Cominceremo da quello relativo alle definizioni del Libro I.

La prima cosa che vogliamo mettere in evidenza è che le definizioni di Pietro De Martino sono 35 essendo stata da lui omessa la definizione XX di figure rettilinee. Inotre, a differenza di Ariani e del fratello Nicolò, Pietro De Martino non commenta le singole definizioni, postulati, ecc., ma le analizza raggruppandole per argomenti. Così fa seguire le prime sette definizioni (punto, retta, superficie) da una prima *Spiegazione*, le definizioni VIII e IX (angolo) da una seconda *Spiegazione* e le definizioni X, XI e XII nelle quali si parla di rette perpendicolari e di angoli retti, acuti e ottusi, da una terza *Spiegazione*. Tra le prime sette definizioni, quelle relative ai concetti di punto, retta e piano, la I, II, III e VII di Ariani coincidono con quelle di Commandino e si susseguono nello stesso ordine; per le rimanenti tre, Ariani anticipa come IV e V la quinta e sesta definizione di Commandino e ne pospone la IV come definizione VI. Lo stesso ordinamento si trova anche negli *Elementa geometriae planae* di Nicolò De Martino. In tutti e tre i testi si parte dal presupposto che alla base delle definizioni degli elementi fondamentali della geometria piana c'è il concetto di dimensione, non definito da Euclide e verosimilmente assunto come primitivo. In particolare Ariani introduce l'argomento dicendo che la geometria prende in considerazione solo la grandezza dei corpi, ossia la loro estensione, la quale è

[139] Degli *Elementa Geometriae* di Nicolò De Martino abbiamo rinvenute ristampe del 1754 e del 1801, ma è molto probabile che lungo tutto il Settecento ve ne siano state ancora altre. De *Gli elementi della geometria* di Pietro De Martino abbiamo potuto documentare ristampe negli anni 1740, 1751, 1788, 1790, 1824, 1836, 1839.

funzione dalle tre dimensioni: lunghezza, larghezza e profondità. E tuttavia non sempre le tre dimensioni vengono considerate tutte insieme, talvolta se ne considerano due, tal'altra solo una o nessuna. In relazione al numero della dimensioni considerate si ha la distinzione dei corpi in solidi, piani e lineari:

> "Si igitur omnibus tribus dimentionibus consideratur extensio – scrive Ariani- solidum dicitur, sive corpus; at si duae tantum earundem (longitudo nempe et latitudo) respiciantur, superficiei nomen sortitur: si vero ad unam tantum attendatur (ad longitudinem nempe) vocatur linea; denique si terminus lineae concipiatur, idea puncti habebitur"[140].

Dunque per ricavare le definizioni degli enti fondamentali della geometria bisogna partire dai corpi e privarli via via di una dimensione: se si astrae dalla profondità si ottiene la superficie, e se a questa si toglie la larghezza si ottiene la linea i cui termini sono i punti. Per comprendere il significato della definizione I[141], cioè perché il punto è privo di parti, ovvero è privo di dimensioni, bisogna dare una definizione intuitiva della linea (lunghezza senza larghezza) e da questa far discendere la definizione di punto come ente razionale. Nella definizione III è detto che estremi della linea sono i punti. Il punto non è dunque un qualsiasi elemento della linea: non è possibile, anche suddividendo la linea all'infinito, ricavare da essa il punto. Le parti della linea, per quanto piccole, sono linee, coerentemente col fatto che dividendo all'infinito la quantità continua si ottengono parti tutte omogenee alla quantità di partenza. Punto e linea sono enti di natura differente. Essendo l'estremo della linea, ma non linea, il punto è privo di dimensioni (definizione I). La linea, infatti, «extensionis unam tantum dimentionem (longitudinem nempe) in sui idea claudit»[142]. Analogamente si ricava la definizione razionale di linea partendo da quella intuitiva di superficie[143]: «Superficiei fines sunt lineae» (def. V). La superficie è priva di profondità avendo solo due dimensioni, la lunghezza e la larghezza ed è terminata da linee che hanno dunque una sola dimensione, la lunghezza. Questo stesso modo di introdurre gli enti razionali della geometria euclidea si ritrova anche in Nicolò e Pietro De Martino.

Nella *Dissertatio preliminaris* premessa ai suoi *Elementa geometriae planae*, tra le varie interessanti considerazioni introduttive allo studio della geometria euclidea, Nicolò De Martino spiega, come anche aveva fatto Ariani, che la geometria si interessa della quantità continua, ossia della grandezza in relazione alle sue tre dimensioni, lunghezza, larghezza e profondità. Queste si trovano sempre congiunte nei corpi reali e tuttavia «modo, quem Scholae abstractionem,

---

[140] *Euclidis Elementorum*, p. 1.
[141] "Punctus est, cuius nulla est pars, vel quod magnitudinem nullam habet", *ibid.*
[142] Ivi, p. 2.
[143] Definitio IV: "Superficie est id, quod longitudinem, et latitudinem tantum habet", *ivi,* p. 1.

appellant possunt tres illae dimensiones a se mutuo separari»[144], per cui i geometri partendo dai corpi e astraendo da essi una o più dimensioni, pervengono alla considerazione delle superfici, delle linee e dei punti. E viceversa, partendo dal punto possono pervenire al concetto di corpo.

> "Primo concipiunt, punctum fluire per planum aliquod: et quondam puncti nulla est pars, nulla dimensio, relinquetur fluxu ipsius in plano vestigium, solam longitudinem habens; atque adeo linea describetur. Deinde lineam istam intelligunt moveri lateraliter: et quia motu isto laterali, accedit ei latitudo, orietur superficies, quae longitudinem, et latitudinem habet. Denique superficiem istam concipiunt moveri, vel in altum, vel in profundum: et quia hac ratione adjungitur ei altitudo, seu profunditas, nascetur corpus, quod longitudine, latitudine, et profunditate refertur"[145].

Non diversamente Pietro De Martino nei suoi *Elementi* affermava che, sebbene in natura non si trovino cose soltanto lunghe, o lunghe e larghe ma prive di profondità,

> "pur tuttavia i geometri non hanno dubitato di separarle, e distinguerle costituendone delle idee tutte nuove, ed ignote al volgo. In primo luogo adunque essendo stata da essi considerata la lunghezza a parte ne nacque l'idea di linea. Dopo essendo stata considerata da' medesimi la lunghezza, e la larghezza senza profondità, ne nacque l'idea della superficie. Quindi la superficie ha bisogno di una sola dimensione, vale a dire della crassezza per degenerare in corpo, ma la linea ne ha bisogno di due, le quali sono la larghezza, e la crassezza. Siccome poi la linea non è altro, che lunga, così si comprende di leggieri, che i suoi termini chiamati punti non hanno né grandezza, né parti"[146].

L'approccio di Ariani e dei De Martino si ispira a un'idea metodologica, quella analitica che, come già detto, nella seconda metà del '600, aveva goduto di grande favore negli ambienti filosofici e scientifici napoletani[147]. Ciò che può apparire sorprendente è che questa venga applicata proprio agli Elementi di Euclide, opera che era generalmente riguardata come il topos della sintesi geometrica. Vale la pena riportare un passo della Logica, nel quale, Nicolò De Martino, parlando delle applicazioni dell'analisi, porta come esempio proprio l'invenzione delle definizioni degli enti fondamentali della geometria:

> "Simili ratione Geometrae, ubi corporis seu quantitatis continuae geometricam constitutionem cupiunt invenire, accipiunt ipsum totum corporeum, quod tribus dimentionibus constat, longitudine, latitudine, et prufunditate. Tum analytice procedentes, primum ab eo prufunditatem mente separant, sicque descendunt ad

[144] N. De Martino, *Elementa*, p. V.
[145] *Ivi* p. VI.
[146] P. De Martino, *Degli Elementi*, p. 4.
[147] Nicolò De Martino aveva appreso l'*ars analytica* da Giacinto De Cristofaro.

> superficiem, quae longitudine, et latitudine referta, est corporis extremitas; deinde a superficie amovent cogitatione latitudinem, et hoc pacto gradum faciunt ad lineam, quae longitudinem tantum habens, est extremum superficiei; denique a linea auferentes intellectu ipsam longitudinem, considerans tantum eius extrema, et hac ratione puncta eius suboriuntur, quorum nulla est pars, nulla dimensio"[148].

C'è dunque alla base della concezione di Ariani e dei De Martino una marcata visione analitica che dalla realtà fisica porta alla deduzione per astrazione dei concetti ideali oggetto delle prime sette definizioni[149]. Sebbene essi non riescano ad evitare le tautologie delle definizioni euclidee di enti indefinibili, tuttavia per questa via rendono certamente meno ardua la comprensione delle stesse, riducendo tutta la questione ad un puro fatto concettuale: l'astrazione di dimensioni.

Una prima osservazione da fare è che Ariani appare abbastanza consapevole che le definizioni euclidee di punto e linea hanno un puro carattere descrittivo. Infatti, come abbiamo visto, nel commentare queste definizioni egli dice: «si terminus lineae concipiatur, idea puncti habebitur» e «extensionis unam tantum dimentionem (longitudinem nempe) in sui idea claudit». Ariani sembra volere dire che ciò che si ricava dai primi cinque termini non è la definizione vera e propria di punto e linea, ma l'*idea* di detti enti.

Una seconda osservazione è la risposta polemica che sia Ariani che Nicolò De Martino danno agli *scettici*, i quali mettevano in dubbio la certezza della geometria affermando che essa prendeva in considerazione enti non riscontrabili nella realtà fisica: linee prive di larghezza e superficie prive di profondità. A questi che negavano che si potesse astrarre dalla realtà una o più dimensioni, Ariani fa osservare che «in dimitiendo intervallo, quo Urbs ab Urbe distat, ipsam tantum viarum longitudinem metimur, de earundem latitudine nihil prorsus solleciti»[150]. Come abbiamo già visto, Ariani si era intrattenuto a lungo a rispondere alle opposizioni degli *scettici* nel suo discorso *Intorno all'utilità della geometria*, nel quale aveva esplicitamente denunziato che questi erano giunti

> "a revocare in dubbio ed a riputare false le più nobili e veramente certissime scienze, come sarebbero le geometriche discipline, dubitando altresì delle più chiare ed evidenti verità, che comuni nozioni communemente addimandandosi, che come chiari segni del suo Creatore sono state dalla Divina Provvidenza in tutte l'umane menti stampate"[151].

---

[148] Cfr. N. DE MARTINO, *Logicae seu artis cogitandi institutiones*, Neapoli Ex Typographia Felicis Mosca, 1728, p. 227.

[149] In Nicolò De Martino è molto chiaro quale debba essere il modo di presentare la matematica ai giovani in relazione al rapporto analisi-sintesi. Quanto mai eloquente è, infatti, la sua affermazione: «tutto ciò che dai matematici è trovato con metodo analitico mediante il calcolo, sia poi da presentare ai giovani con metodo sintetico».

[150] A. ARIANI, *Euclidis Elementorum*, cit., p. 2.

[151] A. Ariani, *Intorno all'utilità della Geometria*, cit., pp. 179-180.

Gli argomenti degli *scettici* derivavano dal pregiudizio che tutto si potesse percepire e giudicare con in sensi e dal fatto che essi non concepivano la distinzione cartesiana tra *res cogitans* e *res extensa*, ossia tra la differente natura della mente e quella del corpo.

Lo stesso esempio è ripreso da Nicolò De Martino che, definendo «inanes et ridiculas» le affermazioni degli «scettici», scriveva che:

> "Neque enim assumptum est unquam a Geometris, ut detur, aut dari possit punctum separatum a linea, linea sejuncta a superficie, et superficies a corpore avulsa. Sed quod supponunt, huc redit, ut tres corporis dimensiones, longitudo, latitudo, et profunditas possunt cum simul, tum separatim considerari: quod extra omnem dubitationis aleam est; nam in dimitiendo intervallo, quo Urbs ad Urbe distat, ipsam tantum viarum longitudinem metimur, nihil omnino solleciti de earumdem latitudine"[152].

Nicolò De Martino spiega che, sebbene i punti, le linee, e le superficie non esistano di per sé, né possono esistere separati dai corpi, tuttavia non si può negare che essi esistano in uno stesso corpo. Essendo, infatti, i corpi finiti, devono avere dei termini veri e reali i quali, mancando di profondità, avranno solo lunghezza e larghezza per cui non saranno corpi, ma superfici. E poiché una superficie deve essere anch'essa finita, avrà dei termini reali, cioè le linee che hanno una sola dimensione, la lunghezza, e che a loro volta sono terminate dai punti che sono privi di dimensioni. Dunque punti, linee, superfici, oggetto dell'astrazione della mente del geometra, esistono realmente nei corpi, ma non come entità fisiche, «sed tantum ut partes modales»[153] dal momento che nella loro considerazione non si fa riferimento alla sostanza del corpo, ma soltanto al fatto che il corpo, avendo grandezza finita, è terminato. Se esistesse un corpo non terminato, ovvero di grandezza infinita, non sarebbe possibile considerare in esso punti, linee, superfici. Nicolò De Martino continua poi confutando l'opinione di alcuni che sostenevano che punti, linee, superfici, avessero una loro esistenza reale, distinta da quella del corpo, come parti fisiche del corpo, essendo le linee fatte di punti, le superficie di linee e i corpi di superficie.

> "Qui istam opinionem amplectuntur – scriveva De Martino – non possunt in gravissima absurda non impingere. Nam primo, si lineae constarent ex punctis, sequeretur lineam majorem quaecumque minorem adeguare. Si enim circa idem centrum duas quascumque circumferentias, seu lineas circulares describamus, et ex centro illo intelligamus ductas ad puncta omnia circumferentiae majoris rectas totidem; transibunt rectae istae per puncta totidem diversa circumferentiae minoris. Unde cum in utraque circumferentia sit idem punctorum numerus, constabit

[152] N. DE MARTINO, *Elementa*, cit., pp. VI-VII. La presenza in Ariani e in Nicolò De Martino dello stesso esempio, espresso pressoché con le stesse parole, è una delle cose che più fa pensare ad una collaborazione del De Martino nella stesura del testo di Ariani.

[153] *Ivi*, pp. VII-VIII.

ex eodem numero partium utraque circumferentia: et propterea, quum earum circumferentiarum inaequalitas nec ex diverso partium numero, nec ex diversa partium mole repeti possit, eas inter se aequales esse oportebit"[154].

E analogamente si può mostrare che le superficie non possono essere costituite da linee, né i solidi da superficie. Nicolò De Martino mette in guardia da facili errori. Quando i geometri considerano i punti sulle linee, le linee sulle superfici e le superfici sui corpi, non lo fanno perché le linee sono costituite da punti, le superficie da linee e i corpi da superfici, ma perché considerano «puncta illa, quae velut termini referuntur ad lineolas, ex quibus lineae componuntur»[155]. Cioè, staccando un segmento da una linea, gli estremi di quel segmento sono due punti della linea data, e poiché si può suddividere una linea in quante parti si vuole, «adsunt quidam puncta per totam cuiusque lineae longitudinem»[156], ma la linea di per sé «ex punctis nequaquam composita erit»[157]. E lo stesso si può dire delle linee e delle superfici.

Le definizioni VI e VII, sia per Ariani che per i De Martino costituiscono una mera caratterizzazione dei concetti di linea e di piano. Ariani scrive:

Definizione 6: Recta linea est quae aequali suis interjicitur punctis[158]

Definizione 7: Plana superficies est quae ex aequali suis interjicitur lineis[159]

Nessun punto compreso tra gli estremi della linea «sursum, aut deorsum vel huc, aut illuc deflectendo substultat»[160], così come le parti comprese tra gli estremi di un piano «sursum deorsum substulando non recedant»[161]. Contrariamente la linea e il piano diverrebbero flessuosi. E Nicolò De Martino, a sua volta, scrive essere la linea e la superfricie: «quae ex aequo jacet inter sua estrema»[162] sicché la linea «ad neutram partem annuat»[163] e la superficie, come pure aveva affermato Ariani, «nec sursum ascendat, nec descendat deorsum»[164]. Pietro De Martino, infine, ricorrendo all'idea «che si vedrà nascere la linea» come *fluxum puncti*, dice che questa «sarà *diritta* se il punto non sia giammai uscito

[154] *Ivi*, pp. VIII-IX.
[155] *Ivi*, p. XII.
[156] *Ibid.*
[157] *Ibid.*
[158] Nicolò De Martino scrive: "Linea recta est, quae ex aequali suis interijcitur punctis», (*ivi*, p. 2). Pietro De Martino scrive: «la linea retta è quella, la quale si distende egualmente fra i suoi termini» (cfr. *Degli Elementi*, cit., p. 3).
[159] Nicolò De Martino scrive: «Superficies plana est, quae ex aequali suius interijcitur lineis» (*Elementa,* cit, p. 2.). Pietro De Martino scrive: «La superficie piana è quella, che si distende egualmente fra i suoi termini» (*Degli Elementi*, cit., p. 3).
[160] *Euclidis Elementorum*, cit., p. 2.
[161] *Ibid.*
[162] *Elementa,* cit, p. 2.
[163] *Ibid.*
[164] *Ibid.*

dalla sua prima direzione, ma sarà *curva*, se il punto sia ito serpeggiando e cangiando di direzione da tempo in tempo»[165]. In ogni caso tutti e tre questi autori ricordano che Archimede aveva definito la retta come la linea più breve che si possa condurre tra due punti, e che Erone aveva definito superficie piana quella sulla quale si può per tutti i versi adattare una linea retta; definizioni queste che presentavano tutte il difetto di voler definire una cosa facendo uso di termini ed espressioni, come «direzione», «linea più breve», «adattare una linea», non definite ma utilizzate solo in modo intuitivo.

Nella definizione VIII, Ariani, dopo aver definito l'angolo come reciproca inclinazione di due linee, puntualizza che proprietà fondamentale dell'angolo è quella di poter essere suddiviso, accresciuto o diminuito. E che non si fa diventare più grande o più piccolo un angolo allungandone o accorciandone i lati, ma rendendone maggiore o minore la loro apertura. A secondo della natura dei suoi lati l'angolo può essere rettilineo, mistilineo, o curvilineo (def. IX). Per Ariani, dunque, l'angolo è una grandezza della quale si possono considerare multipli e sottomultipli, ossia per la quale vale il cosiddetto *Postulato di Archimede*. Vedremo più avanti cosa conseguirà da questa concezione a proposito dell'angolo di contingenza. Quanto all'angolo retto, definito da Ariani allo stesso modo di Commandino:

> "Cum vero recta linea super rectam lineam insistens eos, qui deinceps sunt angulos aequales inter se fecerit, rectus est uterque aequalium angulorum: et quae insistit recta linea perpendicularis vocatur eam, cui insistit"[166].

egli avverte che nella considerazione di un tale angolo non è richiesto che se ne costruiscano necessariamente due contemporaneamente, come può apparire dalla definizione. Questa di fatto vuole dire che, quando si costruisce un angolo retto quello ad esso adiacente è anch'esso retto.

Anche Nicolò De Martino sente la necessità di puntualizzare che la grandezza dell'angolo non consiste nella lunghezza delle linee che lo costituiscono, ma nella loro reciproca inclinazione; che l'angolo può essere rettilineo, mistilineo o curvilineo e che l'angolo rettilineo a seconda dell'inclinazione dei lati, può essere retto, acuto e ottuso. Riflettendo, infine, sulla definizione di angolo retto, da lui data nella forma

> "quum recta linea super aliam insistens rectam linea efficit angulos deinceps (*hoc est hinc inde existens*) aequales; rictus erit uterque aequalium angulorum; et lnea insistens dicetur perpendicularis ad eam, cui sistit"[167].

fa notare che allora si può definire retto l'angolo del quale il prolungamento di uno dei due lati forma un angolo adiacente uguale. Infatti, questa proprietà vale

---

[165] *Degli Elementi*, cit., p. 4.
[166] *Euclidis Elementorum*, cit., def. X, p. 3.
[167] *Elementa*, cit., p. 3.

solo per l'angolo retto; nel caso dell'angolo acuto l'adiacente è un angolo ottuso, e viceversa.

Pietro De Martino pone alla base della distinzione degli angoli rettilinei il fatto che una linea cade sull'altra linea o perpendicolarmente o obliquamente.

> "Per distinguere l'una e l'altra – aggiunge –fa duopo tenere questa regola. In qualunque modo che una linea cada sopra un'altra linea sempre fa con essa due angoli, uno di qua, un altro di là. Ove questi due angoli siano eguali la linea dicesi *perpendicolare*: ove siano disuguali, dicesi *obliqua*. Di più quando i due angoli sono eguali, ciascuno di essi dicesi *retto*; laddove essendo diseguali, il maggiore si chiama *ottuso*, il minore si dice *acuto*. Quindi l'angolo rettilineo per ragione della quantità ovvero inclinazione si distingue in retto, ottuso, ed acuto. Non si vuol dunque confondere l'angolo rettilineo poiché ogni angolo retto è rettilineo insieme, ma viceversa ogni angolo rettilineo non è sempre retto: potendo essere ottuso, ed acuto"[168].

Da qui fa discendere anche l'unicità della perpendicolare a una retta data. Infatti:

> "siccome il carattere della perpendicolare è di fare i due angoli di qua, e di la eguali fra di loro, così essa non può essere altro, che una, di fatto, un popolino, che ella si discosti dalla sua situazione, non resta più perpendicolare, ma degenera in obliqua. Quindi l'angolo retto parimente è uno, né è capace di più, o di meno, laddove gli angoli ottusi, ed acuti sono infiniti, quali più ottusi, quali meno: quali più acuti, quali meno"[169].

Dopo aver dato le definizioni di *termine*[170] e di *figura*[171]. Pietro De Martino fa notare che non essendo l'angolo «chiuso intorno intorno» non è una figura. Questo aspetto non è messo in evidenza dagli altri autori.

Le definizioni XV-XIX relative al cerchio offrono ad Ariani l'opportunità di parlare della generazione di questa curva come descritta dalla rotazione dell'estremo di una linea fissata nell'altro estremo, nonché della misura della circonferenza divisa in 360 parti «quas gradus vocant»[172] e dei suoi sottomultipli. Questo particolare aspetto si trova anche in un commento di Nicolò De Martino dopo la XVI definizione e in un'*Addizione* di Pietro De Martino dopo la XIX definizione[173]. In più Ariani specifica che la lunghezza di un arco di circonferenza è funzione del corrispondente angolo al centro, e che anzi la misura

---

[168] *Degli Elementi*, cit., p. 6.

[169] *Ivi.*

[170] Def. XIII: "Il termine è fine di qualche cosa". *Ivi*, p. 7.

[171] Def. XIV: "La figura è uno spazio chiuso da un termine, ovvero da molti termini". *Ibid.*

[172] *Euclidis Elementorum*, cit., p. 3.

[173] Pietro De Martino riportava anche un esempio numerico che facesse ben comprendere il grado e i suoi sottomultipli. Pare opportuno sottolineare come di tali *Addizioni* si serva più volte l'autore per aggiungere all'argomento trattato alcune considerazioni riguardanti aspetti applicativi (*Degli Elementi*, cit., p. 8).

di detta lunghezza è proprio quella in gradi dell'angolo, «ita ut quot gradibus illa constabit, tot eorundem erit angulus»[174].

Per il resto niente di particolarmente rilevante se non la definizione XXXV di rette parallele che Ariani dà come Commandino

> "Parallelae, seu aequidistantes recate lineae sunt, quae cum in eodem sint plano, et ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter se conveniunt"[175].

Nicolò De Martino enuncia, invece, nel seguente modo:

> "Parallelae, seu aequidistantes rectae lineae sunt, quae in eodem plano existens, et in infinitum utrimque productae numquam conveniunt"[176].

E infine Pietro De Martino definisce:

> "Linee rette parallele sono due linee giacenti su una superficie piana, le quali distese da ambe le parti all'infinito non s'incontrano giammai. Ovvero sono due linee giacenti in una superficie piana, le quali portate innanzi quanto ci piaccia, sempre mantengono l'istessa distanza: *per questa ragione sogliono chiamarsi ancora ugualmente distanti*"[177].

Il carattere delle parallele di essere complanari e costantemente equidistanti è messo in evidenza anche da Ariani che all'enunciato della definizione XXXV aggiunge

> "Vel Parallelale recate lineae sunt, quae in eodem plano existentes utrinque in infinitum protractae aequalibus sempre intervallis inter se distant. Habentur aequaliibus haec intervallis penes perpendiculares, quae intercipi inter parallelas concipiuntur, ita ut inter se omnes aequales sint"[178].

riprendendo così la definizione di Posidonio secondo cui sono parallele due rette complanari che «aequales habent omnes perpendiculares». In questo modo Ariani conclude che «Euclideam parallelarum definitionem, huius definitionis corollarium esse», essendo noto a tutti che le linee che mantengono costantemente invariata la loro reciproca distanza «numquam concorrere»[179].

Particolarmente interessante è quanto fa osservare Nicolò De Martino a commento della sua definizione XXXV. Dice, infatti, che detta definizione «nullo vitio laborat» se le linee di cui si parla sono rette[180]. Non è sempre vera, invece, se

---

[174] *Euclidis Elementorum*. cit., p. 4.
[175] *Ibid.*
[176] *Elementa*, cit., p. 7.
[177] *Degli Elementi*, cit., p. 10.
[178] *Euclidis Elementorum*, cit., p. 4.
[179] *Ivi*, pp. 4-5.
[180] *Elementa*, cit., p. 7.

si intende estenderla a tutti gli altri tipi di linee complanari, dal momento che esistono linee che «accedunt sempre ad se mutuo, nec unquam conveniunt»[181]. Qui Nicolò De Martino accenna al cosiddetto *Meraviglioso problema* che aveva dato tanto da pensare agli autori del Medioevo e del Rinascimento, consistente nel fatto che gli asintoti ad una curva piana pure protratti all'infinito non si intersecano mai, ma non mantengono inalterata la loro distanza[182].

I tre autori, infine, terminano con la definizione di parallelogramma, assente tra le definizioni del primo libro dell'*Euclide* di Commandino[183].

Ariani e i fratelli De Martino enunciano soltanto i primi tre dei cinque postulati presenti nell'*Euclide* di Commandino[184]. Nicolò De Martino aggiunge note esplicative del significato di ciascuno di essi; Pietro De Martino non aggiunge alcun commento. Ariani, invece, si ferma a puntualizzarne il loro carattere di costruttività. Per lui è manifesto che tutto quanto i geometri postulano possa avvenire o quanto meno possa concepirsi che avvenga. L'esattezza in geometria – aggiunge – «sola contemplatione est contenta»[185]; nella pratica è sufficiente l'uso di strumenti quanto più possibile precisi. In particolare gli strumenti che occorrono per le costruzioni previste negli *Elementi* sono soltanto due: la riga e il compasso il cui uso è legittimato dai suddetti postulati. Quanto agli *Assiomi*, o *Nozioni comuni*[186], a differenza di Commandino che ne aveva enunciati 10, Pietro De Martino ne enuncia 13. Pone, infatti, come assioma X che «Due linee si tagliano in un sol punto senza più»[187], e come assioma XI quello che in *Commandino* e negli altri due autori napoletani scostituisce il X, ossia che «Il tutto è maggiore di ciascuna delle sue parti; e tutte le parti riunite insieme costituiscono il tutto»[188]. Infine aggiunge come assiomi XII e XIII rispettivamente i postulati IV e V dell'*Euclide* di Commandino[189]. Ariani e Nicolò De Martino, invece, enunciano 12 assiomi,

---

[181] *Ibid.*

[182] Cfr. L. MAIERÙ, *Il «Meraviglioso problema» in Oronce Finè, Girolamo Cardano e Jacques Peletier*, "Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche"IV (1984), pp. 141-170.

[183] Questa definizione (XXXVI) è identica in Ariani e Nicolò De Martino "Parallelogrammum est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela, sive aequadistantia". Pietro De Martino (XXXV) scrive: "Il Parallelogrammo è una figura quadrilatera, che tiene i lati opposti paralleli" e aggiunge "Quindi tutte le figure quadrilatere del trapezio in fuori sono parallelogrammi".

[184] Ariani li chiama *Postulata, sive petitiones*, Nicolò De Martino *Postulata*, Pietro De Martino *Seconda sorta di Principi*, o *Dimande*.

[185] *Euclidis Elementorum*, cit., p. 5.

[186] *Terza sorte di principi*, o *Assiomi* per Pietro De Martino, *Axiomata* per Nicolò De Martino e *Axiomata seu Communes notiones* per Ariani.

[187] *Degli Elementi*, p. 12.

[188] La seconda parte di questo assioma, che costituisce anche il breve commento di Nicolò De Martino, è vera solo se del tutto si è fatta una partizione.

[189] XII: "Tutti gli angoli retti sono uguali"; XIII: "Se due linee rette giacenti in una superficie piana sono segate da una terza linea retta, e siano i due angoli interni dalla medesima parte, minori di due angoli retti, le due rette non saranno parallele, ma portate innanzi verso quella parte, do-

assumendo oltre ai 10 di Commandino, come XI che due linee che non hanno un segmento in comune si intersecano solo in un punto[190] e, come XII il IV postulato. L'assenza di commenti in Pietro De Martino appare abbastanza sorprendente. Ci saremmo, infatti, aspettati che desse almeno una ragione del perché pone il IV e V postulato come XII e XIII assioma. È probabile che abbia voluto separare i primi tre postulati dagli altri due dato il loro evidente carattere costruttivo (cosa che, per altro, non mette esplicitamente in evidenza). Pietro De Martino, inoltre, usa il termine *dimande* per indicare i postulati. È probabile che con questo termine volesse mettere porre in luce il fatto che alla base di una scienza assiomatica è necessario richiedere che alcune cose siano assunte come assolutamente vere o perché sono manifestamente vere, o perché possono essere concepite come vere[191]. La tavola delle corrispondenze è la seguente:

COMANDINO	**ARIANI**	**N. DE MARTINO**	**P. DE MARTINO**
Postulati	**Postulata sive petitiones**	**Postulata**	**Seconda sorta di Principi *Dimande***
I	I	I	I
II	II	II	II
III	III	III	III
comm.	*Spiegazione*	*comm*	
IV e *comm.*			
V e *comm.*			
Axiomata seu Communes notiones	**Axiomata seu Communes notiones**	**Axiomata**	**Terza sorta di principi Assiomi**
I	I	I	I
II	II	II	II
III	III	III	III
IV	IV	IV	IV
V	V	V	V
VI	VI	VI	VI
VII	VII	VII	VII
VIII	VIII	IX	VIII
IX	IX	VIII	IX
X	X	X	XI
Commentarius			
	XI	XI	X
	XII	XII	XII
[IV postulato]			XIII

ve gli angoli interiori sono minori di due angoli retti, si verranno finalmente ad incontrare" (*Degli Elementi*, cit., pp. 12.13).

[190] Così Ariani: "Dueae recate lineae non habent segmentum communem, et si invicem se secant in unico puncto se secant" (*Euclidis Elementorum*, p. 6), mentre Nicolò De Martino scrive: "Duae lineae non habent segmentum comune, sed in unico puncto se secant" (*Elementa*, cit., p. 10). Nicolò, infine, rispetto all'Euclide di *Commandino*, inverte di posto l'assioma VIII con il IX.

[191] Vale la pena riportare quanto in merito dice Ariani: «Quae a Geometris hic petuntur, fieri posse est manifestum, aut saltem concipi possunt ut possibilia, quod sufficit contemplatione est contenta; ac proinde quod clare, et distincte, concipitur, ipsa admitti» (*Euclidis Elementorum*, cit., p. 5).

Prima di passare alle Proposizioni, Pietro De Martino spiega così la differenza tra problemi e teoremi:

> "Euclide ha esposti gli elementi delle sua Geometria per via di Proposizioni, alcune delle quali portano il titolo di Problemi, altre di Teoremi: Problema è una proposizione in cui si vuol fare qualche cosa. Teorema è una proposizione in cui si vuol dimostrare qualche verità ignota"[192].

Nicolò De Martino prende spunto dalla distinzione tra problemi e teoremi per fare un'ampia disquisizione nella sua *Dissertatio preliminaris* sui tre generi di principi che sono alla base della geometria euclidea: definizioni, postulati ed assiomi. Le definizioni sono «explicationes teminorum»[193] dei quali si fa uso. I postulati e gli assiomi sono proposizioni nelle quali «nihil, quod difficultatem faciat, reperitur; et distinguuntur a se mutuo perinde, ac problemata, et theoremata a se invicem differunt»[194]. Per Nicolò De Martino c'è dunque una stretta relazione tra postulati e assiomi da una parte e problemi e teoremi dall'altra parte. La differenza tra postulati e assiomi è infatti la stessa di quella tra problemi e teoremi. In geometria esistono due specie di principi: alcuni che insegnano a fare, e si dicono problemi, altri che insegnano a dimostrare, e si chiamano teoremi. Questa stessa differenza si incontra in quelle proposizioni che non offrendo alcuna difficoltà di interpretazione, vengono assunte come principi indubitabili. Quelle che riguardano qualcosa da fare si dicono postulati, quelle che invece contengono una verità, sono detti assiomi. Dunque un postulato è un problema «facile», immediato; un assioma è un teorema «facile», immediato. Perché un problema possa essere assunto come postulato deve essere facile a tal punto che ciò che in esso si chiede sia immediatamente concepito dalla mente in modo univoco.

> "Sic, a puncto ad punctum rectam lineam ducere, est problema, quod ultro velut postulatum habendum; quia ut id perficiatur, satis est concepire, ut unum punctum directe fluat versus aliud. Et similiter, rectam lineam terminatam in directam, et continuum protendere, est problema, quod a postulati natura non excidit; quia ut illud fiat, non aliud concipi debet, quam ut punctum, quod fluxu suo datam rectam lineam descripsit, directe fluire pergat"[195].

E, sebbene così come enunciato da Euclide, il problema di descrivere il cerchio di dato centro e raggio uguale a un segmento assegnato offra una qualche difficoltà, esso similmente costituisce postulato. Questo è infatti immediato se il

---

[192] *Degli Elementi*, cit., p. 13. Non diversamente si esprime Ariani: "Problema dicitur propositio in qua aliquid faciendum proponitur ut fir prima hujus libri. Teorema dicitur propositio in qua veritas aliqua ostenditur ut quarta hujus libri" (*Euclidis Elementorum*, cit., p. 6).

[193] *Elementa*, cit., p. XII.

[194] *Ibid.*

[195] *Ivi*, p. XIII.

segmento assegnato abbia un estremo nel centro dato; diversamente richiede il ricorso ad altre operazioni preliminari. In ogni caso, spiega Nicolò De Martino, questo problema è da assumere come postulato avendo Euclide mostrato tra le prime proposizioni come si effettua il trasporto di una linea in modo che uno dei suoi estremi sia un punto assegnato, e come si possa fare la differenza tra due segmenti assegnati «utpote quae in illo postulato contineretur»[196]. Questa osservazione è quanto mai interessante perché dimostra che Nicolò De Martino è consapevole del fatto che le Proposizioni II e III del primo libro degli *Elementi* vanno considerate come un prolungamento dei postulati. Il terzo postulato non può essere ammesso in senso assoluto «ex tradita postulati natura»[197], ma solo alla luce di dette proposizioni che insegnano «primum, ut intervallum transferatur prope centrum; et deinde, ut circa idem centrum revolvatur»[198]. Quanto agli assiomi, si può assumere come tale solo quel teorema «cujus veritas a nemine sanae mentis in dubium vertitur; quodque proinde demonstratione ulla non eget»[199].

Ma ciò che comunemente si dice, che gli assiomi non hanno bisogno di dimostrazione, non deve essere inteso nel senso che ogni ragionamento debba essere lontano dagli assiomi. Vi sono, infatti, alcuni assiomi che devono essere spiegati affinché la mente li comprenda meglio. Questa spiegazione non sovverte la loro natura di verità indimostrabili; essa non è, infatti, una vera dimostrazione, ma soltanto una esposizione in termini più chiari del significato di quelle enunciazioni.

> "Id cernere –aggiunge De Martino – licet in illo axiomate, quod enunciat, aequalia esse, quae inter se mutuo congruunt. Neque enim hoc axioma recte intellegi potest, nisi prius explicetur, quae dicantur congruere inter se"[200].

Insomma gli assiomi hanno bisogno di spiegazioni a monte che definiscano i termini accettati come primitivi, sui quali, cioè, Euclide non aveva dato definizioni. Dunque Nicolò De Martino è consapevole del fatto che i postulati e gli assiomi della geometria posti da Euclide a fondamento della sua geometria non sono sufficienti a stabilire compiutamente ogni cosa. Bisogna allora spiegare in un certo qual modo il significato dei termini non definiti che intervengono nella loro enunciazione. Infine, fa notare che esiste qualche teorema che, posto in un determinato punto della trattazione esige una dimostrazione, fatto intervenire invece in un altro punto, diviene «evidens, ac apertum» e può allora essere am-

---

[196] *Ivi*, p. XIV.
[197] *Ibid.*
[198] *Ibid.*
[199] *Ivi*, p. XIV-XV.
[200] *Ivi*, p. XV.

messo come postulato. Il riferimento, in particolare, va al V postulato[201] da lui assunto come axioma XIII e posto subito dopo la Propositio XXVIII del libro I «quum in eo loco omnem suam evidentiam, ac certitudinem nanciscatur»[202].

Quanto poi ai problemi, Nicolò De Martino puntualizza che in ciascuno di essi, oltre a ciò che si chiede, sono presenti alcune condizioni per mezzo delle quali si determina ciò che è richiesto. Per questo in ciascun problema bisogna distinguere sempre due cose: ciò che è dato e ciò che è richiesto. Nicolò De Martino definisce *determinati* i problemi che ammettono un'unica soluzione, e *indeterminati* quelli che ammettono più di una soluzione, chiarendo che allora un problema si può definire *indeterminato*

> "quum defectu alicujus conditionis id, quod in problemate quaeritur infinitis plane modis potest exhibiri"[203].

Aggiunge poi che può anche avvenire che un problema sia *più che determinato*, il che avviene quando presenta più condizioni di quante ne siano richieste per la sua risoluzione. In tal caso possono verificarsi due cose, o che le condizioni in esubero «pugnent cum necessariis» e il problema allora è impossibile, o che sono superflue e rendono ridondante l'enunciato «si vicissim cum iis conveniant». L'esempio che De Martino fa seguire è quanto mai eloquente:

> "Sic problema de costruendo triangolo aequilatero in data recta linea, cujus omnes anguli sint aequales, redundans dicendum esset, quia aequalitas angulorum pro triangoli aequilateri constitutione est quidam conditio superflua, sed non pugnat cum natura ejus triangoli. Per contrarium autem si triangulum aequilaterum constituendum deberet habere duos, aut omnes angulos inaequales, problema foret impossibile; quia inaequalitas ista pugnat cum natura triangoli aequilateri"[204].

Anche nel teorema bisogna distinguere due parti: l'ipotesi e la conclusione.

> "Hypothesis est id, quod in theoremate assumitur, seu supponitur. Conclusio autem est id, quod ex suppositione, seu assumpto deducitur"[205].

Il teorema è una proposizione condizionata, ma ciò non sempre appare dall'enunciato tanto che talvolta «in distinguendo hypothesi haereant Tyro-

[201] Questo è da lui enunciato nel modo seguente: "si in duas rectas lineas tertia incidat recta linea, et efficiat angulos internos ad eamdem partem duobus rectis minores; duae illae recate lineae non erunt parallelae, sed convenient versus eam partem, in qua anguli duobus rectis minores sunt"; *ivi*, pp. XV-XVI.

[202] *Ivi*, p. XVI.

[203] *Ivi*, p. XVIII.

[204] *Ivi.*

[205] *Ivi*, p. XIX.

nes»[206]. Ciò avviene in particolare quando l'enunciato non è espresso in chiara forma condizionale, ma con un'unica frase che non consente di discernere immediatamente che da una cosa consegue un'altra cosa. Nicolò De Martino si rivolge qui agli insegnanti e suggerisce modi per rendere esplicita la forma condizionale dell'enunciato del teorema. E, continuando in questa disamina, pone la distinzione tra teorema semplice e complesso:

> "quum vel unica res in theoremate demonstratur, vel plures illae, quae ostenduntur, ex una eademque hypotesi descendunt"[207].

Sono altresì composti i teoremi in cui le varie cose che si dimostrano discendono da più di una ipotesi. Parla poi del teorema invertibile distinguendo anche in questo caso due differenti possibilità: quando ipotesi e conclusione si convertono l'una nell'altra perfettamente, e quando la conclusione diviene ipotesi inglobando qualcosa della precedente ipotesi, sicché il teorema non si inverte perfettamente. Ciò avviene ad esempio per teorema «triangula aequalia, et in eadem basi consituta, esse etiam in iisdem parallelis»[208]. Euclide inverte detto teorema nella forma «aequalia esse triangola illa, quae sunt in eadem base, et in iisdem parallelis»[209] conservando nell'ipotesi il fatto che i triangoli sono compresi tra le stesse rette parallele, cosa che avrebbe dovuto divenire oggetto della tesi. Questo tipo di conversione, che Nicolò De Martino chiama *imperfetta*, può avvenire solo nel caso che il teorema sia complesso; nel caso, infatti, che presenti una sola ipotesi, esso o è perfettamente invertibile, o non lo è affatto.

La possibilità di inversione non è solo di alcuni teoremi, ma anche di alcuni problemi nei quali ciò che è dato si muta in ciò che è richiesto[210].

Nicolò De Martino termina la sua *Dissertatio preliminaris* dicendo che, sia la costruzione dei problemi che la conclusione dei teoremi si conseguono mediante dimostrazioni geometriche dirette o positive, indirette o negative, o per assurdo. Le prime, attraverso inferenze successive conducono alla conclusione; le seconde, supponendo vera la negazione della conclusione, conducono a qualche cosa di assurdo, dimostrando dunque che non si può negare la conclusione. Questo tipo di dimostrazione si fonda sul principio che, sebbene da un'ipotesi falsa si possa conseguire una cosa vera, da un'ipotesi vera non può in ogni caso conseguire il falso.

---

[206] *Ibid.*
[207] *Ivi*, p. XXI.
[208] *Ivi*, p. XXIV.
[209] *Ibid.*
[210] "Hujusmodi sunt duo illa problemata, in quorum altero describenda est in data recta linea circuli portio, quae suscipiat angulum aequalem angulo dato; in altero abscindenda ex dato circulo portio, quae angulum, dato angolo aequalem, assumat. In illo enim quaeritur circulus, in quo si data recta ponatur, abscindat ex eo portionem, quae suscipiat angulum aequalem angulo dato. In isto autem quaeritur per contrarium recta, quae posita in dato circulo, abscindat ex eo portionem, quae dati anguli sit capax", *ivi*, p. XXV.

I contenuti della *Dissertatio preliminaris* mancano nelle trattazioni di Ariani e di Pietro De Martino. Il primo si limita a precisare la differenza tra problema e teorema:

> "Problema dicitur propositio in qua aliquod faciendum proponitur ut sit prima hujus libri. Teorema dicitur propositio in qua veritas aliqua ostenditur ut quarta hujus libri"[211].

Quanto a Pietro De Martino, prima di passare alle proposizioni, premette un breve paragrafo *De' problemi, e de' teoremi* nel quale dice che

> "Problema è una proposizione in cui si vuol fare qualche cosa. Teorema è una proposizione in cui si vuol dimostrare qualche verità ignota"[212].

I problemi e i teoremi – spiega ancora Pietro De Martino – constano di tre parti: I proposizione, II costruzione, III dimostrazione, ma nei teoremi talvolta può mancare la costruzione. Distinguere le varie fasi della dimostrazione di un teorema, o della risoluzione di un problema è un'esigenza non tanto di carattere formale quanto di carattere pedagogico. Essa costituisce una guida per l'allievo che impara ad analizzare l'enunciato della proposizione e a distinguerne l'ipotesi dalla tesi. Soprattutto apprende che, a differenza di un teorema, che esige una dimostrazione, un problema è allora risolto quando se ne è fornita la costruzione[213]. Laddove Ariani, alla maniera di Commandio, termina i problemi scrivendo «quod fecisse oportebat» e i teoremi con «quod demonstrasse (o ostendisse) oportebat», Pietro, termina i problemi con «ciocché dovea farsi» e i teoremi con «ciocché dovea dimostrarsi».

Nel I libro le Proposizioni VII, XIV, XXVII, XXXIX, XL sono dimostrate per assurdo e terminano con la formula «rimane vero il teorema in questione». Esse, come per altro le proposizioni degli alri 5 libri, sono intercalate da *Corollari*, *Annotazioni*, *Avvertimenti*, *Spiegazioni*, *Preparazioni*, *Addizioni* erivanto per lo più dalla necessità di incastonare nel rigido schema euclideo nozioni, chiarimenti, spiegazioni, approfondimenti utili per evitare equivoci ed errori e per consolidare e, laddove possibile, collegare i primi elementi di geometria con l'aritmetica. I Corollari del I libro sono 5. Il primo segue la Proposizione V, il noto teorema del triangolo isoscele[214]. Con esso Pietro De Martino vuole far vedere che, potendosi scegliere arbitrariamente la base del triangolo, i triangoli

---

[211] *Euclidis Elementorum*, cit., p. 6.

[212] *Degli Elementi*, cit., p. 13

[213] In tutte le sue proposizioni Pietro De Martino segue fedelmente questo schema contrasegnando le tre distinte parti con numeri romani.

[214] «Se s'intendano i due lati eguali de' triangoli isosceli portati innanzi sotto la base; saranno i due angoli sotto la base eguali fra di loro, e gli angoli sopra la base ancora saranno eguali», *Degli Elementi*, p. 18.

equilateri sono da considerare tre volte isosceli. Dunque tutti gli angoli di un triangolo equilatero sono uguali tra loro. Inoltre chiarisce cosa debba intendersi per Corollario, cosa che non ha fatto Euclide:

"Ora – scrive – poiché questa verità si deduce immediatamente dalla proposizione antecedente, ragionevolmente tiene luogo di Corollario: Imperocché i Geometri chiamano Corollario una proposizione, che si deduce immediatamente da un'altra proposizione"[215].

Per quanto riguarda le proposizioni di questo libro Ariani si attiene scrupolosamente al testo di Comandino non mancando tuttavia di aggiunge a più di una dimostrazione sue osservazioni e corollari che servono a chiarire ulteriormente e a completare l'argomento trattato. Talvolta propone in aggiunta alla dimostrazione euclidea, un suo *aliter*. Ciò avviene in modo particolare nei problemi, nei quali, oltre ai metodi canonici, egli mostra alcuni metodi adoperati nella prassi. Così, dopo aver dimostrato le Proposizioni V e VI, che costituiscono il teorema diretto e inverso dei triangoli isosceli[216], aggiunge due corollari nei quali, estendendo i risultati di questi teoremi ai triangoli equilateri, fa osservare che ogni triangolo equilatero è anche equiangolo e viceversa ogni triangolo equiangolo è anche equilatero[217]. Un altro corollario viene posto dopo la Proposizione IX nelle quale si insegna a bisecare un angolo. Ariani fa osservare che, iterando il procedimento di questa proposizione, si può dividere l'angolo in quante si voglia parti multiple di 2 «singola nimirum partes iterum bisecando»[218]. Inoltre mostra metodi pratici per bisecare l'angolo, per dividere un segmento in parti uguali e per tracciare la perpendicolare a una retta da un suo punto e da un punto esterno ad essa. A proposito di quest'ultima costruzione (che è quella relativa alla Proposizione XII), Ariani fa osservare che in detta proposizione Euclide deve supporre infinita la linea alla quale si vuole tracciare la perpendicolare:

> "Probe apposuit Euclides hanc particulam, *infinitam*: si enim finita esset linea, non semper ad eam perpendicularis duci posset ex puncto dato, quod in ea non est; ut si data sit linea finita BE, non potest a puncto C ad eam perpendicularis duci, nisi indefinite producatur in directum versus A, ad hoc ut circulus possit describi, qui eam secet in G et E"[219].

---

[215] *Ibid.*

[216] Teorema II propositio V: «Aequicrurium triangulorum, qui ad basim anguli inter se sunt aequales, et productis aequalibus rectis lineis, anguli, qui sunt sub basi, inter se aequales erunt»; Theroema III Propositio VI: «Aequilaterum ergo triangulum, etiam aequiangulum est: quocumque enim ex ejus lateribus pro basi supposto, considerari potest ut triangulum aequicrure, cujus anguli ad basim inter se sunt aequales», *Euclidis Elementorum* pp. 9-11.

[217] «Aequilaterum ergo triangulum, etiam aequiangulum est: quocumque enim ex ejus lateribus pro basi supposto, considerari potest ut triangulum aequicrure, cujus anguli ad basim inter se sunt aequales"; "Aequiangulum ergo triangulum aequilaterum quoque est», *ivi*, p. 10.

[218] *Ivi*, p. 14.

[219] *Ivi*, p. 17.

Altre considerazioni vengono fatte a proposito della Proposizione XIII che dice che una retta innalzata su un'altra retta forma o due angoli retti o due angoli la cui somma è due retti. Ariani fa seguire a questa proposizione 4 corollari con i quali caratterizza completamente la nozione di angolo supplementare ed esplementare. Nel primo corollario afferma che se invece di una sola retta si considerano più rette innalze da un punto di un'altra retta, la somma degli angoli formati è sempre uguale a due retti. Nel secondo corollario fa notare che, in caso di angoli supplementari, la conoscenza dell'ampiezza di un angolo comporta conseguentemente anche la conoscenza dell'ampiezza dell'altro. Il terzo e il quarto corollario riguardano gli angoli esplementari: due rette incidenti formano quattro angoli la cui somma è pari a quattro angoli retti (corollario 3), e la somma di tutti gli angoli "intorno a un punto" (ovvero che hanno il vertice in comune) è ancora uguale a due retti[220]. La presenza di osservazioni di questa natura sta a testimoniare, ancora una volta, il prevalente carattere didattico del commento di Ariani. Questi non lascia passare occasione per completare la lezione di Euclide rendendo espliciti concetti che scaturivano immediatamente da essa. Così dal teorema che afferma che la somma di due angoli di un triangoli è minore di due retti (Proposizione XVII), fa scaturire l'unicità della perpendicolare a una retta per un punto:

> "unica tantum linmea perpendicularis a dato puncto ad rectam lineam duci potest. Nam secus, si ex puncto A ad rectam BC duae perpendiculares AB, AC duci possent, essent in triangolo ABC duo anguli B, C, duobus rectis aequales, quod est absurdum"[221].

Si tratta di un teorema che manca negli *Elementi* di Euclide[222], ma che costituisce un importante risultato della geometria elementare fondandosi tra l'altro su di esso il concetto di minima distanza[223].

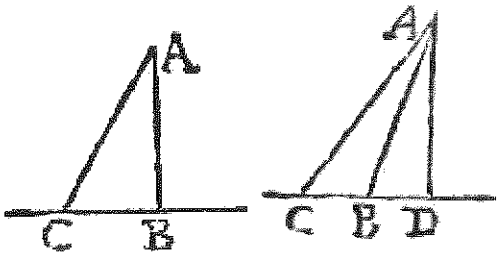
---

[220] Corollaria: 1: «Si plures recte, quam una, eidem recate instant, anguli sunt omnes duobus rectis aequales. Patet ex demonstratione»; 2: «Quorum angulorum, qui fiunt ab una recta quae alteri insistit, uno cognito, cognoscitur, et alius; aequantur enim simul duobus rectis, quare unius quantitate cognita, alterius quantitas erit residuum ad duos rectos. Quorum autem angulorum rectorum quantitas est 180 graduum, quin eos metitur semiperipheria, ut patet si facto centro in B et quocumque intervallo circulus describatur. Qua de re si anguli ABD quantitas est gr. 110 angulus ABC erit 70 gr.»; 3: «Si duae rectae se mutuo secuerint, quatuor anguli, quos constituunt quatuor rectis sunt aequales ; duo enim sunt es superiori parte, duo ex inferiori»; 4: «Omnes anguli circa unum punctum costituti quatuor rectis sunt aequales; quia aequantur quatuor angulis rectis, qui fiunt a duobus rectis lineis se mutuo secantibus», *ivi*, p. 18.

[221] Corollarium 1, *ivi*, p. 21. Tale corollario, dimostrato con le stese argomentazioni, è presente anche negli *Elementa* di Nicolò De Martino (cfr. *Ivi*, p. 33).

[222] Euclide, come è noto, non prende in considerazione questioni di unicità nei suoi *Elementi*.

[223] Questo concetto Ariani lo fa scaturire come immediata conseguenza della Proposizione XIX: «Omnis trianguli major anglus majus latus subtendit», *ivi*, pp. 22-23.



A questo corollario, Ariani ne fa seguire altri tre nei quali stabilisce che nei triangoli rettangoli ed ottusangoli due angoli devono essere necessariamente acuti[224]; se AB, AC sono due oblique a una stassa retta uscenti dallo stesso punto A, la perpendicolare da A a detta retta cade dalla parte dove le oblique formano angoli acuti[225]; gli angoli di un triangolo equilatero e i due angoli alla base di un triangolo isoscele sono acuti[226].

Relativamente a questa parte, particolarmente interessanti sono la considerazioni che Nicolò De Martino fa a proposito della Propositio XX, ossia del teorema che afferma che in un triangolo la somma di due lati è sempre maggiore del lato rimanente[227]. Nello scolio che segue questo teorema Nicolò dice che

> "hoc theorema nulla eget dimostratione, et velut axioma ultro ab omnibus concedi debet si lineae rectae Archimedeam definitionem admittamus. Definitur etenim ab Archimede linea recta, quod sit brevissima omnium linearum, que duci possunt a puncto ad punctum"[228].

Se, infatti si definisce alla maniera di Archimede essere la retta la linea più breve che si possa condurre tra due punti C e B, e si considera tale linea CB come base di un tiangolo, è evidente che AC e AB, poiché formano un angolo, presi insieme non costituiscono una linea retta; dunque CB è minore didella somma di AB e di AC.

La teoria delle parallele presenta motivi di vero interesse sia in Ariani che in Nicolò De Martino. A proposito della Proposizione XXVIII che stabilisce la

---

[224] Corollarium 2: «Si in aliquo triangolo unus angulus erit recus, vel obtusus, reliqui duo necessario erunt acuti; secus enim erunt in triangolo duo anguli aut aequales, aut majores duobus rectis», *ibid.*

[225] Corollarium 3: «Si ab aliquo puncto a recate lineae AB oblique incidentis in CD, perpendicularis AD in ipsam CD incidat, ea ad partes anguli acuti ABD cadet; nam si caderet, essent in triangolo ABC duo anguli ACB, ABC majores duobus rectis: quod est contra propositionem», *ibid.*

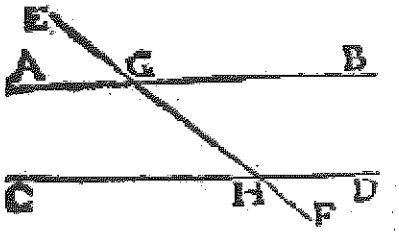
[226] Corollarium 4: «Omnes anguli trangugi aequilateri, et duo anguli triangoli aequicruris, qui sunt ad basim, sunt acuti, nam omnes anguli triangoli aequilateri, et duo duo anguli ad basim triaanguli aequicruris sunt inter se aequales, quare acuti omnes esse debent, secus enim essent duo anguli triangoli majores, aut aequales duobus rectis», *ibid.*

[227] Propositio XX Theorema XIII: «In omni triangulo duo latera simul majora sunt reliquo quamdocumque sumpta», *Elementa*, pp. 38-39.

[228] *Ivi*, p. 39.

ben nota condizione necessaria che devono soddisfare gli angoli corrispondenti e i coniugati perché due rette tagliate da una trasversale siano parallele[229], Ariani fa osservare:

> "Si supponamus rectam AB circa punctum G extremitate sua B vel tantillum inclinari versus lineam CD, – scrive Ariani -, patet, angulum BGH minorem fieri, ac proinde angulos BGH, DHG hoc casu duobus rectis esse minores; adweoque lineas AB, CD non amplius esse parallelas, et si producantur versus B, D tandem concorrere. Qua de re possumus tanquam firmum, et certum hic admittere, si in duas rectas lineas incidat alia recta, quae efficiat duos angulos internos, et ad easdem partes constitutos minores duobus rectis, eas rectas lineas parallelas non esse, et concorrere versus eam partem, versus quam anguli duobus rectis minores reperiuntur; quod quamvis Euclides inter propositiones per se notas recensuerit, omnes tamen Geometrae non sine demonstratione admittunt".



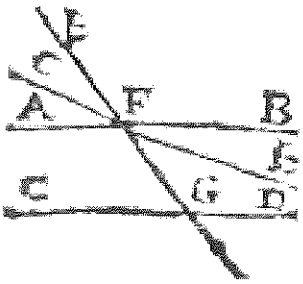
Ariani, che non ha compreso tra i postulati il cosidetto V postulato, ne dà a suo modo una dimostrazione dicendo che se le rette tagliate da una trasversale non sono parallele, si incontrano dalla parte dove la somma degli angoli formati con detta trasversale è minore di due retti. In realtà egli non dimostra niente perché assume come evidente che le rette prolungate all'infinito si incontrino, cosa che aveva di fatto creato perplessità ed opposizioni già al tempo stesso di Euclide.

Nicolò, d'altro canto, nello Scholium I annesso a questa proposizione fa osservare che da essa e dalla precedente XXVII scatuirisce chiaramante che «parallelismum linearum tripliciter conosci posse»[230].

---

[229] Teorema XIX Propositio XXVIII: «Si duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, et opposito, et ad easdem partes aequalem fecerit, vel interiores, et ad easdem partes duobus rectis aequales; parallelae erunt inter se recate lineae», *ivi*, pp. 30-31.

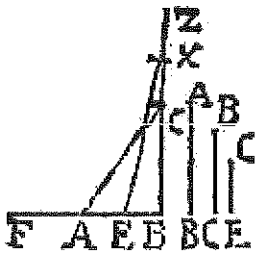
[230] «Primum nempe, si in iis anguli alterni sint aequales: Secundo, si angulus exterior si aequalis interiori, et opposito ad eandem partem. Ac tertio demum, si duo anguli interiores, ad eandem partem positi, sint simul duobus rectis aequales», *Elementa*, p. 55.



Nello Scholium II fa osservare che, se date due rette parallele AB, CD tagliate da una trasversale EF, si fa ruotare una di esse, ad esempio AB intorno al punto F di intersezione con la trasversale stessa, fin tanto che non tornano ad essere parallelele, questa forma con la trasversale dalla stessa parte angoli o minori o maggiori di due retti. «Unde – conclude – nihil obstat, quominus hoc loco tamquam verum agnoscamus sequens axioma Euclideum» ed enunncia, sotto il titolo di *Axioma XIII* il ben noto V postulato nel seguente modo:

> "Si in duas rectas lineas, in eodem plano jacentes, tertia incidat recta linea, et efficiat duos angulos interiores, ad eandem partem positos, duobus rectis minores; duae illae rectae lineae non erunt parallelae, sed convenient versus eam partem, in qua fiunt duo illi anguli, qui simul duobus rectis minores sunt"[231].

Non meno interessante è quanto Ariani fa seguire alla dimostrazione della Proposizione XLVII, il ben noto *Teorema di Pitagora* che insegna a costruire un quadrato equivalente a due quadrati dati. Ariani mostra, infatti, come si possa generalizzare questo risultato alla costruzione di un quadrato equivalente a tre (o a più) quadrati assegnati.



Dati, infatti, i segmenti AB, BC, CE, e riportati AB, BC su ciascuno dei due lati di un angolo retto $Z\hat{B}F$ in modo che B coincida col vertice di detto angolo retto, e unito C con A, il quadrato di CA è equivalente alla somma dei quadrati di AB e di BC, ossia:

[231] *Ivi*, p. 56.

$$CA^2=AB^2+BC^2$$

Se allora si stacca sul lato BZ il segmento BX=AC e si stacca sull'altro lato BF il segmento BE=EC, unito X con E si ha che

$$XE^2=EB^2+BX^2$$

Ossia

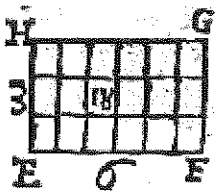
$$XE^2=EB^2+AB^2+BE^2$$

Iterando questo procedimento si può determinare un quadrato equivalente a un numero qualsiasi di quadrati assegnati.

Nicolò De Martino non aggiunge alcun commento a questo teorema; suo fratello Pietro, invece, fa vedere come si possano generare, a partire dalla prima terna pitagorica 3, 4, 5, tutte le altre:

> "Si forma il triangolo rettangolo in numeri nella maniera seguente. Prendasi due numeri ad arbitrio, come 3 e 4, i quali noi chiameremno generatori, e stabiliscasi per ipotenusa la somma de' quadrati de' detti lati generatori, la quale è 25: stabiliscasi per uno de' lati la differenza de' detti quadrati, la quale è 7; e finalmente si stabilisca per l'alro lato il doppio del prodotto, che nasce dalla moltiplicazione de' generatori 3, e 4, il qual doppiuo è 24. Quindi il triangolo rettangolo avrà 7 per un lato, 24 per l'altro lato, e 25 per ipotenusa"[232].

Relativamente al Libro II tutti e tre gli autori si fermano a lungo a commentare la prima definizione, quella di rettangolo come parallelogrammo compreso tra due segmenti dei lati di un angolo retto. Tutti e tre spiegano che i suddetti segmenti costituiscono le dimensioni del rettangolo, ossia la sua lunghezza e larghezza Ariani, in più aggiunge che il rettangolo può essere generato dalla traslazione di uno di detti segmenti nella direzione ad esso perpendicolare, ossia nella direzione dell'altro. Se poi si dividono i due lati in parti eguali, «et numerus partium unius per numerum partium altrius ducatur» il risultato sarà l'area del rettangolo «in quadratis quibusdam» avente per lato un segmento uguale alle parti in cui sono stati divisi i due lati del rettangolo[233].



[232] *Degli Elementi*, p. 59.
[233] *Euclidis Elementorum*, pp. 51-52.

Pietro De Martino, nella *Spiegazione* che segue questa definizione, invece, precisa che un rettangolo è determinato quando ne siano stete date sia la lunghezza che la larghezza, e che, a parità di lunghezza (larghezza) il maggiore di due rettangoli è quello che ha maggiore larghezza (lunghezza). Nel caso dei quadrati «non è necessario dire che essi siano formati da due linee, ma basterà che si nomini una linea sola»[234]. Essendo, infatti, le due dimensioni uguali, assegnandone una, risulterà assegnata anche l'altra e il quadrato sarà determinato. In più spiega che, mentre lunghezze e larghezze si misurano in «palmi lineari», le superficie si misurano in «palmi quadrati», e che quando si dice che «il piano di una stanza sia di 900 palmi si vorrà dire che il piano della suddetta stanza possa rimanere compartito in 900 palmi quadrati».

Tutti e tre gli autori, poi, insegnano a determinare l'area del rettangolo come prodotto della lunghezza delle sue dimensioni e si fermano a puntualizzare che se una linea AB è divisa in un punto C, il rettangolo avente dimensioni AB, BC sarà designato con ABC, quello di dimensioni AB, AC sarà designato con BAC. Anche relativamente alla seconda definizione la presentazione dei tre autori è abbastanza conforme. Infatti, dopo aver dato la definizione di gnomone tutti e tre si fermano a spiegare che se si aggiunge ad uno gnomone l'altro parallelogrammo che sta intorno al diametro, si ottiene un rettangolo, e viceversa, se ad un rettangolo si toglie uno dei parallelogrammi intorno al diametro, si ottiene uno gnomone. Così facendo essi mettono le premesse per poter affrontare compiutamente la dimostrazione delle fondamentali proposizioni V e VI. Concordamente inoltre si fermano anche sull'interpretazione algebrica che si può dare delle prime 10 proposizioni portando in merito vari esempi numerici. Quanto alle rimanenti altre quattro proposizioni Pietro De Martino scrive che «non si possono dimostrare per la strada de' numeri»[235] senza però spiegare il perché. Invece, Ariani e Nicolò De Martino, relativamente alla proposizione XI nella quale si pone il problema di determinare la sezione aurea di un segmento, spiegano questa impossibilità dicendo che non esiste alcun numero che possa essere diviso in parti tali che il prodotto di una di esse per tutto il numero risulti uguale al quadrato. Come è noto, infatti, la risoluzione di detto problema conduce ad una radice irrazionale, ossia ad un numero la natura del quale, a quel tempo non era stata ancora bene compresa e che veniva accettato solo come approssimazione di un razionale. I due matematici napoletani. Quanto al problema della quadratura di una figura rettilinea, affrontato dalla proposizione XIV, ultima di questo libro, Nicolò De Martino esprime in due successivi corollari le condizioni necessarie e sufficienti perché il quadrato avete lato il segmento di perpendicolare che unisce un punto di una circonferenza al diametro, sia uguale al rettangolo che ha per lati i due segmenti in cui il diametro resta diviso dal piede

[234], *Ivi*, p. 61.
[235] *Degli Elementi*, p. 81.

della perpendicolare[236]. Pietro, invece, fa notare che, poiché la proposizione XIV stabilisce che si può sempre trovare un quadrato equivalente a una qualsiasi figura rettilinea data, si può allora sempre determinare la misura della superficie di detta figura.

> "Gli antichi geometri – conclude Pietro – quando volevano spiegare il valore di una figura, sempre procuravano di formare un quadrato, perché il quadrato è una figura, che si misura più facilmente di qualsivoglia altrra figura. Quindi questo problema porta ordinariamente il titolo di quadratura delle figure rettilinee; ed è celebre appo i Geometri il problema della quadratura del cerchio, nel quale problema si domanda di descrivere un quadrato eguale ad un circolo dato"[237].

Il Libro III, nel quale, come è noto, Euclide presenta le proprietà fondamentali del cerchio, nell'edizione di Commandino è introdotto da 11 definizioni. Tale è anche il numero delle definizioni che troviamo negli *Euclidis Elementorum* di Ariani, il quale in merito le riproduse integralmente dal testo del Commandino. Anche nel testo di Nicolò De Martino le definizioni di questo llibro sono 11, per quanto non tutte coincidenti con quelle del Commandino; in quello di Pietro, invece, si riducono a 10. Manca, infatti, la definizione di *portio circuli*, ossia di settore circolare (VI in Commandino ed Ariani), che questi autori avenvano inserito tra le definizioni del I Libro come XIX. Oltre a ciò non si riscontra in questi ultimi testi piena corrispondenza con le difinizioni del Commandino e dell'Ariani. La definizione di *angolo di porzione* (VII in Commandino e Ariani) è posta da Nicolò come VIII e da Pietro come VI. La definizione relativa all'arco su cui insiste un angolo (IX in Commandino e Ariani), manca in Nicolò, mentre in Pietro costituisce la definizione X[238]. Ancora, le definizioni di angolo al centro e di angolo alla circonferenza si trovano riunite insieme nella VI definizione di Nicolò De Martino, e distinte nelle VIII e IX del fratello Pietro. Il quadro comparativo delle definizioni di questo libro è, comunque, il seguente:

COMANDINO	ARIANI	N. DE MARTINO	P. DE MARTINO
I	I	I	I
II	II	II	II
III	III	III	III
IV	IV	IV	IV
V	V	V	V
VI	VI		

[236] *Elementa*, pp. 122-123.

[237] *Degli Elementi*, p. 87.

[238] Mentre *Commandino* e Ariani scrivono «Quando autem continens angulum rectae lineae assumunt circumferentiam, in illa insistere angulus dicitur», Pietro De Martino scrive: «Nell'uno e nell'altro caso[angolo al centro o angolo alla circonferenza] quella parte di circonferenza, la quale rimane interposta fra due lati dell'angolo, dicesi base del medesimo: cioè nel primo caso, base dell'angolo al centro, e nell'altro caso, base dell'angolo alla circonferenza» (90).

VII	VII	VIII	VI
VIII	VIII	VII	VII
IX	IX		X
X	X	X	
XI	XI	IX	
		VI	VIII
			IX

In realtà Pietro De Martino dà la definizione di *porzioni simili* (XI in Commandino e Ariani, e IX in Nicolò), sotto il titolo di *Definizione XI* prima della Proposizione XXIII dove, appunto, se ne fa per la prima volta uso. Con questa, dunque si ristabilisce la perfetta corrispondenza numerica di tali definizioni.

I brevi commenti di Ariani e Nicolò De Martino a queste definizioni non presentano alcunché di rilevante. Più interessanti sono alcune spiegazioni date in merito da Pietro De Martino. Ci riferiamo, in particolare, alla *Spiegazione* posta subito dopo le definizioni VI e VII[239], nelle quali Pietro fa ossercare che in una porzione di cerchio[240] vi sono due angoli mistilinei, detti angoli *della porzione* i quali non vanno confusi con l'angolo *nella porzione* che è l'angolo avente per vertice un punto dell'arco che delimita la porzione e per lati le corde che uniscono detto punto con gli estremi della base della porzione. Essendo infiniti i punti di un arco, infiniti saranno gli angoli *nella porzione*, mentre gli angoli *della porzione* sono soltanto due. Infine, poiché esistono tre specie di porzione, maggiore, minore o uguale al semicerchio, anche gli angoli della porzione e nella porzione sono di tre tipi: I angoli della porzione e nella porzione maggiore, II angoli della porzione e nella porzione minore. III angoli del semicerchio o nel semicerchio. Pietro dedica, infine, un breve paragrafo alla misura dell'angolo, argomento introdotto in modo ingenuo:

> "Se due linee rette sono perpendicolari l'una all'altra, è noto, che intorno al punto comune ad entrambe si costituiscono quattro angoli retto. Intendendo ora tutti questi angoli retti essere compartiti in 360 angoletti uguali, si capirà facilmente che ad ogni angolo retto ne spettano 90; di modo che dando il nome di grado a ciascuno di questi angoletti uguali, noi diremo per innanzi, che l'angolo retto comprende 90 gradi, che l'ottuso ne comprende più di 90, e meno di 180; e che l'acuto ne comprende meno di 90"[241].

[239] VI: «L'angolo della porzione è un angolo mistilineo formato dalla base della porzione, e dalla sua circonferenza»; VII: «Angolo nella porzione è un angolo rettilineo formato da due linee rette titrate da qualsivoglia punto della circonferenza a' termini della base della porzione» (*Ibid*).

[240] Così Pietro aveva definito la porzione di cerchio nella XIX del I libro: «La porzione di cerchio è una figura piana mistilinea contenuta in una porzione qualsivoglia di circonferenza e da una linea retta che le serve di base. Dicasi questa linea corda, ovvero, sottesa», *Degli Elementi*, pp. 7-8.

[241] *Della misura dell'angolo, ivi* p. 91.

E poiché il punto di intersezione delle due rette perpendicolari può essere assunto come centro di una circonferenza di raggio qualsiasi, se per ciascuno dei 360 angoli di un grado si considera il corrispondente arco di circonferenza, si ottiene che anche la circonferenza viene divisa in 360 parti «di modo che potrassi dire, che quanti gradi contiene un angolo, altrettanti contiene la base di esso»[242], ossia il corrispondente arco di circonferenza compreso in quell'angolo. Sicché, invece di considerare la misura dell'angolo al centro, si può considerare quella della sua base, ossia quella del corrispondente arco[243]. Quanto alle proposizioni di questo libro, nel teso di Pietro non c'è molto da dire. Vi è piena corrispondenza con quelle dei testi di Commandino, Ariani e Nicolò De Martino. Di particolare c'è solo il fatto che l'enunciato della Proposizione XVI, quella relativa all'angolo di contatto, è distinto nelle quattro parti che costituiscono le quattro tesi da dimostrare[244]. Pietro, però, non fa menzione alcuna delle rilevanti questioni poste da questo teorema. La trattazione di tale argomento nei testi di Ariani e di Nicolò De Martino presenta, invece, motivi di grande interesse.

Come è noto, questa proposizione ha avuto una notevole importanza nella storia dello sviluppo delle idee matematiche. Essa, infatti, ha sollevato numerose perplessità, interrogativi e discussioni riguardando una materia che per lungo tempo sfuggiva alla piena comprensione dei geometri. Essa, come detto, riguarda l'*angolo di contingenza*, o *angolo di contatto*, vale a dire l'angolo compreso tra una circonferenza e la retta tangente in un suo punto[245]. La sua considerazione implica questioni relative al *continuum* aristotelico e all'ammissione dell'esistenza dell'infinitesimo attuale. Si capisce dunque il perché di tante accese discussioni che si protrassero dall'antichità fino al XVIII secolo. Ci si interrogava soprattutto sulla natura dell'*angolo di contatto*. Euclide aveva infatti considerato gli angoli rettilinei e quelli di contatto appartenenti allo stesso insieme, come grandezze omogenee delle quali si poteva quindi considerare anche il rapporto. In realtà, ci si accorse subito che la presenza dell'angolo di contatto, rendava inapplicabile a questo insieme l'assioma di continuità di Archimede, facendo così venir meno uno dei requisiti essenziali delle grandezze[246].

---

[242] *Ibid.*

[243] De Martino termina l'argomento introducendo i sottomultipli del grado.

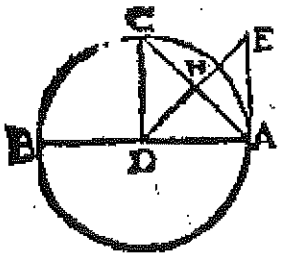
[244] Proposizione XVI Teorema: «I La linea retta, che insiste perpendicolarmente all'estremità del diametro di un cerchio, cade tutta fuori di esso, vale a dire è tangente. II Nel luogo, che è fra la detta linea, e la circonferenza del cerchio non ci può cadere alcun'altra linea retta. III L'angolo del mezzo cerchio è maggiore di ogni angolo acuto rettilineo. IV L'angolo formato dalla circonferenza del cerchio, e dalla tangente, il quale suole chiamarsi *angolo del contatto* è minore di qualsiasi angolo acuto rettilineo», *ivi*, pp. 111-112.

[245] Fu Giordano Nemorario nel 1220, a chiamare questo angolo, «angolo di contingenza».

[246] Nella definizione VIII del I libro degli *Elementi*, Euclide definisce l'angolo come *inclinazione* di una retta rispetto ad un'altra retta avente con la prima un punto in comune, e non come porzione di piano compresa tra dette due semirette avanti la stessa origine. Nella successiva definizione definisce, poi, gli angoli rettilinei. Dunque la definizione VII si applica non solo agli angoli rettilinei, ma anche a quelli curvilinei e a quelli mistilinei generati cioè dalla reciproca incli-

Ariani, si schiera con coloro che ritenevano che l'angolo di contatto non è una grandezza. Ma non è tanto questo l'aspetto più importante della sua trattazione quanto il modo col quale egli espone le ragioni delle sue convinzioni in merito. Dà, infatti, della questione un'interpretazione quanto mai originale, utilizzando argomentazioni inedite nel campo della geometria euclidea. Nicolò De Martino sostiene, invece, essere l'angolo di contatto una grandezza a tutti gli effetti. Ariani enuncia la proposizione XVI come Commandino:

> "Quae diametro circoli ad rectos angulos ab extremitate ducitur, cadit extra circulum, et in locum, qui inter rectam lineam, et circumferentiam interjicitur, altera recta linea non cadet: et semicircoli angelus omni angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor"[247].



Ma, diversamente da Commandino, che aveva dimostrato questo teorema per assurdo, Ariani ne dà una dimostrazione diretta. Con riferimento alla figura, considera la circonferenza di centro D e diametro AB, traccia a partire da A la retta AE che forma con AB un angolo retto e prende poi su AE un punto arbitrario E; unisce, infine, E con D formando il triangolo DAE. Essendo l'angolo in A retto, gli altri due dovranno essere acuti; dunque l'angolo in A è il maggiore dei tre e ad esso si oppone il lato DE che risulterà maggiore di ciascuno degli altri due lati. Essendo in particolare DE maggiore di DA, il punto E dovrà cadere fuori del cerchio, cosa che comporta che la retta DE giace tutta fuori del cerchio, ossia è tangente al cerchio. Né si può interporre tra il cerchio e la retta DE altra linea retta. Se, infatti, fosse AC una tale retta, condotta ad essa la perpendicolare DH, essendo l'angolo $D\hat{H}A$ retto, e quindi maggiore dell'angolo acuto DAH, il lato DA sarebbe maggiore del lato DH. Ma DA è il raggio della circonferenza, dunque il punto H deve cadere all'interno del cerchio. La retta AC sarà

---

nazione di due linee curve o, come nel caso dell'*angolo di contatto*, da una linea retta e da una linea curva. In ogni caso, comunque, gli angoli sono grandezze, senza distinzione alcuna. Ma, proprio il fatto che Euclide non avesse operato la distinzione tra i due tipi di angoli induceva in contraddizioni e paralogismi. Infine, vale la pena di far notare che Euclide, tranne il caso della presente proposizione, non utilizza mai gli angoli curvilinei o mistilinei; sicché la definizione di angolo, applicandosi in pratica ai soli angoli rettilinei, perdeva molto dell'ambiguità che l'uso del termine "inclinazione" implicava.

[247] *Euclidis Elementorum*, p. 89.

secante il cerchio e non può allora inserirsi tra il cerchio e la tangente AE. Dunque l'angolo di contingenza è minore di ogni angolo acuto rettilineo.

Ariani dimostra, infine, che l'angolo del semicerchio, ossia l'angolo avente per lati il diametro AB e l'arco AC, è maggiore di ogni angolo acuto rettilineo. Poiché, infatti, non si può inserire alcuna retta tra la tangente AE e l'arco AC, ma ogni retta uscente da A interseca il semicerchio AC, ogni angolo acuto rettilineo è contenuto nell'angolo del semicerchio.

A questa proposizione Ariani aggiunge un corollario, nel quale si insegnaa a tracciare la retta tangente ad una circonferenza in un suo punto[248], alla fine del quale aggiunge alcune interessanti riflessioni circa l'angolo di contatto. Queste iniziano con la seguente frase:

> "Cave, ne existimes, id quod vulgo angelus contacus dicitur, quodque jacet inter tangentem AE, et circumferentiam AHC, vere angulum esse; angulumque semicircoli, qui comprehenditur diametro AB et circumferentia AHC, esse acutum, et angulo recto rectilineo minorem"[249].

Per confutare la tesi sostenuta da molti che l'angolo di contatto sia un «vero angolo» e che l'angolo del semicerchio sia un angolo acuto minore dell'angolo retto rettilineo, Ariani comincia col far vedere che, supposto che l'angolo di contatto non sia un angolo, allora l'angolo del semicerchio è uguale ad un angolo retto rettilineo. «Quae quidam – aggiunge – quamvis pluribus ostendi possint modis, ex omnibus illum hic adducemus, qui Tyronum intelligentiae fit maxime accommodatur»[250]. E a questo punto istituisce una dimostrazione nella quale, fatto del tutto nuovo, introduce considerazioni di carattere infinitesimale.

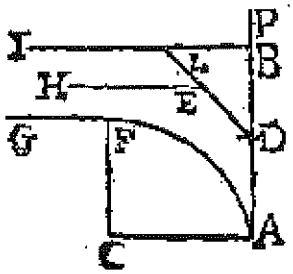
Con riferimento alla figura, dati i segmenti AP e CA tra loro perpendicolari, «si spezzi» la linea AP nel punto D nei due segmenti AD, lungo la stessa AP, e DL che si discosta della direzione di AD di un angolo di declinazione $L\hat{D}B$ uguale alla metà di un angolo retto. A sua volta «si spezzi» DL nel punto E nei due segmenti DE e EH in modo che DE appartenga al segmento DL e LH devii dalla direzione di DL secondo un angolo di declinazione $H\hat{E}L$, anch'esso uguale alla metà di una angolo retto, che porti HE ad essere parallelo a CA. Dunque operando due spezzamenti ciascuno di declinazione uguale alla metà di un retto, si ottiene alla fine la deviazione della linea AP nella direzione ad essa perpendicolare, ossia nella direzione di CA

---

[248] Corollarium: «Recta igitur, quae a diametri circoli extremitate ad angulos rectos ducitur, ipsum circulum tangit. Ostensum enim est ipsam cadere estra circulum, quare in estremo illo puncto diametri circulum tangit. Hinc si a dato in circumferentia puncto tangens ducenda erit; ab eo puncto ducatur diameter, et ad ipsam ab eodem puncto perpendicularis escitetur; et habebitur tangens quaesita», p. 90.

[249] *Ibid.*

[250] *Ivi,* p. 91.



Tale risultato si può ottenere invece che con due spezzamenti uguali di 45° ciascuno, con quattro spezzamenti uguali ciascuno di declinazione metà di 45°, con otto spezzamenti uguali ciascuno alla metà della metà di 45°, ovvero raddoppiando quante volte si vuole il numero degli spezzamenti, cosa che comporta altrettante volte il corrispondente dimezzamento dei corrispondenti angoli di declinazione. La somma di tutti questi angoli, qualunque sia il loro numero, è in ogni caso uguale a un angolo retto «quippe tantundem declinat parallela a perpendicolari»[251]. Si può allora pensare di ottenere questa inflessione con un numero infinito di spezzamenti infinitesimi, ovvero con un incurvamento continuo secondo la curva AF.

> "Qua re – continua Ariani – si ita incurvari supponatur linea AP, ut flexus fiat infinitis lineis parvis, fitque is quadratali, sive circoli quadranti aequalis, aequipollens uni angulo recto, et curvatura fit uniformis; quaelibet ex his angulis externis erit infinitesima pars anguli recti, hoc est nullius quantitatis, sive non angelus"[252].

Essendo dunque ciascun angolo di declinazione una parte infinitesima di un angolo retto, «hoc est nullius quantitatis», l'angolo di contatto, in quanto somma di infiniti contributi di grandezza nulla, «est nullius quantitatis»[253], cioè non è una grandezza.

Da ciò segue chiaramente che l'angolo del semicerchio è retto. Questo, infatti, differisce dall'angolo retto formato dalla tangente al cerchio con il diametro nel punto di tangenza, solo per l'angolo di contingenza; essendo questo nullo, l'angolo del semicerchio è retto. Ma, si chiede lo stesso Ariani, perché allora l'angolo del semicerchio e l'angolo formato dalla tangente e dal diametro non sono congruenti?

> "Respondeo, ob inflexionem circumpherentiae, quae congruere non potest cum recta linea"[254].

---

[251] *Ibid.*
[252] *Ivi*, p. 92.
[253] *Ibid.*
[254] *Ibid.*

Questa inflessione è della medesima quantità sia nelle circonferenze di raggio più grande che in quelle di raggio più piccolo. Tuttavia nelle circonferenze più piccole è di minore lunghezza; sicché queste circonferenze si allontanano dalla tangente più velocemente, e ciò comporta che gli angoli del semicerchio, dei quali lo stesso diametro costituisce un lato mentre il secondo lato è costituito da circonferenze tra loro differenti, «quamvis inter se aequales sint, utpote qui omnes recti sunt, non invicem congruant»[255]. Questa conclusione, che detti angoli sebbene tra loro uguali, perché tutti uguali a un angolo retto, non sono tuttavia tra loro congruenti, non poteva che suscitare perplessità.

Nicolò De Martino, invece, dopo aver dimostrato in modo sostanzialmente identico a quello di Ariani, la proposizione XVI[256], fa seguire un corollario e due scolii. Nel corollario afferma che chiaramente tale linea perpendicolare al diametro è la retta tangente[257]. Nel primo dei due scolii[258] dice che, oltre alle cose dimostrate nella proposizione XVI, «adjungi solent» altre due cose, ossia che l'angolo mistilineo composto dal diametro e dalla tangente è maggiore di qualsiasi angolo acuto rettilineo, mentre l'angolo mistilineo compreso tra la tangente e la circonferenza è minore di qualsiasi angolo acuto rettilineo. Da ciò discende necessariamente che l'angolo al semicerchio sia maggiore di ogni angolo acuto rettilineo e che l'angolo di contatto sia più piccolo di ogni angolo acuto rettilineo. Più interessante, è però il secondo scolio[259] nel quale, oponendosi ad Ariani, sostiene che l'angolo di contingenza è «un vero angolo».

"Inde vero nolim inferatur, angulum contactus nullius esse quantitatis"[260].

Sebbene, infatti, essendo minore di qualunque angolo rettilineo, sia «indefinite parvus» rispetto all'angolo retto che il diametro forma con la tangente, esso è tuttavia sempre confrontabile con tale angolo. Ma che esso abbia una sua grandezza nessuno potrà negarlo se tiene presente due cose: primo che i matematici definiscono grandezza tutto ciò che può essere aumentato o diminuito, e dunque, che l'angolo di contatto, sebbene non possa essere diminuito «per rectam lineam» può tuttavia esserlo «per aliam circuli circumferentiam descriptam

---

[255] *Ibid.*

[256] La proposizione XVI è così da lui enunciata: «Si ex extremitate diametri perpendicularis ad eam erigatur, haec tota cadet extra circulum; et in locum ipsa, et circuli circumferentia contentum nulla alia recta linea duci poterit», *Elementa*, p. 155.

[257] Corollarium: «Atque hinc nullo negotio ducetur tangens ad punctum in circuli circumferentia datur. Si enim A sit punctum datum, satis erit ex eo per centrum ducere rectam ADB, et ad istam et ad istam perpendicularem erigere ex eodem puncto A. Quod si autem ducenda sit tengens ad circulum ex puncto dato extra ipsum, id sequens propositio, quo pacto fieri possunt, vobis ostendet», *ivi*, p. 157.

[258] *Ivi*, pp. 157-158.

[259] *Ivi*, p. 158.

[260] *Ibid.*

per punctum A intervallo maiore, quam AD»[261]. Nicolò De Martino, dunque, fa sua la motivazione avanzata dal gesuita Christoph Clavius un paio di secoli prima nella sua polemica con il confratello Jacques Peletier[262].

Per quanto riguarda il resto del Libro III da segnalare ci sono soltanto alcune cose del testo di Nicolò De Martino. Innanzitutto il lungo scolio che segue la proposizione XIX nel quale Nicolò De Martino puntualizza che la tangente alla circonferenza in un dato punto è unica ed è perpendicolare al diametro[263]. Vi è poi la proposizione XXV, che insegna a completare un cerchio di cui è data soltanto una porzione[264] alla fine della quale Nicolò Di Martino aggiunge uno scolio nel quale avverte che:

> "distinguendi sunt autem tres isti casus, quia data circuli portio ABC potest esse vel semicirculus, vel semicirculo major, vel denique semicirculo minor"[265].

Anche la notevole proposizione XXX, è seguita da due scolii di cui particolarmente interessante appare il secondo nel quale De Martino propone una diversa dimostrazione di questa proposizione molto più agile e veloce di quella euclidea.

Ma vediamone il contenuto. Tesi della proposizione XXXI è che l'angolo alla circonferenza inscritto in un semicerchio è retto, l'angolo mistilineo di una porzione maggiore del semicerchio è ottuso, e quello di una porzione è minore del semicerchio è acuto[266].

La dimostrazione della prima parte di tale proposizione, che trova largo impiego nella geometria elementare, non è affatto diversa da quella del Commandino.

Quanto alla dimostrazione della seconda parte, Nicolò fa osservare che, essendo l'angolo B $\hat{A}$D retto, è evidente che l'angolo AD forma con la porzione di cerchio ABCD è maggiore dell'angolo retto e che di conseguenza l'angolo che AD forma con la porzione di cerchio AED è minore dell'angolo retto[267]. D'altra parte, poiché si è già mostrato che l'angolo di contato è minore di ogni angolo acuto rettilineo, segue che l'angolo della porzione che eguaglia il semicerchio è

---

[261] *Ibid.*

[262] Per quanto riguarda i vari aspetti di questa interessante polemica scientifica, cfr. L. MAIERÙ, *La polemica fra J. Peletier e C. Clavio circa l'angolo di contatto*, in Attidel Convegno «Storia degli studi sui fondamenti della Matematica e connessi sviluppi interdisciplinari», Pisa-Tirrenia 26-31 marzo 1984.

[263] *Ibid*, p. 162.

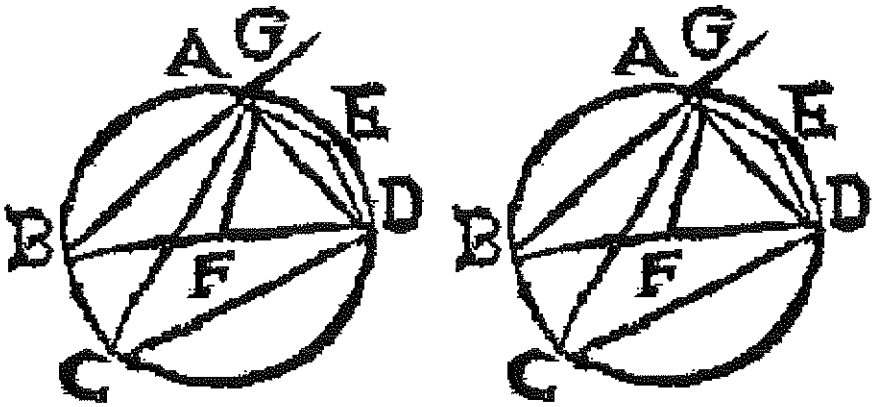
[264] Si tratta di un problema la cui risoluzione consiste nel determinare il centro e il raggio del cerchio da costruire; cfr. *ivi*, pp. 169-171.

[265] *Ivi*, p. 171.

[266] *Ivi*, pp. 179-181.

[267] Quorsum autem haec adjiciantur, et ostendantur, nescio, num omnibus peraeque notum sit, ivi, p. 181.

maggiore di in qualsiasi angolo acuto rettilineo «atque adeo posse velut angulum rectum considerari»[268], cioè può essere considerato retto.



Allora angoli di porzione maggiori o minori di un semicerchio saranno rispettivamente maggiori o minori di un angolo retto. Nicolò termina con una frase particolarmente significativa:

> "ostenduntur haec in hunc finem, ut sciamus utrumque eorum angulorum ita quidem differre ab angulo recto, ut neuter possit unquam velut rectus considerari"[269].

Si presenta qui di nuovo la questione dell'assenza di continuità nell'insieme degli angoli rettilinei e mistilinei, per cui un angolo passa dall'essere minore all'essere maggiore del retto senza mai divenire uguale al retto stesso, questione che Nicolò De Martino espone come segue.

Con riferimento alla seconda delle figure qui sopra riportate, tracciata la retta FG tangente al cerchio ABCDE nel punto A, si considera il diametro AC e la corda AD che divide il cerchio in due parti disuguali. Poiché dal punto A si possono condurre infinite semirette che formano con AC un angolo acuto, si può considerare l'angolo $C\hat{D}A$ molto piccolo, tanto che manchi poco dall'essere minore di un qualsiasi angolo acuto rettilineo. Sicché l'angolo della porzione maggiore $D\hat{A}B$ sarà sensibilmente maggiore dell'angolo del semicerchio $C\hat{A}B$. Perciò, l'angolo del semicecrchio $C\hat{A}B$, sebbene non differisca sensibilmente dall'angolo retto $C\hat{A}F$ che per l'angolo di contatto $E\hat{A}F$ (minore di ogni angolo acuto rettilineo quanto si voglia piccolo), è tuttavia sensibilmente maggiore dell'angolo retto $C\hat{A}F$. Parimenti, l'angolo della porzione minore

[268] *Ibid.*
[269] *Ivi*, pp. 181-182.

D Â F è sensibilmente minore dell'angolo del semicerchio C Â E. Pertanto, sebbene l'angolo del semicerchio non differisca sensibilmente dall'angolo retto C Â G che per l'angolo di contatto E Â G, risulterà comunque sensibilmente minore del'angolo retto C Â G.

Resta così dimostrato che, nell'insieme degli angoli determinato dalla definizione VIII del Libro I, esiste una discontinuità proveniente dalla considerazione degli angoli mistilinei (in particolare l'angolo di contatto) accanto a quelli rettilinei.

Prima di chiudere su questo Libro ci pare opportuno segnalare un'ultima cosa riscontrata nel testo di Pietro De Martino. Come abbiamo già detto, questo autore pone soltanto prima della Proposizione XXIII la definizione di *porzioni simili* quali porzioni aventi angoli *nelle* porzioni uguali[270]. A questa definizione, egli fa seguire una lunga *Spiegazione* nella quale fornisce un canone per riconoscere se due porzioni sono simili[271]. Questo canone consiste nel considerare in ciascuna di esse un *angolo nella porzione* e verificare se questi sono uguali. Fa, infatti, notare che, sebbene in una porzione si possano formare infiniti angoli, questi sono tutti uguali fra di loro; dunque tale operazione di confronto è indipendente dal particolare angolo nella porzione considerato. Inoltre mette in evidenza che due porzioni simili di uno stesso cerchio (ovvero di cerchi uguali) sono uguali fra loro, e che due porzioni simili di cerchi disuguali sono disuguali tra loro, essendo maggiore quella che si riferisce al cerchio maggiore.

La trattazione del Libro IV dei tre autori napoletani è pressocché conforme a quella di Commandino e le varie aggiunte ed osservazioni che le corredano non contengono alcunché di particolarmente rilevante. Segnaliamo soltanto un'osservazione che Ariani fa seguire alla dimostrazione della Proposizione III nella quale si insegna a circoscrivere a una circonferenza data un triangolo equilatero[272], e uno scolio aggiunto da Nicolò De Martino alla proposizione XV nella quale si affronta la costruzione dell'esagono regolare inscritto in un cerchio[273].

Quanto alla prima, Ariani fa osservare che:

> "Omittit Euclides ostendere, tangentes NL, LM, MN concorrere in punctis L, M, N. At facillime ostenditur hoc pacto".

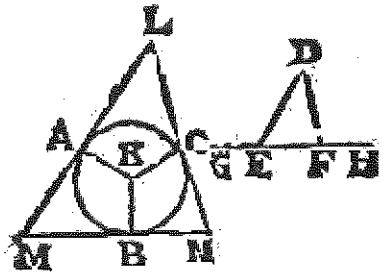
---

[270] *De Gli Elementi*, p. 118.

[271] *Ivi*, p. 119.

[272] «Circa datum circulum, triangolo dato aequaliaterum triangulum descrivere», *Euclidis Elementorum*, pp. 120-121.

[273] *Elementa*, p. 228-229.



Poiché, infatti, la somma degli angoli $D\hat{E}G$, $D\hat{E}F$, $D\hat{F}H$, $D\hat{F}E$, è uguale a quattro angoli retti, e poiché $D\hat{E}F+D\hat{F}E<2$ retti, necessariamente dovrà essere $D\hat{E}G+D\hat{F}H>2$ retti. Ma $D\hat{E}G=B\hat{K}A$ e $D\hat{F}H=B\hat{K}C$; pertanto $B\hat{K}A+B\hat{K}C>2$ retti e $A\hat{K}C<2$ retti, dal momento che la somma di tutti gli angoli di vertice K è uguale a 4 retti. Allora il segmento AC cade tra K e L, e poiché gli angoli $L\hat{A}K$ e $L\hat{C}K$ sono retti, la somma degli angoli $L\hat{A}C$ e $L\hat{C}A$ deve necessariamente essere minore di 2 retti. Ne segue che le rette CL e AL concorrono dalla parte del punto L. E ugualmente per le alte coppie di tangenti[274].

Nel suo scolio, invece, Nicolò De Martino fa notare che, mentre per la iscrizione e circoscrizione del pentagono regolare ad una circonferenza vengono dedicate quattro proposizioni (dalla XI alla XIV), per analogi problemi dell'esagono regolare si ha soltanto la proposizione XV, ma, osserva, «haec non omisit Euclides, non quod de iis non cogitaverit», ma solo perché considerazioni per questo poligono sono le stesse di quelle per il pentagono.

Il V libro

Molto interessanti, per la ricchezza e la varietà dei commenti, nonché per l'aggiunta di nozioni, sono le trattazioni del V Libro date dai tre autori. Molto vicine tra loro appaiono quelle dei fratelli De Martino le quali oltre tutto si distinguono da quella dell'Ariani per il numero e l'ordine delle definizioni. Nel testo di Ariani, infatti, sono presenti solo 16 delle 20 definizioni dell'*Euclide* di Commandino; nelle trattazioni dei due De Martino ve ne sono 17 più una nuova. Tutti e tre gli autori napoletani omettono le definizioni di proporzione doppia e tripla (X e XI nel Commandino). Ariani, poi, omette la complessa definizione di rapporti uguali (V in Commandino, VI nei due De Martino), nonché quella di rapporto maggiore (VII nel Commandino e anche nei De Martino). Inoltre all'VIII definizione del Commandino i tre autori napoletani fanno corri-

[274] Una dimostrazione analoga si trova anche in uno scolio di Nicolò De Martino (*ivi*, pp 206-207). Nicolò ricorre al V postulato per dimostrare che due delle tre tangenti si incontrano, mentre per dimostrare l'incontro ella terza tangente con le due precedenti dà una dimostrazione pressocché identica a quella di Ariani.

spondere la loro V definizione usando, però, il termine *proportio* (tradotto da Pietro con *proporzione*) al posto di *analogia* adoperato da Commandino. La definizione di proposizione continua (di tre termini), IX in Commandino e Nicolò De Martino, compare come VII in Ariani e X in Pietro De Martino.quella di antecedentui e conseguenti omologhi (XII in Commandino) è l'VIII in Ariani, la X in Nicolò e la IX in Pietro De Martino. Le definizioni dalla XII alla XVII del Commandino (permutando, invertendo, componendo, scomponendo, ragione nonversa, ex aequo e perturbata) si seguono dalla IX alla XIII in Ariani e dall'XI alla XV nei fratelli De Martino. Nel testo di questi ultimi manca la definizione di *aequa ratio* (XVIII del Commandino, XIV dell'Ariani), mentre le definizioni di proporzione ordinata e di ragione perturbata (XIX e XX in Commandino e XV e XVI in Ariani) seguono come XVI e XVII. Come detto, poi, tra le sole definizioni dei De Martino compare come XVIII quella di uguaglianza di rapporti comprendente sia il caso di rapportri ordinati che di rapporti perturbati. Facciamo seguire un quadro comparativo delle definizioni del V Libro in relazione anche a quelle data dal *Commandino*.

V LIBRO			
Comandino	**Ariani**	**N. De Martino**	**P. De Martino**
I. Pars est magnitudo magnitudinis, minor maioris, quando minor maiorem metitur	**I.** Pars est magnitudo magnitudinis, minor maioris, quando minor maiorem metitur	**I.** Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metimur	**I.** Ogni grandezza minore, che misura esattamente un'altra grandezza maggiore, dicesi parte
II. Multiples est maior minoris, quando maiorem minor metitur	**II.** Multiples est maior minoris, quando maiorem minor metitur	**II.** Multiples est vero magnitudo magnitudonis major minoris quando maiorem metitur minor	**II.** Viceversa ogni grandezza maggiore, che è misurata esattamente da un'altra grandezza minore, dicesi molteplice
III. Proportio est duarum magnitudinum eiusdem generis, quatenus ad quantitatem pertinet, mutua quaedam habi-tudo	**III.** Ratio est duarum magnitudinum eiusdem generis, quatenus ad quantitatem pertinet, mutua quaedam habitudo	**III.** Ratio est duarum magnitudinum ejusden generis mutua quaedam secundum quantitatem habitudo	**III.** La ragione non è altra cosa, se non il rapporto di due grandezze omogenee paragonate l'una coll'altra secondo la quantità
IV. Proportionem habere inter se magnitudines dicuntur, quae multiplicatae se invicem superare possunt	**IV.** Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quae multiplicatae se invicem superare possunt	**IV.** Magnitudines dicuntur esse ejusdem generis, quum multiplicatae (hoc est aliquoties acceptae) possunt se mutuo superare	**IV.** Due grandezze allora sono omogenee, quando la minore di esse replicata più volte può sopravvanzare la maggiore

V. In eadem proporzione magnitudones esse dicuntur prima ad secundam, et tertia ad quartam, quando primae, et tertiae aequimultiplices, secundae, et quartae aequemultilices iuxta quamvis multiplicationem utramque vel una superant, vel una aequales sunt, vel una deficiunt inter se comparatae		**VI.** Duae rationes dicuntur eadem, seu aequales inter se, quum antecedentium aequimultiplicia quaevis vel una deficiunt, vel una adequant, vel una superant aequemultiplicia consequentium utcumque supra	**VI.** Due ragioni allora sono eguali, quando gli egualmente molteplici degli antecedenti pigliati secondo qualsivoglia moltiplicazione sono tutti due, o maggiori, o eguali, o minori degli egualmente molteplici de' conseguenti pigliati eziandio secondo qualsivoglia moltiplicazione
VI. Magnitudines, quae eandem proportionem habent, proportionales vocentur	**VI.** Magnitudines, quae eandem proportionem habent, proportionales vocentur	**VIII.** Magnitudines, quae eadem rationem inter se habent, dicuntur proportionales	**VIII.** Le grandezze che hanno la medesima ragione si chiamano proporzionali
VII. Quando autem aeque multiplicium multiplex quidam primae superaverit multiplicem secundae, multiplex vero tertiae non superaverit multiplicem quartae; tunc prima ad secundam maiorem proportionem habere dicitur, quam termia ad quartam		**VII.** Una ratio dicitur altera major, quum talia reperire licet aequimultiplicia antecedentium, et consequentium, ut multiplex antecedentis prioris rationis excedat multiplex sui consequentis, sed multiplex antecedentis alterius rationis non excedat multiplex sui consequentis	**VII.** Ma se pigliati gli egualmente molteplici degli antecedenti secondo qualche moltiplicazione, e presi eziandio gli egualmente molteplici de' conseguenti parimente secondo qualche moltiplicazione si troverà, che il molteplice del primo antecedente avanza il molteplice del suo conseguente, si dirà, che il primo antecedente al suo conseguente abbia maggior ragione dell'altro antecedente al suo conseguente
VIII. Analogia est proportionum similitudo	**V.** Proportio vero est rationum similitudo	**V.** Proportio est duarum rationum aequalitas, seu identitas	**V.** La proporzione altro non è, se non la comparazione di due ragioni eguali
IX. Analogia vero in tribus minimis terminis consistit	**VII.** Proportio autem in tribus terminis paucissimis consistit	**IX.** Proportio in tribus paucissimis terminis consistit	**X.** La proporzione almeno ha bisogno di tre termini
X. Quando tres magnitudines proportionales sint, prima ad tertiam duplam proportionem habere dicetur eius, quam habet ad secundam			

XI. Quando autem quattuor magnitudines sint proportionales, prima ad quartam triplam habere pro-portionem dicitur eius, quam habet ad secundam: et sempre deinceps una plus, quo ad analogia processerit			
XII. Homologae, vel similis rationis magnitudines dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus	**VIII.** Homologae, vel similes ratione magnitudines dicuntur antecedentes quidem anteredenti-bus, consequentes vero consequentibus	**X.** Homologae, seu similes ratione magnitudines dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, et consequentes consequentibus	**IX.** In ogni proporzione gli antecedenti si chiamano omologhi fra di loro, siccome ancora i conseguenti
XIII. Permutata ratio est sumptio anteredentis ad antecedentem, et consequentis ad consequentem	**IX.** Permutata ratio est sumptio anteredentis ad antecedentem, et consequentis ad consequentem	**XI.** Permutata ratio est sumptio antecedentis cum antecedente, et consequentis cum consequente	**XI.** Ragione permutata si chiama, quando in una proporzione si paragona l'antecedente coll'altro antecedente, ed il conseguente coll'altro conseguente
XIV. Conversa ratio est sumptio consequentis, ut antecedentis ad antecedentem, ut ad consequentem	**X.** Inversa ratio est sumptio consequentis, ut antecedentis ad antecedentem, ut ad consequentem	**XII.** Inversa ratio est sumptio antecedentis ut consequentis, consequentis vero ut antecedentis	**XII.** Ragione inversa si chiama, quando in una proporzione l'antecedente si fa conseguente ed il conseguente si fa antecedente
XV. Compositio rationis est sumptio antecedentis una cum conseguente tamquam unius ad ipsam consequentem	**XI.** Compositio rationis est sumptio antecedentis una cum conseguente tamquam unius ad ipsam consequentem	**XIII.** Compositio rationis est sumptio antecedentis cum consequente ad ipsam consequentem	**XIII.** ragione composta si dice, quando in una proporzione la somma dell'antecedente, e del suo conseguente si compara coll'istesso conseguente
XVI. Divisio rationis est sumptio excessus, quo antecedens superat consequantem, ad ipsam consequentem	**XII.** Divisio rationis est sumptio excessus, quo antecedens superat consequantem, ad ipsam consequentem	**XIV.** Divisio rationis est sumptio excessus, quo antecedens superat consequentem ad ipsam consequentem	**XIV.** Ragione divisa si dice, quando viceversa in una proporzione l'eccesso dell'antecedente sopra il suo conseguente si compara coll'istesso conseguente
XVII. Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens ipsam consequentem superat	**XIII.** Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens ipsam consequentem superat	**XV.** Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessus, quo antecedentem superat consequentem	**XV.** Ragione conversa si dice, quando in una proporzione si compara l'antecedente coll'eccesso dell'antecedente sopra il suo conseguente
XVIII. Aequa ratio,	**XIV.** Aequa ratio,		

sive ex aequali est, cum plures magnitudines extiterint, et aliae ipsis numero aequales, quae binae sumantur, et in eadem proporzione, fueritque ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in secundis magnitudinibus prima ad ultimam: vel aliter est sumptio extremarum per subtractionem mediarum	sive ex aequali est, cum plures magnitudines extiterint, et aliae ipsis numero aequales, quae binae sumantur in eadem proporzione, cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, sic et in secundis magnitudi-nibus prima ad ultimam: se habuerit. Vel aliter est sumptio extremarum per subtractionem mediorum		
XIX. Ordinata analogia est quando ut antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; ut autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam	**XV.** Ordinata proportio est, quando ut antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; ut autem consequens ad aliam quampiam, ita consequens ad aliam quampiam	**XVI.** Plures magnitudines dicuntur esse in ordinata ratione cum aliis totidem magnitudinibus, quum illarum rationes directe correspondent rationibus istarum	**XVI.** Se vi sono più di due grandezze, che compongono una serie, ed altrettante da un'altra, che compongono un'altra serie, e sia come la prima alla seconda nella prima serie, così la prima alla seconda nell'altra serie, come la seconda alla terza nella prima serie, così la seconda alla terza nell'altra serie, e come la terza alla quarta nella prima serie, così la terza alla quarta nell'altra serie, e così ordinatamente in tutte le altre, che seguono: dirassi cotesta ragione ordinata
XX. Perturbata vero analogia est, quando tribus existentuibus magnitudinibus, et alij ipsis numero aequalibus; fuerit ut in primis magnitudinibus antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem ut autem in primis magnitudinibus con-aliam quampiam; ita in se-cundis alia qua-	**XVI.** Perturbata autem proportio est, quando tribus existentuibus magnitudinibus, et aliis quae sint his moltitudine pares; fuerit, ut in primis quidam magnitudinibus anteredens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem ut autem in primis magnitudinibus consequens ad	**XVII.** Vicissim vero plures magnitudinis dicuntur esse in perturbata ratione cum aliis totidem magnitudinibus, quum rationes illarum inverse correspondent rationibus istarum	**XVII.** Ma se come sta la prima alla seconda nella prima serie, così sta la penultima all'ultima nell'altra serie, e come sta la seconda alla terza nella prima serie, così l'antipenultima alla penultima nell'altra serie, e come la terza alla quarta nella prima serie, così quella, che sta avanti all'antipenultima all'istessa antisequens ad penultima, e con quest'ordine si va avanzando

epiam ad antecedentem	aliam quampiam; ita in secundis alia quaepiam ad antecedentem		sempre la ragione: dirassi cotesta ragione non ordinata, ma perturbata
		XVIII. Quum plures magnitudines sunt in eadem, sive ordinata, sive perturbata ratione cum aliis totidem magnitudinis, sumptio extremarum per subductionem mediarum dicetur aequalitas ratio-nis	**XVIII.** Se poi nell'un caso, e nell'altro si dice, come la prima all'ultima nella prima serie, così la prima all'ultima nell'altra serie, questa chiamerassi ragione uguale, la quale sarà or-dinata, se la ragione sia ordinata; e sarà per-turbata, se la ragione sia perturbata

Commentando la definizione di *pars* (Def. I) Ariani chiarisce che in Euclide questo termine non ha il significato comune di una qualsiasi porzione di un'altra grandezza (nel qual caso la parte di una grandezza sarebbe relazionata alla grandezza stessa solo per esserle minore), ma sta a indicare una grandezza che divida esattamente la grandezza data un certo numero di volte, ossia che ne sia un sottomultiplo.

> "Sic numerus 2 – aggiunge –dicitur pars numeri 10, quia si numerus 2 quinquies sumatur efficit 10"[275].

Dunque per *pars* non deve intendersi una generica parte, ma propriamente una *pars aliquota* cioè ciascuna delle parti uguali in cui è divisa una grandezza. Questa precisazione dà l'opportunità ad Ariani di dare un'altra definizione, quella di *similes partes aliquotae*, come quelle parti che «aeque sua tota metiuntur»[276], cioè che nell'esatta divisione di grandezze ne determinano lo stesso numero. Così, spiega Ariani. 2, parte aliquota di 12, è simile a 4, parte aliquota di 24 perché 2 è la sesta parte di 12 come 4 è la sesta parte di 24. Ancora, una parte aliquota di due grandezze (come 3 che è parte aliquota sia di 12 che di 18) è detta *pars communis*, ossia è una misura comune delle due grandezze. In tal caso ammettendo una misura comune, le grandezze si dicono commensurabili. Le stesse precisazioni si trovano anche nei De Martino[277] i quali arricchiscono l'argomento introducendo accanto al concetto di *pars aliquota* (*parte aliquota* in Pietro), quello di *pars aliquanta*[278] (in Pietro *parte aliquanta*[279]) definita

[275] *Euclidis Elementorum*, p. 138.
[276] *Ibid.*
[277] *Elementa*, pp. 231-232. Nicolò porta anche gli stessi esempi numerici.
[278] *Ivi*, p. 232.
[279] *De Gli Elementi*, pp. 162-163.

quest'ultima come quella parte che non misura esattamente il tutto. Così, spiega Pietro, 5 è parte aliquanta di 12, mentre 3 è parte aliquota di 15. La definizione euclidea di *pars* è dunque quella di sottomultiplo. Ad essa segue quella di multiplo (Def. II) ossia di quella grandezza che – spiega Ariani – «ab alia metitur»[280], e che Nicolò De Martino chiarisce dicendo «quando majorem adaequat minor aliquoties sumpta»[281]. I multipli prendono nome dal numero delle parti che essi contengono. E se multipli di grandezze contengono uno stesso numero di sottomultipli, allora, spiega Nicolò, sono detti *similes multiplices* o *aeque-mulptiplices*[282].

Nella definizione III tutti e tre gli autori napoletani sostituiscono al termine *proportio* quello di *ratio* (Pietro De Martino, *ragione*) avvicinandosi così all'odierna distinzione tra rapporto e proporzione. Utilizzeranno, infatti, il termine *propotio* laddove Commandino parla di *analogia*.

Nel commentare questa definizione Ariani scrive:

> "Docet in hac definitione Euclides, quid sit ratio, atque, eam esse habitudinem, hoc est respectum, sive relationem, quam inter se habent duae magnitudines ejusdem generis"[283].

Ariani spiega che il termine *habitudo* che ricorre in questa definizione deve essere inteso, in termini matematici, nel senso di relazione, e che questa relazione non può esistere se le grandezze considerate non sono dello stesso genere, ovvero omogenee. Si può allora considerare il rapporto «quam habet lineam ad lineam, superficies ad superficiem, corpus ad corpus, etc.»[284], perché il rapporto «ad quantitetem pertinet», riguarda cioè quantità misurabili delle grandezze e non loro altre qualità caratteristiche. Ariani è consapevole della poca chiarezza del testo di questa definizione:

> "Quamvis haec rationis Euclidea difinitio – scrive - a fere omnibus Euclidis interpretationibus admittatur, vitio tamen non caret"[285].

---

[280] *Euclidis Elementorum*, p. 139.

[281] *Elementa*, p. 231.

[282] Tali concetti si trovano anche in Pietro De Martino e in Ariani. «Se vi sono due grandezze minori, le quali siano contenute un egual numero di volte in due altre grandezze maggiori, – scrive Pietro De Martino –, le minori si chiameranno parti simili in riguardo alle maggiori e viceversa le maggiori si chiameranno molteplici simili, ovvero egualmente molteplici in riguardo alle maggiori», *Degli Elementi*, pp. 162-163. «Sic – spiega Ariani – 10, et 15 sunt aeque multiplices numerorum 2, et 3, quia sicuti 10 quinquies continet 2, ita et 15 quinquies 3 continet». *Euclidis Elementorum*, p. 139.

[283] *Euclidis Elementorum*, p. 139.

[284] *Ibid.*

[285] *Ibid.*

Infatti di due grandezze dello stesso genere si possono ricercare due differenti relazioni «secundum quantitatem». Si può, infatti, ricercare quanto una sia più grande dell'altra; ma amche quante volte una è contenuta nell'altra. Nel primo caso si vuole conoscere la differenza tra le due grandezze, nel secondo il loro rapporto.

> "Sic si duo numeri 6, et 4 inter se conferantur, potest investigari quantus sit excessus, quo numerus 6 excedit numerum 4, inveniturque quod sit 2, et potest quoque inspici, quantus sit numerus 6 respectu numeri 4, sive quomodo numerus 6 continet 4, vel continetur a 4; et invenitur 6 continere 4 semel, et in super eius dimidium, vel 4 continere duas tertias partes ipsius numeri 6"[286].

Ariani osservava che sarebbe stato opportuno che Euclide avesse chiarito «de qua harum habitudinem»[287], ossia a quale dei due tipi di relazione intercorrenti tra le grandezze egli si riferiva nell'enunciare questa definizione, essendo esse caratterizzate da proprietà del tutto differenti tra di loro. Quando si vuole sapere di quanto una grandezza supera un'altra, ossia si vuole conoscere la differenza tra due grandezze, allora si parlava di *Ratio aritmetica*; quando, invece, si vuole sapere quante volte una grandezza è contenuta in un'altra, si parla di *Ratio geometrica* e le due grandezze sono dette termini del rapporto[288]. È proprio quest'ultimo tipo di *ratio* l'oggetto del V Libro degli *Elementi* di Euclide. Ecco perché Ariani ritiene che sarebbe stato più opportuno adottare come definizione di *ratio*

> quantitas relativa unius magnitudinis respectu altrius ejusdem generis

ossia

> modus, quo magnitudo magnitudinem continet, vel continetur ab illa[289].

Stabilito dunque che per rapporto si intende la *ratio geometrica*, Ariani avverte che due sono i possibili rapporti: la *ratio aequalitatis* e la *ratio inaequalitatis*[290]. Il primo rapporto si ha quando antecedente e conseguente sono uguali, il secondo quando l'uno è maggiore (*ratio maioris inaequalitatis*) o minore (*ratio minoris inaequalitatis*) dell'altro. Quest'ultimo tipo di rapporto può essere *ra-*

---

[286] *Ibid.*
[287] *Ibid.*
[288] *Ivi*, p. 140. Su questa differenza si ferma anche Pietro De Martino il quale a chiarimento aggiunge il seguente esempio: «Così per esempio, se paragonando il lato del quadrato colla sua diagonale si va esaminando quanto il lato sia minore della diagonale, la ragione dirassi aritmetica, ma se paragonando l'una coll'altgro si cercherà di sapere quante volte il lato si contiene nella diagonale, la ragione si chiamerà geometrica», *Degli Elementi*, p. 164.
[289] *Euclidis Elementorum*, p. 140.
[290] *Ibid.*

zionale, nel caso che le due grandezze sono tra loro *commensurabili*, o *irrazionale*, se le due grandezze, invece, sono *incommensurabili*[291]. Ariani spiega il significato dei termini commensurabili ed incommensurabili, come grandezze che ammettono una comune misura o meno, e conclude precisando che il rapporto di grandezze commensurabili è esprimibile con un numero, cosa impossibile nel caso di grandezze incommensurabili. Riporta quindi la classificazione dei rapporti razionali: *ratio multiplex*, nel quale il termine maggiore è un numero intero di volte più grande del termine minore; *ratio superparticularis*, nel quale il termine maggiore contiene quello minore una volta e una parte aliquota, come $\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}$ (*ratio sesquialtera*); $\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}$ (*ratio sesquitertia*), etc.; *ratio superpartiens*, nel quale il termine maggiore contiene quello minore un volta e più parti aliquote, come $\frac{8}{5}=1+\frac{3}{5}$ (*ratio superterpartiens quinta*)[292]; *ratio multiplex superparticularis*, quando la grandezza maggiore contiene la minore un certo numero intero di volte più una sua parte aliquota, come $\frac{10}{3}=3+\frac{1}{3}$; *ratio multiplex superpartiens,* quando la grandezza maggiore contiene la minore un certo numero intero di volte più alcune sue parti aliquote, come $\frac{8}{3}=2+\frac{2}{3}$ [293].

Ariani, infine, introduce la notazione frazionaria del rapporto sottolineando che, in caso di rapporto razionale la frazione $\frac{A}{B}$ stava semplicemente ad indicare A diviso B, ossia quante volte A conteneva esattamente B. Nel caso di rapporto irrazionale (*ratio surda*), scrive:

> "Non aliter est faciendum si ratio sit surda, cuius quantitatis quaeritur; scribendum enim esta antecedens super consequente, lineola interjecta ; ut si, sit ratio A ad B, ejus quantitatis erit $\frac{A}{B}$; quae quidam si non ita est nota, ut quantitas rationis 2 ad 3, quae est $\frac{2}{3}$ id ideo eventi, quia ratio A ad B est surda, hoc est, quae nullis numeris esprimi potest"[294].

---

[291] *Ibid.*

[292]. Ariani faceva notare che, in tal caso, le parti aliquote che costituiscono la grandezza maggiore non devono formare una parte aliquota della minore. Se, infatti, avvenisse ciò, non si tratterebbe di *ratio superpartiens*, ma di *ratio superparticularis*.

[293] *Ivi*, p. 141.

[294] *Ivi,* p. 142. Mentre Pietro De Martino non aggiunge alcun commento a tale definizione, il fratello Nicolò si sofferma semplicemente a puntualizzare che le due grandezze devono essere

Ariani passa quindi alla definizione IV, il cosiddetto postulato di Archimede secondo cui hanno rapporto due grandezze delle quali un multiplo della minore superi la maggiore. Questa definizione, scrive Ariani, costituisce un criterio perché due grandezze possano avere rapporto: non solo devono essere omogenee (come stabilito nella precedente definizione), ma devono anche essere tali che «alterutra multiplicata, hoc est ter, quater, decies, etc. sumpta alteram possit superare»[295]. Criterio ribadito anche da Nicolò De Martino il quale sottolinea che «non inter alias magnitudines ratio subsistere potest»[296]. E tuttavia facciamo osservare la differente formulazione di questa definizione da parte dei due De Martino. Laddove Ariani (che segue Commandino) dice che perché due grandezze possano avere rapporto debbono essere archimedee, i De Martino affermano che due grandezze sono omogenee se sono archimedee e fanno discendere dalla precedente definizione, nella quale l'omogeneità è condizione esplicitamente postulata per la considerazione del rapporto tra grandezze, che allora dette grandezze ammettono rapporto tra di loro. Inoltre Nicolò, a differenza di Ariani, non si sofferma molto a commentare la definizione III. In realtà egli è ben consapevole delle difficoltà che offre la comprensione di questa definizione. In uno *Sholium generale* che fa seguire all'ultima proposizione di questo Libro, mette in guardia dalle polemiche sollevate dai *recentiores*, secondo le quali la teoria delle proporzioni del Libro V è fallace e imperfetta perché il criterio degli equimolteplici assunto da Euclide come principio manca di fondamenti. A questi De Martino risponde che la definizione di rapporto è stata concepita da Euclide con un sì grande acume che senza di essa non è possibile conoscere se quattro grandezze sono proporzionali. In difetto sono proprio i *recentiores* che ritengono essere stata istituita tale definizione «ratione continentiae»[297], cioè per grandazze tali che quante volte una prima contiene la seconda, tante volte anche la terza conteniene la quarta. Per mettere in luce la vera portata della definizione euclidea, Nicolò De Martino decide allora di dimostrare i seguenti teoremi[298]:

> THEOR. I: .Si prima toties contineat secundam, quoties tertia continet quartam; aequimultiplices primae, et tertiae, vel una excedent, vel una deficient, vel una adaequabunt aequemunltiplicies secundae, et quartae.
>
> THEOR. II: Si prima magis contineat secundam, quam tertia contineat quartam, sumi poterunt tales aequimultiplices primae, et tertiae, itemque tales secundae, et quartae, ut si multiplex primae excedat multiplicem secundae, multiplex tertiae non excedat multiplicem quartae.

---

dello stesso genere e che nel loro confronto «non ad aliud attendatutur, quam ad ipsarum quantitates», *Elementa*, p. 233.

[295] *Euclidis Elementorum*, p. 142.

[296] *Elementa*, p. 233.

[297] *Elementa*, p. 290.

[298] *Ivi*, pp. 291-296.

THEOR. III: Si aequemultiplices primae, et tertiae vel una excedant, vel una deficiant, vel una adaequent aequemultiplices secundae, et quartae; continebit prima toties secundam, quoties tertia continet quartam.

THEOR. IV.Si sumi possunt tales aequemultiplices primae, et tertiae, itemque tales secundae, et, quartae, ut multiplex primae excedat multiplicem secundae, sed multiplex tertiae non excedat multiplicem quartae; prima magis continebit secundam, quam tertia continet quartam.

Il primo e il terzo teorema sono l'uno l'inverso dell'altro e possono compendiarsi nella seguente:

"Condizione necessaria e sufficiente perché una prima grandezza sia contenuta in una seconda quante volte una terza sia contenuta in una quarta è che gli equimultipli della Condizione necessaria e sufficiente perché la prima grandezza contenga tante volte la seconda quante volte la teraz gandezza contenga la quarta è che gli equimultipli della prima e della terza eccedono, difettano o eguagliano gli equimultipli della seconda e della quarta".

Anche la seconda e la quarta sono l'una l'inversa dell'altra e possono compendiarsi nella seguente:

"Condizione necessaria e sufficiente perché la prima grandezza contenga la seconda più di quanto la terza contenga la quarta è che gli equimultipli della prima e della terza, e quelli della seconda e della quarta siano tali che, mentre un multiplo della prima ecceda un multiplo della seconda, un multiplo della terza non eccede un multiplo della quarta".

In tal modo le definizioni di rapporti uguali e rapporti disuguali sono ridotte da Nicolò a teoremi che ne sanciscono l'assoluta fondatezza.

Come definizione V Ariani e i fratelli De Martino adottano la definizione VIII di Commandino, ma mentre Nicolò e Pietro assumono come VI la complessa definizione di rapporti uguali (V di Commandino), Ariani, che probabilmente condivideva il parere di Galileo secondo il quale questa definizione era contraria all'intuizione, la omette. Tuttavia ne utilizza il contenuto per spiegare la sua definizione V (VIII di Commandino):

Proportio vero est rationum similitudo[299].

Infatti scrive:

"Quondam rationes quantitates sunt, iis competunt omnia, quae ad quantitate pertinent: quamobrem earum aliae aliis erunt aequales, vel majores, aut minores.

[299] *Euclidis Elementorum*, p. 142.

> Est ratio alteri rationi aequalis, cum unius antecedens quantitas aeque, sive eodem modo, hoc est nec magis, nec minus continet consequentem quo alterius antecedens continet suam consequentem, vel quando unius antecedens minus continetur in conseguente, quam alterius antecedens in sua. Quando igitur aequales, sive similes inter se erunt duae rationes, aequalitas haec sive similitudo rationum dicitur Proportio »[300].

Spiega, infine, che la proporzione può essere geometrica (uguaglianza di rapporti tra grandezze geometriche), aritmetica (uguaglianza di rapporti numerici) e armonica[301].

Ariani, ovviamente omette di riportare esplicitamente anche la definizione di rapporti disuguali (definizione VII in Commandino). In realtà, prima di dimostrare la Propositio IV[302], egli premette un lungo lemma seguito da tre corollari, nei quali presenta esplicitamente i contenuti della definizione di rapporto disuguale (VII di Commandino).

> Lemma: Si prima quantitas ad secundam rationem habeat majorem, quam termia ad quartam, tales aequae multiplices primae, ac tertiae sumi possunt, ac aliae aeque multiplices secundae, et quartae, ut si multiplex primae excedat multiplicam secundae, multiplex vero tertiae non excedat multiplicae quartae[303].

La dimostrazione segue nel seguente modo. Se una prima grandezza AB ha rispetto a una seconda grandezza D rapporto maggiore che una terza grandezza E ha rispetto ad un quarta F, significa che AB contiene D un numero di volte più grande di quanto E contiene F; sicché se ad AB si toglie una sua parte CB si può ottenere che la parte rimanente AC contenga D lo stesso numero di volte di quante E contiene F. Si considerino gli equimultipli KI, MI, N rispettivamente di BC, CA, E tali che KI superi D e i multipli RZ e X rispettivamente di D e F tali che RZ superi MI o solo di una sua parte ZO uguale alla stessa D, o di una parte minore di ZO. Poiché KI e multipla di CB allo stesso modo di come MI è multipla di AC, risulterà MK multipla di tutta AB come MI è multipla di AC. Ma Mi è multipla di AC come N lo è di E, per cui MK e N sono equimultipli di

---

[300] *Ivi*, pp. 142-143.

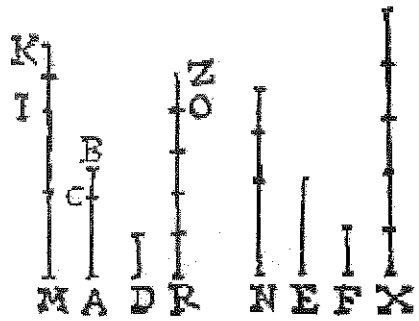
[301] Ariani spiegava che quest'ultimo tipo di proporzione si ha «quoties tres numeri ita ordinantur, ut ratio maximi ad minimum sit aequalis rationi differentiae, quae est inter maximum, et medium, ad differentiam, quae est inter medium, minimum. Exempli gratia, tres numeri 6, 4, 3 sunt in proporzione harmonicaet, quia maximus numerus 6 ita se habet ad minimum 3, ut differentia 2, maximi 6, et medii 4, ad differentiam 1, medii 4 et minimi 3; utraque enim ratio est dupla», *ivi*, p. 143.

[302] Teorema IV Propositio IV: «Si prima ad secundam tandem habeat rationem, quam termia ad quartam, et aeque multiplices primae, et tertiae ad aequae multiplices secundae, et quartae, juxta quamvis multiplicationem, tandem rationem habebunt inter se comparatae.», ivi, p. 152.

[303] *Euclidis Elementorum*, p. 148.

AB e di E. D'altra parte, poiché KI supera D di ZO, MK sarà maggiore di RZ e MI minore di RZ per costruzione.

Ariani, procedendo per assurdo, dimostra che N non può essere maggiore di X, così come MI non supera RZ. Se, infatti, fosse N maggiore o uguale a X mentre MI non suoera RZ, ciò significa che N contiene X più volte di quante MI contiene RZ. Ma X e RZ sono equimultiplidi F e D, sicché N contieneF contie-



ne F un numero di volte maggiore di quanto MI contiene D. E poiché il rapporto tra AC e D è lo stesso di quello traE ed F, tante volte AC contiene D quante volte E contiene F. Ma MI e N sono equimultipli rispettivamente di Ac ed E per cui MI contiene D quante volte N contiene F. Dunque MI contiene D un numero maggiore e un numero minore di volte contemporaneamente, il che è assurdo. Dunque se MI è non maggiore di RZ non può N essere maggiore o uguale a X. D'altra parte MK>RZ mentre MI≤RZ, per cui N≤X. Ma MK e N sono equimultipli di AB (prima grandezza) e E (terza grandezza, mentre RZ e X sono equimultipli di D (seconda grandezza) e di F (quarta grandezza); ne segue allora che se una prima grandezza ha rispetto ad una seconda rapporto maggiore che una terza grandezza ha rispetto ad una quarta, si possono considerare equimultipli della prima e della terza ed equimultipli della seconda e della quarta tali che se il multiplo della prima ecceda il multiplo della seconda, il multiplo della terza non ecceda quello della quarta.

Come detto, da questo Lemma Ariani fa scaturire tre corollari. Il primo converte in teorema la definizione V di *Commandino* di rapporto:

> «Si sunt quatuor quantitates, et sumptis aeque multiplicibus primae, ac tertiae. Itemque aliis aeque multiplicibus secundae, et quartae; et erunt aeque multiplices primae, et tertiae, simul majores, vel aequales, vel minores aeque multiplicibus secundae, et quartae, et hoc verum sit in omni multiplicatione; Prima ad secundam habebit rationem, quam tertia ad quartam[304].

Infatti, se per assurdo la prima grandezza avesse rapporto rispetto alla seconda maggiore di quello che la terza grandezza ha rispetto alla quarta, per il

[304] *Ivi*, p. 150.

Lemma precedente si potrebbero considerare equimultipli della prima e della terza, così come della seconda e della quarta tali che mentre un multiplo della prima supera quello della seconda, un multiplo della terza non supera quello della quarta, il che è contro l'ipotesi.

Il corollario 2 era l'inverso del precedente:

> "Et si prima ad secundam eadem habuerit rationem, quam termia ad quartam; si sumantur aeque multiplices primae, et tertiae, juxta quamcumque multiplicationem, atque aliae aeque multiplices secundae, et quartae; multiplices primae, et tertiae simul erunt majores, aut aequales, aut minores aeque multiplicibus secundae, et quartae"[305].

Anche la dimostrazione di questo asserto discende immediatamente dal precedente lemma. Avendo, infatti, dimostrato che se AC e D hanno lo stesso rapporto di E ed F, considerati MI e N equimultipli secondo una qualsiasi moltiplicazione di AC ed E rispettivamente , e equimultipli RZ e X rispettivamente di D e F, se MI è non maggiore di RZ anche N è non maggiore di X, allo stesso modo – scrive Ariani – si dimostra che se MI è maggiore o uguale a RZ, anche N è maggiore o uguale a X.

Dunque, la definizione di rapporto uguale che aveva tanto fatto discutere i commentatori di Euclide diviene in Ariani una condizione necessaria e sufficiente perché due rapporti siano uguali.

Il corollario 3, infine, stabilisce quando quattro grandezze formano rapporti tali che il primo risulti maggiore del secondo:

> "Si sunt quatuor quantitates, et sumptis aeque multiplicibus primae, et tertiae, atque aliis aequae multiplicibus secundae, et quartae, eventi (et si semel tantum) ut multiplex primae excedat multiplicem secundae, multiplex vero tertiae non excedat multiplicem quartae; prima ad secundam majorem habebit rationem, quam termia ad quartam"[306].

Se, infatti, le quattro grandezze formassero una proporzione nessun multiplo della prima grandezza potrebbe superare un multiplo della seconda, così come nessun multiplo della terza potrebbe superare un multiplo della quarta «ut patet ex antecedente corollario, et ex hoc lemmate»[307].

Nicolò e Pietro De Martino, come già accennato, danno come definizione V, VI e VII la definizione di proporzione, quella di rapporti uguali e, infine, quella di rapporti disuguali. Nicolò si limita a poche precisazioni (ma in seguito, come vedremo, ritornerà sull'argomento), invece Pietro, per quanto riguarda alla definizione di rapporti uguali scrive:

---

[305] *Ibid.*
[306] *Ivi*, pp. 150-151.
[307] *Ibid.*

"Euclide, che ha voluto bandire affatto le idee del contenere, e dell'essere contenuto dalle ragioni geometriche, come quello, che vedeva non aver luogo nelle quantità *irrazionali e incommensurabili*, delle quali egli tratta ampiamente nel libro X, ci ha additato un altro criterio per discernere se due ragioni geometriche sono eguali, o no, del quale criterio non sembra che i moderni siano rimasti gran fatto soddisfatti, forse perché non hanno scoperto i veri fonti, da' quali egli lo ha tratto. Il criterio suggeritoci da Euclide è questo: quando nasce il dubbio se due ragioni geometriche siano eguali, o no, fa d'uopo pigliare gli egualmente molteplici degli antecedenti secondo qualsivoglia moltiplicazione, siccome ancora pigliare gli egualmente molteplici de' conseguenti, parimente secondo qualsivoglia moltiplicazione, ciò fatto fa d'uopo paragonare gli uni con gli altri, a vedere se i primi siano tutti due, o maggiori, eguali, o minori de' secondi: ove ciò segua in tutte le moltiplicazioni possibili si potrà dire sicuramente che le due ragioni siano eguali: ma se paragonandosi gli uni cogli altri si trovi un caso, in cui il molteplice del primo antecedente è maggiore del molteplice del suo conseguente, ma il molteplice del secondo non è maggiore del molteplice del suo conseguente, in tal caso si dirà, che il primo antecedente al suo conseguente ha maggior ragione dell'altro antecedente al suo conseguente. Questo è il tanto celebre criterio suggeritoci da Euclide, dal quale egli ha dedotte tutte le proprietà delle proporzioni"[308].

Ciò premesso, conclude che le definizioni VI e VII sono equivalenti ciascuna alle seguenti coppie di proposizioni, delle quali l'una è l'inversa dell'altra:

> I: Se gli egualmente molteplici degli antecedenti pigliati ad arbitrio sono entrambi eguali, maggiori, o minori degli egualmente molteplici de' conseguenti pigliati parimenti ad arbitrio, le quattro quantità saranno proporzionali.
>
> II: Se quattro quantità sono proporzionali, gli egualmente molteplici degli antecedenti pigliati ad arbitrio saranno entrambi eguali, maggiori, o minori degli egualmente molteplici de' conseguenti pigliati parimente ad arbitrio.
>
> III: Che se pigliati gli egualmente molteplici così degli antecedenti, come de' conseguenti, si trovi che il molteplice del primo antecedente sia maggiore del molteplice del suo conseguente, ma il molteplice dell'altro antecedente non sia maggiore del molteplice del suo conseguente, in tal caso la prima alla seconda avrà maggior ragione della terza alla quarta.
>
> IV: Se la prima alla seconda ha maggior ragione della terza alla quarta si potranno pigliare tali egualmente molteplici degli antecedenti, e tali egualmente molteplici de' conseguenti, che quello del primo antecedente sia maggiore di quello del suo conseguente, ma quello dell'altro antecedente non sarà maggiore di quello del suo conseguente.

[308] *De Gli Elementi*, pp. 166-167.

Quanto alle restanti definizioni, tutti e tre gli autori napoletani omettono quelle di proporzione duplicata e triplicata (X e XI in *Commandino*) rimandando per questi concetti ai rispettivi commenti alle definizione VI e VII del Libro VI, dove Euclide ne fa applicazione. Nel dimostrare poi le proposizioni di questo libro essi non si discostano molto da quanto fatto da Commandino. Di nuovo si può notare che Pietro De Martino fa seguire a ciascuna proposizione una *Dimostrazione co' numeri*, ossia delle verifiche di carattere numerico di quanto precedentemente dimostrato. Si tratta evidentemente di un utile supporto didattico che, lungi dal lederre la generalità delle proposizioni stesse, serve a rendere più immediata la comprensione di una materia in alcuni casi tutt'altro che facile. Inoltre Ariani e Nicolò De Martino aggiungono dopo, la proposizione XXV, nove altre proposizioni riguardo le quali Ariani dice «ab aliis desumptae, ob frequentem vero usum ab interpretibus Euclidis subiunguntur»[309], e Nicolò chiarisce «Euclidis non sunt, sed a Campano et aliis adjectae quia apud gravissimos Auctores frequens est usus ipsarum, nec minus, quam precedentes, quasi Euclidis essent, citari solent»[310]. Essi seguono dunque Commandino che aveva ritenuto opportuno trasferire «ex collectionibus mathematicis Pappi ea in hunc locum»[311], essendo stati adoperati da Apollonio, Archimede e da altri matematici come se fossero teoremi euclidei. Come si vede, tra Commandino e De Martino c'è disaccordo sull'attribuzione della paternità di detti teoremi che il matematico napoletano aveva verosimilmente attinto dal testo di Campano. Essi riguardano il concetto di rapporto maggiore rispeto ad un altro rapporto, il suo inverso, permutato, composto, ordinato, perturbato, ecc. De Martino fa seguire ciascuna di queste proposizioni da uno scolio nel quale fa vedere come analoghe considerazioni valgono anche nel caso rapporto minore.

Come detto in precedenza, Ariani e i fratelli De Martino forniscono i concetti di *ragione composta* e *ragione duplicata* tra le definizioni del VI libro. Ciò non è senza motivo, dal momento che solo nella proposizione XXIII di questo libro Euclide fa uso per la prima volta del concetto di *ragione composta*. Nei De Martino *ragione composta* e *ragione duplicata* costituiscono l'oggetto delle definizioni VI e VII[312] in aggiunta alle consuete 5 di figure simili, di figure reciproche, di divisione di un segmento in estrema e media ragione, di altezza di una figura, e di quantità di ragione[313]. In Ariani, invece, il concetto di ragione composta costituisce la definizione V. Omette, infatti, la definizione di grandezza di un rapporto presente in Commandino e negli altri due autori napoletani. In particolare Pietro De Martino vi si intrattiene a lungo spiegando che:

---

[309] *Euclidis Elementorum*, p. 173.

[310] *Elementa*, p. 275.

[311] F. Commandino, *Euclidis Elementorum Libri XV*, cit., *Liber V*, p. 69.

[312] Elemento, pp. 300-302.

[313] Per quanto riguarda queste prime 5 definizioni vi è piena corrispondenza con il testo di *Commandino*.

> "La ragione, secondo quello, che si disse nel principio del libro V, è il rapporto di due grandezze omogenee paragonate secondo la quantità. Ora chi vuol sapere il valore di una ragione, il qual valore si chiama da' Geometri *quantità*, o *esponente*, o *denominatore*, egli dee vedere, quante volte l'antecedente contiene il conseguente, o che ritorna all'istesso, quante volte il conseguente si contiene nell'antecedente; imperciocché il numero che indica cotesta continenza sarà il valore della ragione, e si chiamerà *quantità* della medesima"[314].

Pietro spiega che questa definizione suggerisce anche un metodo per riconoscere se due rapporti sono o no uguali.

> "Se la quantità delle due ragioni, sopra le quali nasce il dubbio se siano eguali, o no, sono eguali, le ragioni saranno parimente eguali: ma se le suddette quantità sono disuguali, le ragioni ancora saranno disuguali; e quella ragione sarà maggiore la quantità della quale è maggiore"[315].

Se la grandezza di una ragione è uguale al prodotto di più altre moltiplicate tra loro, continua a spiegare Pietro dopo aver dato le definizioni di ragione composta e ragione duplicata (triplicata ecc.), allora detta ragione si dice composta da tutte queste ragioni. Se poi le ragioni componenti sono uguali, si parla di ragione duplicata, triplicata e così di seguito a seconda del loro numero. Pietro termina la sua spiegazione enunciando un teorema valido per le ragioni composte:

> Teorema: Se fra due qualsivogliano quantità omogenee si mettono altre qualsivogliano quantità omogenee, e quante si vogliano, la ragione, che la prima ha all'ultima sarà composta da tutte le ragioni intermezze[316].

Ne consegue che nella proporzione continua A:B=B:C, la ragione composta tra la prima e la tarza è duplicata della ragione della prima e della seconda; nella proporzione continua A:B=B:C=C:D la ragione composta tra la prima e la quarta è triplicata della ragione tra la prima e la seconda. E così di seguito per proporzioni continue costituite da un numero maggiore di termini.

Anche Ariani e Nicolò De Martino spiegano che la nozione di ragione composta nasce dalla moltiplicazione delle grandezze che costituiscono i rapporti considerati. Ariani, in più, fa seguire alla definizione di ragione composta due lemmi e due corollari. Il primo afferma che se si moltiplicano due grandezze per

---

[314] *Degli Elementi*, p. 207.
[315] *Ibid.*
[316] *Ivi*, pp. 210-211.

una stessa grandezza queste avranno lo stesso rapporto di prima della moltiplicazione[317].

Dovendo dimostrare che A:B=AC:BC, Ariani fa innanzitutto notare che, dalla natura stessa della moltiplicazione si ha 1:C=A:AC e 1:C=B:BC. Dunque A:AC=B:BC e permutando i medi A:B=AC:BC.

Il secondo lemma, che coincide con il teorema enunciato tra le sue spiegazioni da Pietro De Martino, afferma che se si interpongono tra due grandezze un qualsivoglia numero di altre grandezze, il rapporto tra le due grandezze date è uguale al rapporto composto dai rapporti di tutte le grandezze medie[318].

I due corollari sono conseguenze dirette di detti lemmi. Nel primo Ariani dice che se si considerano tre grandezze A, B, C in proporzione continua, il rapporto tra la prima e la terza ha ragione duplicata di quello tra la prima e la seconda[319]. Infatti, essendo A:B=B:C, $\frac{A}{C}=\frac{A}{B}\frac{B}{C}$, ed essendo $\frac{A}{C}=\frac{A}{B}\frac{B}{C}$, segue che $\frac{A}{C}=\left(\frac{A}{B}\right)^2$. Nel secondo corollario Ariani generalizza questo risultato a un qualsivoglia numero di rapporti[320].

Come per il precedenti libri anche per il libro VI la trattazione dei tre matematici napoletani si arricchisce di osservazioni, spiegazioni e di alcuni corollari non presenti nell'edizione del Commandino e che hanno lo scopo di chiarire e completare alcuni argomenti. È il caso della Proposizione I, nella quale si dimostra che triangolo e parallelogrammi che hanno uguale altezza sanno tra loro come le rispettive basi, fatta seguire da Ariani da un corollario nel quale fa vedere che triangoli e parallelogrammi che hanno la stessa base stanno tra loro come le rispettive altezze.[321] Così dopo aver dimostrato che nei triangoli aventi gli angoli rispettivamente uguali i lati omologhi sono proporzionali, Ariani enuncia due corollari: primo, che i triangoli equiangoli sono simili[322], e secondo,

---

[317] Lemma I: "Si duae magnitudines per tandem magnitudinem multiplicentur, tandem habebunt inter se rationem post multiplicationem, quam habebant cum simplices erant", *Euclidis Elementorum*, p. 182.

[318] Lemma II: «Si inter datas duas megnitudines quaecumque interponantur magnitudines, ratio datarum magnitudinum erit composita ex rationibus mediarum», *ivi*, p. 183.

[319] Corollario I: «Si igitur sint tres magnitudines A, B, C, in continua proporzione, prima A ad tertiam C duplicatam habebit rationem ejus, quam habet prima A ad secundam B, quia ratio A ad C componitur ex rationibus A ad B, et B ad C, quae duae rationes inter se sunt aequales ex hypothesi», *ivi*, p. 184).

[320] Corollario 2: «Et si sint quatuor magnitudines in continua proporzione A, B, C, D; prima A ad quartam D triplicatam habebit rationem ejus, quam prima magnitudo A habet ad secundam D, quia ratio A ad D componitur ex rationibus A ad B, B ad C, C ad D, quae sunt aequales inter se ex hypothesi», *ivi*, p. 184.

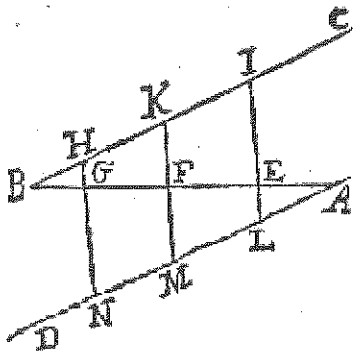
[321] Corollarium: «Triangola, et Parallelogramma, quae tandem aut aequales bases habent, inter se sunt ut altitudines"», *ivi*, p. 186.

[322] 1. «Triangola igitur, quae sunt aequiangula sunt similia», *ivi*, p. 190.

che una retta parallela a un lato di un triangolo determina all'interno di questo un altro triangolo simile al precedente[323]. Il primo di questi due corollari è presente anche in Nicolò e Pietro De Martino nei quali si trovano altri due interessanti corollari uno per ciascuna delle proposizioni VI e VII che sono un completamento dei criteri di similitudine dei triangoli. Citiamo dal testo di Nicolò:

> [...] triangula, quae habent unum angulum uni angulo aequalem, et latera circa istos angulos proportionalia, esse etiam similia inter se [324].

> [...] triangula, quae unum angulum uni angulo aequalem habent, latera vero circum alios angulos proportinalia, et reliquos angulos ejusdem speciei inger se, esse etiam similia[325]Nicolò fa seguire a questo corollario uno scolio nel quale puntualizza che la similitudine di due triangoli «quatuor modis ostendi posse»: primo, se i triangoli sono equiangoli; secondo se hanno i lati in proporzione; terzo se hanno un angolo rispettivamente uguale e i lati che comprendono quest'angolo proporzionali; quarto se hanno un angolo rispettivamente uguale, i lati che comprendono un altro angolo proporzionali e i rimanenti angoli entrambi acuti o entrambi ottusi[326].



Particolarmente interessante è il corollario che Ariani pone subito dopo la proposizione X[327] nella quale Euclide insegna a dividere una linea in parti proporzionali e similmente disposte rispetto a quelle di un'altra linea data già divisa. Qui Ariani fa osservare che se sono date più rette parallele ad un lato di un triangolo i segmenti determinati da esse sui lati del triangolo saranno proporzionali. Sicché la suddetta proporzione insegna anche a tagliare una linea in quante si voglia parti uguali. Se, con riferimento alla figura qui sopra, si vuole, infatti, dividere una linea AB in un certo numero di parti, considerata la semiretta AD

[323] 2: «Si in triangolo uni lateri ducatur recta parallela haec secabit ab eodem aliud triangulum ipsi simile», *ibid.*

[324] *Elementa*, p. 315.

[325] *Ivi*, p. 317.

[326] *Ivi*, pp. 317-318.

[327] *Euclidis Elementorum*, pp. 196-197.

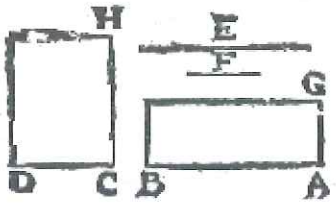
che formi con AB un qualsiasi angolo, e la parallela BC ad AD, si prendono le parti uguali AL, LM, MN su AD e BH, HK, KI su BC e si conducono le rette HN, KM, IL le quali secheranno AB nei punti G, F, E, tali BG=GF=FE.

In relazione, poi, alla notevole proposizione XVI, la cosiddetta proposizione *ponte* tra la teoria dell'equivalenza delle figure piane e quella delle proporzioni, secondo cui in una proporzione di quattro linee il rettangolo dei medi è uguale al rettangolo degli estremi, Nicolò De Martino fa notare in uno scolio che

> "Vera est etiam haec propositio, si parallelogramma facta ex mediis, et extremis non sint rectangula, sed utcumque aequiangula"[328]

Ariani, invece, completata questa proposizione con il seguente corollario

> "Hinc ad datam rectam lineam facile est rectangulum applicare, quod sit aequale dato rectangulo, ut si ad datam rectam lineam AB applicari debeat rectangulum aequale dato rectangulo DH, fiat ut BA ad DC, ita HC ad aliam rectam AG; rectangulum enim, quod continetur ex BA, AG aequale est dato rectangulo DH"[329]



La dimostrazione della proposizione successiva, nella quale si insegna a descrivere su una data linea una figura rettilinea simile ad un'altra figura rettilinea assegnata e similmente disposta, dà, poi, l'opportunità ad Ariani di precisare che se da un qualsiasi punto di una circonferenza si traccia la perpendicolare al diametro, il quadrato del segmento di perpendicolare determinato da detto punto e dal piede della perpendicolare sul diametro, è equivalente al rettangolo avente per lati i due segmenti in cui vene diviso il diametro[330], e che un qualsiasi segmento il cui quadrato è equivalente ad un rettangolo è medio proporzionale tra i lati del rettangolo[331].ìì Invece Nicolò De Martino trae spunto da questo problema per precisare che due figure rettilinee costruite su due rette si dicono simili e similmente disposte (cosa che Euclide non definisce in alcun punto dei suoi *E-*

---

[328] *Elementa*, p. 330-331.

[329] *Euclidis Elementorum* , p. 203.

[330] Corollarium I: «Si ex puncto quopiam sumpto in circoli circumferentia ad diametrum perpendicularis recta linea ducatur, hujus perpendicularis quadratum aequale erit rectangulo, quod diametri segmentis continetur. Patet ex corol. Prop. 13 hijus libri, et ex prima parte hujus propositionis», *ivi*, p. 204.

[331] Corollarium II: «Quaelibet recta, cujus quadratum est aequale rectangulo, quod a duabus aliis rectis linei continetur, ets media proportionalis inter easdem», p. 204.

lementi) se gli angoli che giacciono su dette rette sono uguali e i restanti angoli si seguono nello stesso ordine, in modo che i lati omologhi si seguano sempre nello stesso ordine.

9. Conclusioni

Il ricorso più volte fatto da Agostino Ariani e dai fratelli De Martino nei loro commentari degli *Elementi* era una chiara dimostrazione di come il moderno punto di vista analitico non fosse affatto inconciliabile con la tradizione euclidea. Vuote dunque erano le polemiche tra fautori del metodo sintetico e fautori del metodo analitico che avevano infiammato la discussione dei matematici napoletani di quegli anni. Era stato Paolo Mattia Doria con una sua pretesa dimostrazione della duplicazione del cubo per via elementare a scatenare una *querelle* dai toni aspri ed anche ingiuriosi. Gli errori del Doria, stigmatizzati da gran parte dei matematici napoletani, divenuti oggetto di critiche e di scherno da parte di Celestino Galiani e Guido Grandi e resi noti alla comunià internazionale dagli *Acta eruditorum*, fecero sì che questi si schierasse apertamente contro la nuova geometria analitica cartesiana, accuata di non avere fondamenti certi, quale paladino della sintesi euclidea unoco metodo da ammettersi in geometria[332]. La sua fu una battaglia di retroguardia, disperata e senza sbocchi, destinata solo a condannarlo all'isolamento e che servì solo a radicalizzare le posizioni di cartesiani del primo periodo, come De Cristofaro, che avevano accolto con favore la nuova geometria al punto di non accorgersi di altre novità, quali il calcolo differenziale, che stavano rapidamente conquistando posizioni enll'ambito della matematica europea. Era proprio questa la differenza tra i cartesiani del primo momento e la nuova generazione dei matematici impersonata da Ariani e dai fratelli De Martino. Pur allevata al cartesianesimo dai vari Manforte e De Cristofaro, questa generazione sembrò passare indenne attraverso le polemiche che avevano coinvolti cartesiani della prima ora e anticartesiani. Essi ritenevano senza riserva alcun che l'analisi geometrica cartesiana non escludesse la sintesi degli antichi e quest'ultima non poteva essere opposta alla prima come prototipo di purezza geometrica e di rigore. La geometria degli antichi e quella dei moderni erano entrambe certe e rigorise e servivano entrambe all'avanzamento della matematica. Prendendo in considerazione questo tema Niccolò De Martino scriveva nella *Praefatio* della sua *Algebra*:

[332] Cfr. R. GATTO, *Il cartesianesimo matematico a Napoli*, cit.

> "Exorto Cartesio, litterarii orbis egregio restauratore, coepit ex Algebram et Geometria ita quidam unum constari corpus, ut una ab altera amplius divelli non posset"[333].

L'avvento della geometria cartesiana aveva dimostrato che Algebra e Geometria costituivano un solo corpo, che l'una non poteva fare a meno dell'altra dal momento che l'una serviva all'avanzamento dell'altra. L'introduzione dell'algebra nella geometria aveva consentito di risolvere in modo semplice ed agevole numerosi problemi relativamente ai quali la geometria degli antichi si era dimostrata mezzo poco adatto essendo la via da essi prospettata lunga e faticosa. Eppure la stessa algebra si era dimostrata incapace a fornire una formula per radicali che consentisse di determinare le radici di un'equazione di grado superiore al 4°. Per questa ragione Descartes era stato costretto a fare ricorso alla geometria instaurando il medoto della costruzione geometrica delle equazioni che forniva le radici di un'equazione di grado qualsiasi come ascissa dei punti di intersezione di due apposite curve.

> "Unde colligitur, - contiuava Nicolò De Martino - Algebram dupliciter pertractari posse; vel scilicet indipendenter a Geometria, prout exculta fuit ab iis, qui Cartesium praecessertunt; vel eam cum Geometria coniungendo, prout factum a Cartesio, aliisque, qui Cartesium secuti, vestigia eius premere voluerunt. Priori modo pertractata, erit valde imperfecta, ac limitata, et angustiis admodum limitibus coarctabitur. At vero si secondo modo tradatur, licebit progredi in infinitum, neque uspiam terminus invenietur"[334].

La nuova generazione dei matematici formatasi nel secondo decennio del Settecento mostrava di possedere una divisa mentalità che li distingueva dei primi cartesiani. Essi in realtà erano andati oltre lo stesso cartesianesimo accogliendo con favore il calcolo differenziale e le nuove teorie fisiche newtoniane e guardavano con interesse a quanto stava avvenendo nel resto d'Europa.

In quegli stessi anni, mentre si consumava la polemica scatenata dal Doria e mentre il newtonianesimo andava sempre più guadagnando spazio tra gli studiosi napoletani i Gesuiti napoletani riattizzarono il fuoco mai sopito della loro intolleranza contro i *novatores*. L'occasione era stata la pubblicazione delle *Lettere apologetiche dell'Aletino* e dalla *Risposta* di Costantino Grimaldi[335]. Vale la pena leggere in merito quanto scriveva Celestino Galiani a Guido Grandi da Roma l'11 dicembre 1726:

---

[333] N. DE MARTINO, *Elementa algebrae pro novis tyronibus tumultuario studio concinnata*, Neapoli, Ex typographia Felicis Mosca, expensis Bernardi Gessari, 1725, t.I, p. VI.

[334] *Ivi*, p. VII.

[335] Il 31 ottobre del 1726 la Congregazione dell'Indice aveva condannato le opere del Grimaldi ed ostacolò, come appunto si legge nel brano qui sopra riportato, la pubblicazione delle *Discussini istoriche e teologiche fatte per occasione della risposta alle «Lettere apologetiche» di Benedetto Aletino* pubblicate a Napoli con la falsa indicazione di Lucca nel 1725.

"Eccole due novelle di letteratura, la seconda della quale gliela dico in tutta confidenza, con patto che non passi innanzi. Dopo essrr riuscito, a' nostri Socij, di far proibire qui anche in prima classe e con eccettuazione nelle linceze, i libri del Grimaldi contra l'Aletino, quanto quei dell'ultima ristampa accresciuti, quanto quei della rima, quantunque l'altra volta, cioè quand'uscirono la prima volta, furono accusati ed esaminati nel Sant'officio senza aver meritati censura alcuna, finalmente ottenendo, i medesimi buoni socij, assistiti dal favore di questa corte, che pochi dì sono, i medesimi libri, dal Vicerè di Napoli si facessero tutti (erano quei della ristampa in arresto da più mesi) gettare in mare. O' che allegrezz, o' che trionfi ora si cantano, questa è la vera maniera di vincere nelle letterarie dispute, altro che lo starsi a macerare ed impallidire su de' libri. Quest'altra, che dee restar tra noi, è assai bella. Alcuni grossissimi teologi e più rinomati in questa corte, avendo rappresentato a S. Santità che la fede vacilla, perché non solo nella magior parte delle Università, ma anche ne' chistri si comincia a professare la filosofia moderna, 'l buon vecchio, ad in stanze de' medesimi, aveva dato ordine che si stendesse una bolla nella quale, sotto pena di scomunica, *ipso facto incurrenda*, si ordinasse che in tutte le scuole non s'insegnasse altra filosofia se non quella di Aristotele, come quella sopra cui è appoggiata la teologia. Per buona fortuna, quest'ordine, per essere eseguito è capitato in mano di persona savia ed intesa delle cose, la quale, col prender tempo e col rappresentare le cattive ceonseguenze di un tal passo, ha in parte mitigato quel calore col quale sì fatta bolla si desiderava veder presto distesa"[336].

[336] Cfr. C. GALIANI-G. GRANDI, *Corrispondenza (1714-1729)* a cura di F. Palladino e L. Simonutti, Firenze, Olschki, 1999, lettera 107, pp.257-260.

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXXIII, (2006) pp. 251-261

Calcestruzzo fibro-rinforzato

Nota del Socio Ord. Riccardo Sersale

(Adunanza del di 9 giugno 2006)

Riassunto - Viene esaminata la possibilità di incrementare il rapporto resistenza a trazione/compressione dei conglomerati cementizi, abbassandone anche la fragilità, mediante addizione all'impasto di appropriate fibre di varia natura, distribuite a caso nella matrice.
Dopo aver sottolineato che il calcestruzzo fibro-rinforzato si presta ad esser gettato con le medesime tecniche di quello ordinario, insieme con rapidità e facilità di messa in opera,viene discusso il suo comportamento allorchè sottoposto a sollecitazione di trazione, illustrata la modalità di risposta, esaminato il modo in cui si comporta ciascuna delle fibre delle diverse classi annegate nella matrice, in funzione delle caratteristiche loro proprie e del tipo di cemento impiegato.

Parole chiave: Calcestruzzo fibro-rinforzato; fibre.

Summary - The possibility of improving tensile/compressive strength ratio, lowering at the same time the brittlenes of cementitious concretes, through addition of suitable fibers of different kinds, randomly distributed within the cement matrix, has been examined.
Emphasized that fiber-reinforced concrete can be laid in the same way as the ordinary one, together with the rapidity and facility to make it ready for use, its behaviour when subjected to tensile stress has been discussed, and the response recorded.
The way in which behaves each fiber embedded in the matrix, according to its peculiar characteristics and the type of cement used, are also stressed.

Key words: Fiber reinforced concrete; fibers.

Com'è noto, le paste indurite di cementi idraulici esibiscono un basso rapporto resistenza a trazione/compressione. La resistenza a trazione risulta infatti circa 10-15 volte inferiore a quella a compressione. Per incrementare tale rapporto e per ridurre la fragilità, i materiali cementizi possono esser rinforzati anche con appropriate fibre (metalliche, sintetiche, ceramiche, naturali, ibride),

distribuite a caso nella matrice. Costituiscono un ulteriore aggregato, la cui lunghezza deve esser graduata in funzione del diametro massimo dell'inerte classico (1). Il calcestruzzo rinforzato con fibre di acciaio, di polipropilene, ibride (polipro-pilene ed acciaio) accusa un'energia di frattura ben più alta di quella del calcestruzzo ordinario.

La funzione delle fibre è quella d'impedire o ritardare la propagazione della frattura del materiale cementizio sottoposto a sollecitazione, rendendo la rottura lenta e controllata. Le fibre conferiscono al composito una certa resistenza a trazione anche dopo fessurazione ed aumentano la capacità di deformazione e di assorbimento di energia (calcestruzzi duttili e tenaci).

L'incorporazione di fibre nel calcestruzzo costituisce dunque una via concreta per ottenere un significativo incremento della duttilità, conferendo, ad un tempo, al composito la capacità di resistere a carichi elevati.

Il basso volume di fibre addizionabile all'impasto limita però, per problemi di lavorabilità, i vantaggi del loro impiego ed impone l'adozione di additivi riduttori d'acqua.

L'idea di rinforzare materiali fragili con fibre, al fine di migliorarne comportamento meccanico e duttilità, rimonta agli albori della civiltà ed il primo esempio di materiale cementizio rinforzato con fibre dell'era moderna è rappresentato dal connubio cemento-amianto che, per lungo tempo, ha dominato il mercato perché ritenuto, come fibra, quasi ideale. L'amianto, una varietà di silicato cristallino fibroso, rappresenta infatti la fibra che ha avuto più successo come rinforzo del cemento, perché ben sopporta l'attrito meccanico cui va soggetta durante l'impiego e la forte alcalinità a lungo termine della matrice cementizia. La sua affinità con il cemento è in buona parte attribuibile ad una struttura tubolare. Il suo impiego è stato però oggi abbandonato, perché ritenuto nocivo per la salute.

Molte tecniche di fabbricazione sviluppate nell'industria delle materie plastiche rinforzate con fibre possono facilmente esser trasferite alla produzione di conglomerati cementizi, ciò che facilita la sostituzione delle fibre di amianto.

I principali candidati a tale sostituzione sembrano oggi le fibre di vetro, pur se esse non possono esser impiegate in combinazione con il cemento Portland ordinario, se non in composizione speciale, poiché non sopportano il forte ambiente alcalino che lo caratterizza.

L'interesse odierno dei calcestruzzi fibro-rinforzati nasce da varie considerazioni: sono diventati commercialmente disponibili differenti tipi di fibre e si registra un significativo progresso della scienza e tecnologia dei materiali compositi. È inoltre possibile realizzare un materiale da costruzione leggero, resistente e tenace, che si presta ad esser gettato con le medesime modalità di un calcestruzzo ordinario, consentendo velocità e facilità di posa in opera. Il calcestruzzo può infatti esser gettato come se non fosse armato e pertanto con

tecniche tradizionali. Naturalmente il buon esito dell'operazione dipende da una corretta formulazione.

Un esempio illuminante di ciò è costituito dalla messa a punto della metodologia "spin casting" (2) o "getto centrifugato", adatto alla produzione di piloni e condutture prefabbricate in cemento. La centrifugazione ne determina il compattamento e consente di ottenere la forma desiderata. L'inserimento di armature tradizionali richiederebbe tempi più lunghi, costi considerevoli e strutture di notevole spessore, decisamente pesanti. L'utilizzo di calcestruzzo rinforzato con fibre di carbonio o di alcool polivinilico costituisce un'interessante alternativa per la realizzazione di tali elementi, impiegando anche un'aliquota di cemento ultrafine, per migliorare le proprietà reologiche della miscela fresca ed ottenere una matrice molto densa, con eccellenti proprietà meccaniche.

Diverse famiglie di fibre vengono impiegate come rinforzo dei calcestruzzi. La tabella 1 riporta le caratteristiche di alcune di esse (1).

Tab. 1 – Principali caratteristiche meccaniche di materiali usati come rinforzo dei calcestruzzi

Materiale	**Modulo Young (kN/mm^2)**	**R trazione (kN/mm^2)**	**Allungamento a rottura (%)**
Vetro	80	2,4	3,4
Polipropilene	5	0,5	20
Acciaio	200	1-3	3-4
Carbonio	380	1,8	0,5

Non appena un materiale cementizio fibro-rinforzato viene sottoposto ad una sollecitazione di trazione, ha luogo una deformazione della matrice che, finchè esiste un buon legame matrice-superficie della fibra, viene trasferita anche alle fibre annegate nell'impasto. Matrice e fibre sono pertanto entrambi sottoposte a sollecitazioni, la cui intensità è proporzionale alla deformazione, e, a parità di deformazione, al modulo elastico del materiale (3) (Fig 1). Conseguentemente, fibre ad alto modulo elastico, se introdotte in quantità sufficiente, riducono significativamente le sollecitazioni nella matrice, aumentando il carico massimo che il composito può sopportare senza rompersi. In generale, la resistenza a trazione del composito è determinata dalle proprietà di resistenza della matrice e delle fibre, dal quantitativo e geometria delle fibre, dall'intensità del legame fibra-matrice.

Le fibre annegate nel calcestruzzo vengono meno per sfilamento ("*pull-out*"), piuttosto che per frattura (4). In tal caso, il legame matrice-fibra controlla la duttilità esibita. Non appena la matrice si rompe, le fibre di rinforzo colmano le fessure e determinano meccanismi di trasferimento della sollecitazione. Se la

deformazione continua a crescere, inizia il processo di sfilamento (*pull-out*), che determina una tenacizzazione o meccanismi di assorbimento di energia. I procedimenti di *pull-out* costituiscono pertanto i fondamentali processi micromeccanici che decidono la tenacità del composito (5).

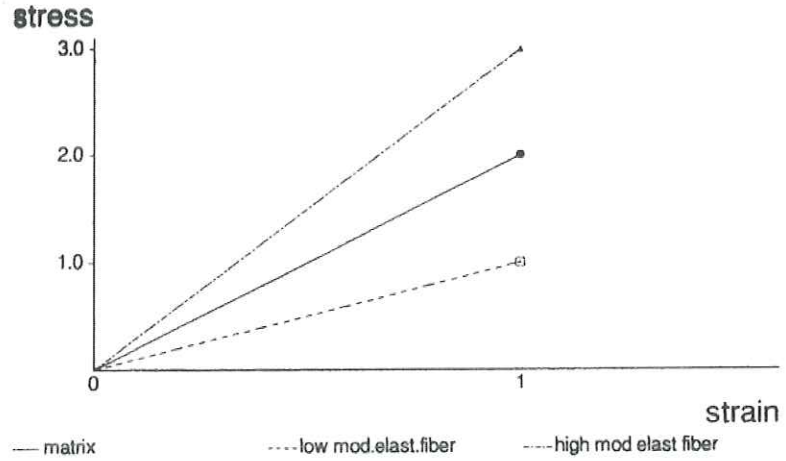


Figura 1 – Curve sforzo-deformazione di fibre aventi differenti moduli elastici inglobate in matrice cementizia.

Il *pull-out* che causa il cedimento del composito si registra con carichi più bassi di quelli richiesti per la rottura delle fibre. L'intensità del legame aggregato-pasta di cemento è generalmente debole. Ciò spinge a ricercare accorgimenti atti a migliorare il legame fibra-cemento. Sono stati suggeriti : trattamenti chimici superficiali, la ricopertura delle fibre con altri prodotti per aumentarne l'adesione, trattamenti meccanici atti alla deformazione delle fibre di acciaio per migliorarne l'ancoraggio. Il fatto che dopo scollamento delle fibre di acciaio non siano state osservate tracce di pasta di cemento aderenti alla fibra, fa ritenere che non si instaurino legami chimici fra i due materiali (6).

A parte la geometria delle fibre, la resistenza al *pull-out* è influenzata dalle loro proprietà, dalla distribuzione all'interno dell'impasto, che non dipende tanto dalla tipologia, quanto dalla diffusione nel calcestruzzo – che deve risultare la più omogenea possibile per ritardare, mediante un effetto diffusionale, il collasso successivo alla fessurazione-, dalle condizioni di stagionatura, dalla velocità di applicazione del carico, dalla temperatura, dalla presenza di tensioni, dalla posa in opera.

È stato posto in luce che la resistenza a flessione della malta cresce progressivamente passando da fibre di acciaio dolce, a fibre di acciaio legato, a fibre rivestite di ottone (7). Il miglioramento è però relativamente basso e, in ogni caso, assai più basso di quello conseguibile con un aumento di fibre.

Quando una matrice cementizia viene rinforzata con non più di 1% di fibre, esse quasi non influenzano la resistenza a trazione. Solo dopo fessurazione della matrice, le fibre contribuiscono a creare un ponte di collegamento fra le fenditure. Se l'incorporazione di fibre supera il 2%, l'interazione fibra-matrice aumenta notevolmente la resistenza a trazione della prima (8). La resistenza a compressione è indipendente dalla natura delle fibre.

Un incremento della resistenza a flessione e trazione si può conseguire con alti dosaggi di fibre (30-35 kg/m3) ed impiegando additivi superfluidificanti, fumo di silice od altro.

Per la buona riuscita del calcestruzzo fibro-rinforzato sono determinanti, oltre alle caratteristiche presenti nella tabella 1, tanto la forma delle fibre, quanto il rapporto di aspetto (il rapporto fra lunghezza e diametro della fibra). Anche il diametro delle fibre influenza il comportamento del calcestruzzo fibro-rinforzato, in relazione ai carichi applicati ed alle relative deformazioni.

Nella maggior parte delle utilizzazioni dei materiali cementizi fibro-rinforzati, la proporzione di fibra aggiunta all'impasto è bassa (10% in volume o meno). Riveste perciò particolare importanza la scelta della matrice, ai fini dello sviluppo delle proprietà e durabilità del composito.

Molti tipi di cemento idraulico vengono impiegati nell'industria delle costruzioni: cementi Portland, alluminoso ad alto tenore di allumina, soprasolfatato, di aggiunta (9). La scelta va fatta tenendo conto delle caratteristiche della classe di fibre impiegate.

Fra i cementi emergenti, particolare interesse riveste quello MDF (macrodefect-free). Si tratta di un legante prodotto in maniera da raggiungere una resistenza a flessione dell'ordine di 150 MPa o più e vengono fatti tentativi per migliorare la duttilità di questo nuovo prodotto mediante incorporazione di fibre (10).

Le fibre possono esser classificate in sei gruppi:
1 – fibre di minerali cristallini, quali amianto di crisotilo;
2 – fibre di silicati vetrosi;
3 – fibre ceramiche: di carbonio od allumina;
4 – fibre di polimeri organici sintetici, quali polipropilene;
5 – fibre naturali vegetali, non trattate: fibre di agave, o purificate: cellulosa;
6 – fibre metalliche, quali quelle prodotte con differenti tipi di acciaio.

Le fibre di minerali cristallini possiedono uniche proprietà fisiche e chimiche. Il minerale più abbondante è il crisotilo ($3MgO{\cdot}2SiO_2{\cdot}2H_2O$) che costituisce più del 90% dell'amianto mondiale ed è stata la fibra che ha predominato negli impasti cementizi (9). Tali fibre sopportano bene il forte attrito meccanico cui vanno soggette durante l'impiego e la forte alcalinità, a lungo termine, delle matrici cementizie. La loro lavorazione è ritenuta però pericolosa per la salute.

Benchè le fibre di vetro mostrino eccellenti proprietà meccaniche, il loro impiego viene limitato dal decremento con il tempo delle resistenze a trazione, flessione ed urto, per effetto dell'alta alcalinità della pasta di cemento. Anche il vetro E (a basso contenuto di alcali, perché sostituiti con ossido di boro), va soggetto a corrosione se combinato con cemento Portland. Sono state pertanto sviluppate fibre AR (alcali-resistenti), ad alto contenuto di ZrO_2, che assai meglio sopportano la corrosione, ma non ne sono del tutto esenti.

I vetri silicatici non potranno mai esser prodotti totalmente resistenti agli alcali. Per migliorare tale resistenza, le fibre di vetro vengono protette con rivestimenti inibitivi, derivati da composti organici triossidrilici (pirogallolo), ritenuti, però, ritardanti dell'idratazione del cemento in prossimità delle fibre.

L'alcalinità non costituisce l'unico fattore di deterioramento, dato che esso si registra anche, seppure in misura minore, con impiego di cementi soprasolfatato od alluminosi che, com'è noto, sono meno basici. Anche qualche reazione chimica potrebbe coinvolgere il vetro annegato nelle matrici.

È stato proposto di impiegare cementi a base di solfoalluminato di calcio (11) che, nel corso dell'idratazione, non liberano idrossido di calcio.

È stata anche suggerita l'addizione di microsilice, che reagisce con l'idrossido di calcio per neoformare C-S-H. Essa riduce notevolmente la presenza di portlandite libera sulla superficie della fibra, ma non il pH della soluzione dei pori della pasta di cemento, fino al punto da evitare la dissoluzione completa anche di un vetro alcali-resistente.

Fra le fibre ceramiche, quelle di carbonio sono state principalmente sviluppate per applicazioni aerospaziali, per l'alta resistenza e rigidità. Sono ancora piuttosto dispendiose, con evidenti limitazioni nel settore delle costruzioni edili. Per merito della struttura sviluppano un buon legame di attrito con la matrice. Per migliorarlo ulteriormente, le fibre possono esser trattate superficialmente con ozono (12). Per effetto del forte carattere inerte, della resistenza e della rigidità del legame covalente C-C, le fibre di carbonio assicurano un eccellente rinforzo in ambienti aggressivi (9). I vantaggi dell'impiego di fibre di carbonio di rinforzo, rispetto a quelle di acciaio, polipropilene o vetro, sono il finissaggio, la resistenza termica, la possibilità di impiegarne alti volumi, la stabilità a lungo termine in ambienti alcalini ed altri ambienti aggressivi.

Per rinforzo dei materiali cementizi sono state proposte, in sostituzione dell'amianto, un gran numero di fibre organiche sintetiche ed il loro impiego è in crescita.

Fibre organiche sintetiche (polietilene, polipropilene, poliacrilammide) generalmente conferiscono sufficiente resistenza agli alti valori di pH delle paste di cemento Portland. Determinano un legame piuttosto debole con la matrice cementizia, di natura meccanica e di adesione (13), legame che non

migliora con l'addizione di microsilice, ma con l'impiego di fibre fibrillate. Si è diffuso infatti l'impiego di fibre di poli- propilene commercializzato in forma di un reticolo di fibrille (sottili elementi di una fibra), come monofilamenti relativamente grandi (diametro 150μm), reticoli fibrillati o no mediante procedimenti meccanici, come nastri o films fibrillati. Hanno alta resistenza a trazione, alto allungamento a rottura, buona resistenza meccanica e chimica, insensibilità all'umidità. La loro addizione al calcestruzzo accresce notevolmente le resistenze a flessione ed all'urto. Il processo di frattura è generalmente dominato dal pull-out delle fibre. Il lavoro per la frattura del composito cresce con il contenuto di fibre e triplica con un contenuto del 3% in volume.

Il polipropilene è idrofugo e pertanto non lega bene con il cemento, ma le fibrille, essendo estremamente fini, formano un reticolo che determina un sufficiente legame meccanico.

Le fibre organiche sintetiche generalmente esibiscono un basso modulo di Young. Sono state messe a punto fibre sintetiche PAN (poliacrilonitrile) che notevolmente innalzano tale modulo.

In Europa si sono affermate fibre di alcool polivinilico che sono idrofile e pertanto adatte al rinforzo di materiali cementizi. Non possono, però, esser impiegate da sole, ma necessitano dell'unione con un supporto (ad esempio fibre cellulosiche).

Le aramidiche sono fibre ad alte prestazioni meccaniche, ottenibili per lavorazione di poliammidi aromatiche. Sono caratterizzate da una resistenza a trazione confrontabile con quella delle più comuni fibre di carbonio, ma hanno un modulo elastico più basso. Hanno un'ottima resistenza chimica ed all'abrasione, e, a differenza di quelle di carbonio, hanno una notevole resistenza all'urto e bruciano con difficoltà. Per effetto dell'elevata resistenza specifica (intesa come resistenza meccanica a trazione rapportata al peso specifico), sono particolarmente indicate per applicazioni aeronautiche, mentre la resistenza all'urto ne suggerisce l'uso in applicazioni militari. Nell'edilizia sono utilizzate nel restauro di strutture in muratura, negli interventi di messa in sicurezza e sono state impiegate nel ripristino delle volte della Basilica di San Francesco d'Assisi, danneggiate dai recenti eventi sismici (14). Sono commercializzate sotto il nome di KEVLAR e rappresentano la quasi totalità delle fibre a base aramidica fornite in varie forme di rinforzo.

Fra le fibre naturali, hanno maggior interesse quelle derivate dal legno. La polpa di legno rappresenta la fonte delle fibre cellulosiche che in parte hanno preso il posto di quelle di amianto. Sono state sviluppate fibre di alta qualità ed è stato molto migliorato il comportamento dei compositi, mediante procedimenti di stagionatura in autoclave.

Per il rinforzo del calcestruzzo le fibre più importanti sono quelle di acciaio, correntemente prodotte da fili stirati a freddo, dal taglio di lamierini, mediante

fusione ed altre tecniche. Le sezioni possono esser circolari, quadrate ed a mezza luna.

Come rinforzo del calcestruzzo vengono usate fibre di acciaio di ridotta lunghezza e forma varia, con rapporto d'aspetto generalmente compreso fra 30 e 100. Garantiscono ottime proprietà al calcestruzzo se utilizzate con leganti la cui soluzione dei pori della pasta di cemento presenta un pH superiore a circa 11. Il cemento Portland, che soddisfa questa condizione, è largamente usato in combinazione con le fibre di acciaio (15). Adatti si rivelano pure i cementi d'alto forno e pozzolanico.

Se il pH scende al disotto del valore critico, le fibre di acciaio si possono corrodere nelle zone prossime alla superficie, per effetto di fenomeni di carbonatazione.

In presenza di fibre di acciaio non possono esser usati additivi a base di cloruri ($CaCl_2$), acceleranti della presa e dell'indurimento.

Con successo limitato sono stati fatti tentativi per impiegare il rinforzo sotto forma di fogli ed un certo interesse ha mostrato la possibilità d'impiego di nastri di vetro metallico (leghe metalliche amorfe raffreddate in maniera estremamente rapida (16)) quale rinforzo per cemento e calcestruzzo (17). Tali nastri, di composizione variabile, con resistenza a trazione dell'ordine di 2500 MPa (9) ed alta resistenza a corrosione, che hanno generalmente lunghezza di 1-2 mm, spessore di 20-30 μm e possono esser prodotti anche in lunghezze di 15-60 mm, sono più alcali resistenti delle fibre di vetro resistente agli alcali.

Calcestruzzi rinforzati con fibre di acciaio vengono impiegati per la realizzazione di: pavimentazioni industriali di ampia estensione e ridotta distribuzione di giunti di contrazione, opere portuali, aerospaziali, rivestimenti di gallerie (18), solette di cemento armato, stabilizzazione di scarpate.

Per rivestimenti finali di gallerie, l'impiego di calcestruzzi fibro-rinforzati con fibre di acciaio, in sostituzione di quelli con armatura tradizionale, migliora la rapidità di esecuzione e la qualità del prodotto, soprattutto nel caso di strutture massive soggette a presso-flessione, quali appunto le sezioni delle gallerie e dei tunnel. Oltre al vantaggio economico, la duttilità particolarmente elevata dei calcestruzzi in fibra d'acciaio migliora le prestazioni meccaniche della struttura in termini di resistenza meccanica e durabilità.

Il rinforzo del calcestruzzo con fibre ibride (due o più tipi di fibra nel medesimo impasto), se anche non ancora completamente messo a punto, è tuttavia considerato promettente. Le fibre conservano le attitudini specifiche rivolte a rinforzare ed indurire il composito. Sembra pertanto possibile, con appropriato controllo e proporzionamento delle fibre, progettare su misura il calcestruzzo, in funzione della destinazione.

Una promettente prerogativa delle fibre ibride si è rivelato l'incremento della resistenza alla scheggiatura, operata dall'azione del fuoco (19).

Conclusioni

L'impiego di calcestruzzo fibro-rinforzato, che aumenta di giorno in giorno, apre nuove prospettive per la realizzazione di prodotti per l'edilizia, anche nell'ambito della prefabbricazione.

Il miglioramento della resistenza a trazione e l'abbassamento della fragilità conseguibile con l'incorporazione di fibre di varia natura, distribuite a caso nella matrice cementizia, la possibilità di gettare il calcestruzzo con le medesime modalità di quello ordinario, la velocità e facilità di posa in opera, costituiscono vantaggi notevoli che pretendono un'appropriata progettazione della miscela, una corretta formulazione dei rapporti fra i componenti, una coscienziosa messa in posto.

Le fibre di acciaio garantiscono ottime proprietà ai calcestruzzi preparati con i cementi più diffusi (Portland, d'alto forno, pozzolanico), che assicurano un alto pH alla soluzione dei pori della pasta. Non possono esser impiegate in combinazione con leganti a base di gesso, proprio per il pH basso della soluzione dei pori.

Le fibre di vetro hanno la limitazione della scarsa resistenza agli ambienti alcalini, caratteristica dei leganti idratati ed induriti. Richiedono pertanto l'impiego di vetri speciali alcali-resistenti (per esempio ad alto contenuto di ossido di zirconio), di trattamenti superficiali, dell'addizione di microsilice, che notevolmente riduce la presenza dell'indesiderata portlandite, di cementi che, a seguito d'idratazione, rilasciano minor quantità di portlandite.

Le fibre di carbonio assicurano un eccellente rinforzo, resistente anche ad ambienti aggressivi. Trattamenti superficiali delle fibre si rendono utili per migliorare il loro legame con la matrice. Al presente le fibre di carbonio sono ancora piuttosto dispendiose, ciò che ne limita l'impiego nell'edilizia. Si fanno avanti, però, nuove fibre più economiche, derivanti dalla lavorazione del catrame.

Le fibre organiche sintetiche (politene, polipropilene fibrillato, poliacrilonitrile con fenditure), hanno sufficiente resistenza agli alti valori del pH delle paste di cemento e rappresentano i principali candidati a sostituire le fibre di vetro. La caratteristica principale di tali fibre è l'inerzia chimica, controbilanciata, però, da bassa temperatura di decomposizione e basso modulo elastico.

Fibre aramidiche, quali KEVLAR, rinforzano notevolmente la matrice e i compositi resistono a più alta temperatura, dato che la loro temperatura di decomposizione (400°C) è ben più alta del punto di fusione del polipropilene. Il loro costo rimane oggi ancora alto.

Bibliografia

1. Allievi E., Pola M. Calcestruzzo per pavimentazioni industriali: i calcestruzzi fibro-rinforzati con fibre in filo di acciaio. In: Concrete. Periodico ATE CAP, 66, 69-79 (2005).
2. Kaufmann J.P., Hesselbarth D., Moser K., Terassi G.P. Application of fiber reinforced high performance composites in spun-cast elements. Materials Structures, 38, 279, 549-555 (2005).
3. Odler I. Cements for fiber-reinforced cementitious composites. In: Special Inorg. Cements. E. &. FN Spoon, London, 356-363 (2000).
4. Mindess S., Odler I., Skalny J., Grace M.R, Significance to concrete performance of interfaces and bond: challenges of the future. 8th ICCC, 1,151-157, Rio de Janeiro (1986).
5. Banthia N. Fiber reinforced concrete. In: Cement Concrete Science Techn.S. N. Ghosh Ed. 1, Part II, 289-320. ABI Books Ltd. New Dehli (1992).
6. Potrzebowski J. Bond in concrete. 51. Paisley, 14-16 June (1982).
7. Massazza F., Costa U. Bond: paste-aggregate, paste-reinforcement and paste-fibres. 8th ICCC, 1, 159-180. Rio de Janeiro (1986).
8. Shah S.P., Ouyang C. Effect of fibers-matrix interation on concrete strength. 9th ICCC, 1, 775-791. New Dehli (1992).
9. Majumdar A.J. Fiber reinforced cement. Thin sheets. 9th ICCC, 1, 738-774. New Dehli (1992).
10. Birchall J. D. Cement in the context of new materials for an energy-expensive. Philosophical Transactions. Royal Society, A3 10,31-42. London (1983).
11. Pera J. Ambroise J., Holand E., Beauvent G. Development of glass fiber reinforced composites using white sulfoaluminate cement. 11th. ICCC. 3, 1676-1682. Durban (2003).
12. Fu X., Lu W., Chung D.D.L. Improving the tensile properties of carbon fiber reinforced cement by ozone treatment of the fibers. Cement Concrete Res., 26, 1485-1488 (1996).
13. Rice E.K., Vondran G.L., Kundbargi H. Bonding of fibrillated polypropylene fibers to cementitious materials. Materials Research Soc. Symposium. Proceed. 114, 145-152 (1988).
14. Troli R. Le fibre aramidiche nei materiali FRP. ENCO Journ. VI, 18, 22-23, (2001).
15. Marchese B., Marchese G. Constitution of mortars and pull-out of steel fibers. 9th ICCC, 5, 461-467. New Dehli (1992).

16. Sersale R. Nuovi materiali di interesse ingegneristico. Lectio Magistralis per la Laurea Honoris Causa. Università Cassino. Servizio Real. Grafiche (1997).
17 Argon A.S., Hawkins G. W., Kuo H.Y. Reinforcement of mortar with Metglass fibers. Journ. Mat., Sci., 14, 1707-1716 (1977).
18. Chiaia B., Infantilli A.P., Vallini P., Kalamaras C., Alessio C., Cantucci C., Ciravegna G. Fiber reinforced concrete in tunnel covering: new calculation methodology and elimination of ordinary reinforcement. Strade Autostrade., IX, 52, 4, 158-163 (2005).
19. Peng G-P., Yang W-W., Zhao J,. Liu Y-F., Bian S-H., Zhao L-H. Explosive spalling and residual mechanical properties of fiber-toughened high-performance concrete subjected to high temperatures. Cement Concrete Res., 36, 4, 723-727 (2006).

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXXIII, (2006) pp. 263-386

La corrispondenza epistolare Brioschi – Genocchi

Nota di Luciano Carbone[1], Anna Maria Mercurio[2], Franco Palladino[2], Nicla Palladino[2]

Presentata dal socio Luciano Carbone
(Adunanza del 9 giugno 2006)

Key words: *Annali di matematica*; equazioni algebriche di quinto grado; risorgimento italiano; insegnamento nell'Italia unita.

Riassunto – L'occasione che dà inizio alla corrispondenza epistolare Brioschi-Genocchi è la riorganizzazione degli *Annali di Scienze matematiche e fisiche* (gli *Annali di Tortolini*), trasformati negli *Annali di matematica pura ed applicata* e pensati come la rivista di matematica rappresentativa dell'Italia che si andava unificando. Ma molti altri argomenti sono trattati in queste lettere, il principale è dato dalle ricerche di Brioschi, contemporanee di quelle svolte da Hermite e da Kronecker, tese ad ottenere una *soluzione effettiva* di un'equazione algebrica di quinto grado, data nella sua forma generale, con l'ausilio delle funzioni ellittiche. Si trovano, inoltre, una dettagliata relazione riguardante il famoso viaggio d'istruzione in Germania e in Francia, del 1858, compiuto da Brioschi, Betti e Casorati, riferimenti alla fondazione dell'Istituto Tecnico Superiore (il celebrato Politecnico) di Milano e all'insegnamento della matematica nelle scuole e nelle università italiane; un insieme di argomenti che, per le loro caratteristiche, collocano questa corrispondenza nel pieno del clima risorgimentale e, più precisamente, nella fase di costituzione e di partenza dell'Italia unita.

1. Introduzione

Un "matematico puro" capace di prestarsi ai calcoli più complicati e, nello stesso tempo, un "matematico applicato", dedito all'insegnamento di meccanica razionale e tecnica, scienze delle costruzioni e idraulica; un uomo dinamico, capace di scrutare orizzonti ampi, pronto alle più diverse iniziative, determinato, in qualche caso disinvolto, altre volte generoso, dal ritmo di vita effervescente;

[1] Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" – Università degli Studi di Napoli "Federico II".
[2] Dipartimento di Matematica e Informatica – Università degli Studi di Salerno.

questo è ciò che si coglie dal gruppo di scritti, sessantanove, indirizzati da Francesco Brioschi ad Angelo Genocchi, che vanno dagli inizi di Maggio del 1857 al 1886 ma che risultano addensati – circa quarantasei – sostanzialmente tra il 1857 e il 1865. Scritti appartenenti tutti quanti al «Fondo Siacci», conservato presso la Biblioteca del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" dell'Università "Federico II" di Napoli, e ai quali si sono allegate le quattro lettere di risposta di Genocchi reperite nel «Fondo Brioschi» che sta presso la Biblioteca Centrale della Facoltà di Ingegneria del Politecnico di Milano.

Ricerca matematica, quella di Brioschi, tesa principalmente a trovare (con un approccio che si potrebbe definire "multisettoriale", nell'ambito delle matematiche), la "*soluzione effettiva*" (lettera 43, del 21 Settembre 1865), o diretta, di un'equazione algebrica, completa, di quinto grado con l'ausilio delle funzioni ellittiche e con l'annesso progetto, rivelato da Brioschi e di cui non si aveva notizia, di pubblicare un libro sull'argomento: "*Vi aggiungo anche che varj risultati sulle equazioni di quinto grado che avrei in pronto non li pubblicai prima, perché mi ero fisso di voler pubblicare un libro su questo argomento*" – lettera 42, di Brioschi a Genocchi, del 10 Luglio 1865 – , progetto che non verrà mai realizzato. E, intorno a questo tema di ricerca, egli descrive gli aspetti essenziali (ancora lettera 43) sia dei metodi seguiti da Kronecker e da Hermite (con questi illustri studiosi egli è in corrispondenza epistolare), esposti nelle loro pubblicazioni del 1858, sia dei propri studi, pubblicati a partire dallo stesso anno:

"In questo momento sono occupato di matematiche [...]. L'argomento è sempre la risoluzione delle equazioni del quinto grado, e precisamente la effettiva soluzione. Voi sapete che l'Hermite diede questa risoluzione supponendo l'equazione di quinto grado trasformata secondo Jerrard; il Kronecker propose un altro metodo, superiore al primo perché diretto, ma nel quale la soluzione è piuttosto indicata che effettuata; io allegai quest'ultimo metodo nella prima memoria del 58 [vale a dire nel lavoro 'Sul metodo di Kronecker per la risoluzione delle equazioni di quinto grado', n.d.r.], poi accennai alla soluzione effettiva nella memoria sulla risolvente di Malfatti [cioè in 'Sulla risolvente di Malfatti per le equazioni di quinto grado', che è del 1863, n.d.r.]; ed ora sono occupato ad eseguire i calcoli dietro quel concetto."

Attività organizzative, condotte da Brioschi, che annoverano, per iniziare, la possibile edizione di un "*giornale matematico italiano da surrogarsi agli Annali del Tortolini* [sono gli *Annali di Scienze matematiche e fisiche* che uscivano a Roma, capitale dello Stato Pontificio, n.d.r.], *quando non potesse essere la continuazione di questi*" (lettera 1, del 6 Maggio 1857); cosa che sarà compiuta procedendo secondo quest'ultima alternativa.

Tra le attività, promosse da Brioschi, si può includere ancora il famoso viaggio d'istruzione fatto in compagnia di Enrico Betti e Felice Casorati attraverso gli stati e le città della Germania e in Francia. La lettera 22 (9 Novembre 1858) che lo descrive (partirono il 20 Settembre del 1858,

ritornarono in Italia il 29 Ottobre successivo) rappresenta forse il documento più dettagliato che, al riguardo, sia stato fino ad ora pubblicato: "*[...] abbiamo tenuto questa via: Zurigo, Monaco, Lipsia, Dresda, Berlino, Gottinga, Heidelberg, Carlsruhe, Strasbourg, Parigi. [...]*". Il viaggio, col quale si propende a fissare, convenzionalmente, l'inizio della forte ripresa della ricerca, nelle scienze matematiche, avutasi con l'unità d'Italia, ha, tra gli scopi principali, quello di stabilire rapporti personali diretti e raccogliere idee sugli studi e le istituzioni culturali.

L'esperienza fatta, nel viaggio europeo, sarà senz'altro utile a Brioschi per avviare, nel 1862, l'impresa consistente nella fondazione dell'Istituto Tecnico Superiore (il celebrato Politecnico di Milano, di cui egli fu, a partire dall'anno di apertura dell'Istituto, 1863, e per molti anni a seguire, direttore), dove, nella fase di avvio, egli stesso è costretto a reggere, con generoso impegno, un pesante carico di insegnamenti (ancora lettera 42, del 10 Luglio 1865):

"*Pur troppo le occupazioni della mia scuola mi tolgono la possibilità di lavorare come desidererei negli studj di matematica pura; in questi ultimi due anni ho dovuto dedicarmi con lena alle applicazioni, ho dovuto digerire una nuova biblioteca, di letture certamente più facili di quelle alle quali non siamo abituati, ma che però richiede un certo tempo. Oltre che il personale dell'Istituto essendo un po' ristretto devo fare molte lezioni; dal Novembre al Maggio feci nove ore di lezione per settimana sulle costruzioni e sull'idraulica. Ciò vi spieghi come lavorando come forse non mai in vita mia, pure non arrivo a pubblicare, giacché se giungo anche a qualche risultato non trovo il tempo per renderlo presentabile al pubblico*";

mentre è da tener presente che nella medesima lettera ha già espresso, qualche rigo prima, il suo rammarico nel constatare che le diverse occupazioni istituzionali, compresa la fondazione del Politecnico, lo portano a perdere il filo della propria ricerca scientifica (tendenza che andrà accentuandosi col trascorrere degli anni e con il corrispondente impressionante aumento degli impegni):

"*La nota di Jacobi sulla risolvente del sesto grado mi è sfuggita mentre scriveva quel lavoro sulla risolvente del Malfatti benché la conoscessi ed altre volte mi avesse occupato. È questa una delle conseguenze della vita che meno dopo il 63, l'aver cioè perduto in parte la memoria delle cose lette da qualche tempo.*"

Insieme a tutto ciò, non bisognerebbe dimenticare di considerare l'attività politica, in senso istituzionale, con l'incarico, per esempio, di Segretario generale della Pubblica Istruzione del Regno d'Italia – dal Giugno del 1861 al Dicembre del 1862 – , "partitica", svolta nei circoli liberali, e poi una vasta attività professionale e imprenditoriale che egli, seguendo, si potrebbe dire, una consolidata tradizione familiare, andava sviluppando (essa però non ha particolari riflessi in queste lettere), rivolta specialmente alla costruzione di ferrovie.

Esaminando i primissimi scritti, tra quelli che ora si vengono a pubblicare, sembra che egli riesca a reggere, pur a fatica, tutto il vasto fronte che va dalla ricerca scientifica ai molteplici incarichi istituzionali e politici, con l'aggiunta di

varie dosi di immancabili beghe universitarie, di lotte partitiche ed elettorali, allora che è a Pavia, e anche delle forti emozioni (che spesso lo portano a trattenere il fiato) procurategli dalle vicende politiche e dai fatti bellici che ruotano attorno alla Seconda guerra d'indipendenza italiana (conclusasi con la sconfitta austriaca e con la conseguente unione, o annessione, al Regno di Sardegna, di vari stati e regioni della penisola):

"*[...] Anche la mia salute è poco buona, il che oltre a tutto il rimanente mi toglie ogni lena di studio. A quanto si dice pare che le probabilità del Congresso* [promosso dalla Russia per discutere la "questione italiana", n.d.r.] *vadano ogni giorno diminuendo; a che protrarre più a lungo una guerra impossibile ad evitarsi?*" – lettera 28, del 9 Aprile 1859 – ; "*[... Io] aveva incominciato a studiare un po', ma ora sono nuovamente tutto sossopra e non m'occupo che della lettura di giornali politici*" – lettera 30, del 22 Luglio 1859 – ; "*Da oggi ho deciso di accettare il guanto [di sfida], a ciò mi spinge anche quanto vi ha di meglio in fatto di liberali in Pavia. Ho accettato di farmi promotore di un circolo liberale elettorale, di appartenere ad un comitato per l'emigrazione, alla redazione di un giornale etc.*" – lettera 33, del 14 Dicembre 1859 – .

E se pure non con altrettanta fatica, è però con difficoltà che si riesce a seguirlo nella moltitudine di nomi, di fatti e nozioni che Brioschi frettolosamente cita, spesso in forma molto concisa (qualche volta "mangiandosi" le parole) e con grafia non facile a interpretarsi. Anche il suo interlocutore, Genocchi, lo critica sotto questo aspetto e se ne sarà lamentato direttamente, tanto da ricevere perciò le scuse. Infatti, Brioschi gli scrive (lettera 14, dell'11 Maggio 1858):

"*Vi ringrazio delle osservazioni che mi fate intorno alla troppa concisione alla quale mi sono abituato; avete ragione; ma credetemi che non ho interamente la colpa di ciò. È una conseguenza del poter occupare solo poche ore allo studio, occupato come sono dalle due ore di scuola quotidiane, e da molte altre incombenze.*"

Con le prime lettere, si osserva un Brioschi che mena fendenti, come un ancor giovane spadaccino (egli è nato a Milano nel 1824), contro tutto ciò che egli ritiene essere vecchio e sbagliato, e che vada superato o abbattuto (come si possa fare per degli ostacoli, siano rappresentati da uomini o istituzioni) al fine di organizzare le articolazioni culturali del nuovo stato unitario che si andava prospettando; stato concepito, nel caso, anche come limitato al solo Regno del Nord, formato da Piemonte e Lombardia. Una sorta di regno guida in cui trasferire e accentrare il meglio delle risorse reperibili nella penisola italiana e quindi in grado di poter svolgere un ruolo di riferimento per tutta l'Italia, una volta unita per l'intera sua "espressione geografica" o, eventualmente, solo in parte. Detto per inciso, nell'agire, egli guarda, com'è comprensibile, anche alla sua personale carriera e al connesso, cercato successo.

Così, Brioschi, liberale e partecipe della prevalente linea comportamentale del suo "partito", ispirata da forte anticlericalesimo, avversa il pio ma talvolta troppo audace matematico Francesco Faà di Bruno (scientificamente parlando, sembra che Brioschi abbia facile gioco) dedito alle "*melodie per la madonna*" e all' "*alta analisi*", – lettera 1, del 6 Maggio 1857 – , e, inoltre, all'impresa –

ritenuta particolarmente velleitaria da Brioschi – di "*Studiare in due mesi il calcolo delle probabilità!*" – lettera 9, del 7 Gennaio 1858 – . Ma, nel frattempo, Brioschi non mostra di essere impressionato dal fatto che gli *Annali di Tortolini*, guardati quale oggetto da sottrarsi progressivamente dalle mani di Barnaba Tortolini e reintitolati, dal 1858, con la nuova gestione a cui si son voluti associare, più o meno forzatamente, lui stesso, Betti e Genocchi, *Annali di matematica pura ed applicata*, vengano composti nella stamperia della Congregazione "de propaganda fide" cioè del tutt'altro che liberale Sant'Uffizio – lettera 11 – .

Brioschi mena pure numerosi colpi di spada contro il suo collega all'Università di Pavia, Gaspare Mainardi, molto più anziano, professore ordinario di Calcolo infinitesimale, profilando, in concreto, accuse di plagio e millanteria:

"*Il mio ottimo collega M.[ainardi] mi si dice veda di mal occhio il nostro giornale [Annali di matematica pura ed applicata]; avete le sue ultime famose memorie sull'estensione del metodo di Charpit, e sulla teoria degli invarianti? Nella prima vi posso mostrare 50 errori, nella seconda 50 plagi e 10 errori. Pare che la vena sia esaurita, giacché da qualche tempo tace*" – lettera 3 – ; entrando poi dettagliatamente nel merito delle accuse, mediante la lettera qui classificata al n° 4, e formulando valutazioni ora sarcastiche ora sdegnate (n° 8) espresse nei seguenti termini:

"*Il Mainardi nella sua memoria «su la teoria generale degli invarianti etc.» vorrebbe far credere che siccome egli non ha potuto istruirsi nelle memorie pubblicate da Cayley e Sylvester nel medesimo giornale di Cambridge; così egli cava dal suo cervello tutto quanto segue nella memoria. [...] L'altra memoria di cui mi parlate «sulla teoria generale delle superficie» (notate bene che egli non pubblica che teorie generali) è un capo d'opera di mala fede, e ignoranza. E ve lo provo. [...] Ma passiamo a quel che l'autore crede di maggior interesse ed ha il coraggio di paragonare alle formule di Gauss pel prodotto dei raggi di curvatura. [...]*".

Tira le orecchie al Menabrea per il "*nuovo* principio di Meccanica" – lettera 19, del 6 Agosto 1858 – ritenendolo un "*controsenso*" e, comunque, né originale né ben dimostrato ("*Io oserei dire che il Menabrea avendo di mira di giungere a quel principio ha creduto buono ogni mezzo*") e al Minich – stessa lettera – per aver presentato, all'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, "*un pacco suggellato che contiene niente meno che la risoluzione* per radicali *di un'equazione algebrica di grado qualunque*" a ciò indotto dalla notizia – scrive Brioschi riportando quanto afferma lo stesso Minich – che l'Hermite aveva "*annunziato all'Accademia delle Scienze di Parigi, che un* analista alemanno [Kronecker] *gli aveva comunicato una elegante soluzione dell'equazione di quinto grado*".

In realtà, l'occasione che fa partire la fitta corrispondenza Brioschi-Genocchi è collegata agli *Annali di Tortolini*, com'è documentato sin dalla prima lettera qui raccolta. Il proponimento, a cui si è accennato, di fondare un "giornale di

matematica" da sostituirsi agli *Annali*, o, come possibile alternativa, di inserirsi, più o meno a forza, nella guida dei medesimi *Annali* sarà stato concordato da Brioschi e Genocchi in un incontro da loro avuto precedentemente al 6 Maggio del 1857 (data di stesura di questa prima lettera) nella quale è, infatti, scritto:

"*[...] è che desiderava prima avere risposta dal Betti, al quale aveva comunicato il nostro progetto intorno ad un giornale di matematica Italiano da surrogarsi agli Annali del Tortolini, quando non potesse essere una continuazione di questi. Il Betti aderisce completamente a quanto gli ho proposto mostrandosi ben contento si possa finalmente giungere a qualche cosa di meglio.*

Domani o dopo al più tardi io scriverò al Tortolini sottoponendogli il progetto; io credo non potrà che aderirvi; ma nel caso il più sfavorevole amasse meglio abbandonare la redazione, ne pubblicheremo uno affatto nuovo a Milano od a Torino dove meglio converrà."

Tortolini aderisce alla proposta di Genocchi, Brioschi e Betti ma, significativamente, "non ringrazia" – lettera 2, del 28 Maggio 1857 – :

"*Tre giorni sono ricevetti risposta dal Tortolini. Egli aderisce completamente al nostro progetto sebbene non ci ringrazia di averglielo proposto; egli è anche contento di ridursi quasi a far da amministratore e ci abbandona la parte scientifica; rimborsandoci però di tutte le spese postali che potremo dimostrare. Egli desidera solamente che il giornale porti scritto sul frontespizio «2.a serie in continuazione degli Annali etc. ...».*"

Il rapporto con Tortolini sarà, negli anni, sempre un po' conflittuale. Così, per esempio, nella lettera 22, del 9 Novembre 1858, mentre Brioschi, al ritorno del "grande viaggio" attraverso Germania e Francia, afferma con soddisfazione

"*il nostro giornale ha al di fuori un credito superiore alla nostra aspettativa, esso è letto tanto in Germania che in Francia. Feci nuovi associati e nuovi collaboratori nel Kronecker, nel Weierstrass, nell'Hesse, nel Lebesgue, nell'Hermite, nel Bonnet. Una breve nota consegnatami dall'Hesse e che tradussi la mandai già al Tortolini; ora ho qui un lavoro del Bonnet di geometria*",

non può reprimere, contemporaneamente, un moto di irritazione verso Tortolini – stessa lettera – che

"*non dà ascolto e vuole stampare quelle sue filastrocche senza senso per quanto gli abbia dato consiglio di non farlo. Egli non sa e non comprende un'acca di queste moderne teorie ed è già la terza volta che vuole occuparsene.*"

Nella lettera 15, del 12 Maggio 1858, Brioschi aveva già raccomandato a Genocchi:

"*[...] in generale è bene che le memorie che pubblichiamo non siano lette prima soltanto da lui.*"

Nel cercare una forma d'accordo con Tortolini, si pensa, sin dall'inizio, anche ad una nuova veste editoriale per gli *Annali* – lettera 3, del 6 Luglio 1857 – e il pensiero va al *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, fondato nel 1826 da Crelle che l'aveva diretto fino alla sua morte avvenuta nel 1855:

"*[...] il sesto del nuovo giornale sia come quello del giornale di Crelle, e la pubblicazione ogni due mesi. Il titolo rimane fissato Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati per cura del Prof. B. Tortolini, e compilati dai Proff. Betti,*

Brioschi, Genocchi, Tortolini. Così o presso a poco ha dichiarato il Tortolini, se avete qualche cosa in contrario fatemelo conoscere."

E si pensa, tra le altre cose, a possibili "acquisti" – lettera 4, del 29 Luglio 1857 –:

"*Siete voi in relazione con alcuno dei matematici Napoletani? Se si potessero indurre Trudi, Rubini, Padula a diventare collaboratori dei nuovi annali faremmo un buon acquisto.*"

Gli *Annali*, i "*nuovi annali*", che assieme all'Istituto Tecnico Superiore di Milano rappresentano alcune delle più importanti iniziative, nelle "scienze pure e applicate", tendenti a migliorare le condizioni, culturali economiche e sociali della "nuova Italia" per consentirle di assumere "*al di fuori*", nel "concerto europeo", un maggior "*credito*", offriranno, per il seguito, frequenti occasioni d'incontro tra i tre nuovi "compilatori", Brioschi, Betti e Genocchi, cosa che è ben evidente nei brani seguenti, appartenenti, rispettivamente, alle lettere del 28 Maggio 1857 (n° 2), del 5 Febbraio 1858 (n° 10) e del 17 Giugno 1860 (n° 35):

"*Io crederei utile che fra un mese o due al più avessimo a pubblicare un programma di questo giornale, e spedirne copie ai nostri conoscenti.*

Il Tortolini promette anche di far produrre caratteri opportuni; e di accelerare la pubblicazione del volume in corso onde non far ritardare quella del nuovo giornale, essendo conveniente che il primo fascicolo venga pubblicato in Gennajo 1858.

Se fosse possibile trovarci assieme io, voi e Betti prima di quell'epoca almeno per un giorno sarebbe molto opportuno; in quanto a me ciò non potrebbe essere che dalla prima metà di Settembre in avanti e mi pare che dopo quell'epoca voi pure contiate muovervi da Torino."

"*Non ho risposto subito alla vostra lettera giacché era in aspettazione di qualche notizia intorno alla pubblicaz.[ione] del I° fascicolo del nostro giornale, la quale voleva comunicarvi. Finalmente jeri mi giunse una lettera dal Tortolini, che annunzia la pubblicaz.[ione] pel giorno tre del corrente, senza però darmi alcun dettaglio, per cui non so se il vostro lavoro sarà stato pubblicato per intero o solo in parte. Io gli aveva raccomandato fortemente che questo fascicolo fosse composto di nove fogli, giacché uno va perduto pel frontespizio e prefazione, ma Egli mi scrisse che per molte ragioni non ha potuto farne stampare che otto. Da ciò vedete che incominciamo male, giacché io credo non debbano esservi altre ragioni che il meglio del giornale. E da questo proposito avrei pensato ad un modo di trovarci assieme voi, io e Betti senza molto disagio per ciascuno. Io passerò la settimana detta santa a Genova, se il Betti come è probabile vi scrisse lo potreste fare anche voi?*"

"*Betti mi scrive esponendomi il suo desiderio che potessimo trovarci assieme queste vacanze qualche giorno per fare qualche nuova combinazione pel giornale; come già vi dissi anch'io credo opportuno questo.*"

Altri effetti prodotti dalla cura degli *Annali* saranno rappresentati dal confronto d'opinioni e dall'attenta valutazione degli articoli e dei libri da recensire nella *Rivista bibliografica* dei "*nuovi annali*", la quale diventerà una sezione, degli stessi *Annali*, utile al fine della divulgazione dei lavori di autori italiani e stranieri e, in più, feconda, dal momento che le recensioni daranno spesso origine a rielaborazioni o alla formazione di nuove idee che saranno ivi

esposte. In quest'attività, ma, più in generale, per tutta quanta la propria ricerca in campo matematico, si può dire che Brioschi abbia Genocchi per interlocutore privilegiato.

Nel primo periodo, dell'arco di tempo tracciato da queste lettere, vi è molta attenzione, da parte di Brioschi, anche per la sistemazione accademica dei suoi principali referenti scientifici, "matematici risorgimentali" come lui: Betti, Genocchi e Cremona; si nota la costituzione di una sorta di rete fatta di attenzione e concreta solidarietà. Per la cattedra ottenuta da Betti, a Pisa, Brioschi comunica a Genocchi (lettera del 6 Novembre 1857, n° 6):

"*Betti fu nominato in questi giorni ad una cattedra di Pisa*";

si compiace, subito poi (lettera 7, del 17 Dicembre 1857), per la cattedra che Genocchi andava a "reggere" all'Università di Torino:

"*Un amico mi dà in questo momento la notizia della vostra nomina a Prof. dell'Università di Torino, da lui letta sopra un giornale Piemontese.*

Non mi congratulo con voi, ma coll'Università, e principalmente col consiglio che finalmente ha dato una prova di non essere completamente cieco";

ed è particolarmente contento di aver contribuito a portare Cremona all'Università di Bologna (lettera 35, del 17 Giugno 1860), dove con l'acquisto dell' "*eccellente professore*" partirà, anche se con incedere singhiozzante, l'insegnamento di Geometria superiore nelle università italiane:

"*Il prof. Gherardi vi avrà forse detto di come io lo pregassi di aggiungere le mie calde raccomandazioni alle vostre presso il Ministro per ottenere la nomina del Cremona all'Università di Bologna. Con mio grande contento la cosa è riuscita e l'Università di Bologna ha acquistato un eccellente professore, fu fatta una volta almeno giustizia al merito. Ringraziate Gherardi a mio nome.*"

Mettendo da parte altre questioni, come per esempio, la conduzione della Società Italiana delle Scienze, detta pure Società dei XL, dove le carenze amministrative, verificatesi sotto la presidenza di Brioschi, suscitarono acute polemiche, i cui riflessi si ritrovano nelle lettere 53, 54, 59 e 60, bisogna segnalare, infine, che non mancano, tra i motivi di principale interesse offerti da questo carteggio, gli interventi nel dibattito, allora molto vivo e coinvolgente, riguardante l'insegnamento della matematica, in particolar modo della geometria, nei licei-ginnasi italiani, dopo l'unificazione (lettera 50 dell'11 Novembre 1869):

"*Amerei avere tempo per discutere con voi rispetto all'insegnamento della Geometria nei Licei. Da quanto mi scrivete della vostra corrispondenza coll'Hoüel parmi non siete d'accordo con me, benché non sia esatto che le opinioni dell'Hoüel abbiano influito sopra di me. La mia convinzione sulla convenienza, oserei dire necessità di ritornare al metodo Euclideo nelle scuole classiche è antica; col Cremona, col Betti, se ne discusse molte volte. Se fosse stato in mio potere, io avrei però condotta la cosa in altro modo. Avrei fatta una edizione di Euclide col mio nome, e con quello dei matematici Italiani che sono d'accordo con me, ma avrei lasciato di imporre il metodo coi programmi.*

Sgraziatamente mentre nel 1867 mi trovava a Parigi, il Betti dava vita a quel mio divisamento, mentre si pubblicavano i nuovi programmi, ed il Cremona convinto della bontà del metodo credeva convenisse meglio dichiararli in modo ufficiale. È una quistione grossa e che difficilmente può trattarsi per lettera. Sopratutto è necessario porre bene la quistione, e domandarsi quale scopo intendiamo raggiungere coll'insegnamento delle matematiche nelle scuole classiche. Quando saremo d'accordo su questo punto, forse saremo arrivati ad una conciliazione rispetto ai mezzi."

Passo di lettera che è scritto in risposta a delle considerazioni, irate, fatte da Genocchi in uno scritto che è del giorno precedente (lettera III del 10 Novembre 1869):

"*Ho scambiato in queste vacanze due o tre lettere con Hoüel. È un pover'uomo che non sa scrivere due righe senza contraddirsi. Stupisco che da lui vi abbiate lasciato imporre il programma di geometria pe' nostri licei.*"

Vi sono, in successione, altre due lettere di Brioschi su questo argomento, nella 51 è scritto:

"*Il postulato d'Euclide ha irritato nuovamente i vostri nervi, e vi scagliate nuovamente contro quei poveri programmi ed il loro Autore, e tutto ciò a proposito di una lettura del Sylvester, che io non conosco, ma che sarà senza alcun dubbio la cosa più matta del mondo. Io mi persuade ogni giorno più, credo avervelo già scritto, che le quistioni di pubblico insegnamento sono fra le più delicate e per risolvere le quali non v'è altra via che la sperimentale. Ora il metodo sperimentale esige molte cautele, cure infinite, lavoro lento etc. etc., tutte cose che non stanno assieme con tanta fretta come quella del Sylvester. Vi ho, parmi, scritto altre volte, che io discuterei volentieri con voi questo soggetto; il quale è vasto e non pare essere compreso nella formula Euclide o Legendre come alcuni credono*";

nella lettera 52, Brioschi tiene a "*fissare chiaramente*", a futura memoria, la parte da lui avuta nella riforma, da Genocchi "*con tanto accanimento combattuta*":

"*Desidero, anche a costo di sentirmi ripetere che io non conosco la Geometria di Euclide, di fissare chiaramente la parte che io n'ebbi nella riforma da voi con tanto accanimento combattuta. Io sono convinto, convintissimo che nella Scuola Classica la Geometria deve essere insegnata col metodo Euclideo; questa convinzione non è nuova in me; ma si è fatta poi gigante vedendo su qual via era condotto l'insegnamento geometrico in quella scuola pei molti libri pubblicati in Italia ed anche oltre monte.*

Quanto vi dissi o scrissi rispetto al modo col quale si introdusse la Geometria di Euclide nei Licei, e della mia lontananza dall'Italia in quel momento, è tutta quistione di forma; la sostanza è che quella Geometria formi la base dell'insegnamento geometrico dei Licei. Del resto voi avete deriso l'Euclide riveduto dal Cremona; eppure io credo che vi è quanto abbiamo di meglio a fare.

Su questo punto dunque noi siamo e saremo in perfetto disaccordo; con questa differenza che io non dubito che voi conosciate l'Euclide, il Legendre e tutta la serie dei libri di geometria stampati in questi anni specialmente in queste provincie; ma dubito abbiate indagato molto sulle infinite quistioni che si presentano in un ordinamento scolastico; mentre voi dichiarandomi ignorante in fatto di Geometria Elementare, credete concludere che io giudichi a priori o per imitazione. Ormai però mi sono formato una reputazione di tenacità, alla quale non voglio rinunciare in questa

circostanza. Io non ho consigliato o sconsigliato il Ministero dall'adottare l'Euclide come libro di testo, quindi di questo fatto non sono responsabile; però consiglio ora come consiglierò in seguito i professori dei Licei di approssimarsi quanto più ponno nel loro insegnamento al metodo Euclideo."

Bibliografia essenziale*

1. M. Barile e S. De Nuccio, *Lezioni di Matematica dagli scritti di Évariste Galois*, vol. 1, Trieste, Edizioni Goliardiche2,004.
2. C. Brunati - D. Franchetti - P. Papagna - P. Pozzi (a cura di), *Francesco Brioschi e il suo tempo (1824-1897), II. Inventari*, Milano, Franco Angeli2,000.
3. L. Carbone - R. Gatto – F. Palladino (a cura di), *L'epistolario Cremona-Genocchi (1860-1886). La costituzione di una nuova figura di matematico nell'Italia unificata*, Firenze, Olschki2,001.
4. R. Franci - L. Toti Rigatelli, *Storia della teoria delle equazioni algebriche*, Milano, Mursia, 1979.
5. Chr. Houzel, *Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes*, in J. Dieudonné, *Abrégé d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann, 1978, due tomi, II, cap. VII.
6. C. Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1870.
7. C.G. Lacaita - A. Silvestri (a cura di), *Francesco Brioschi e il suo tempo (1824-1897), I. I Saggi*, Milano, Franco Angeli2,000.
8. M. Nöther, *Francesco Brioschi*, «Mathematische Annalen», v. L (1898), pp. 477-491.
9. F. Siacci, *Cenni necrologici di Angelo Genocchi*, «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», s. II, v. XXXIX, (1889), pp. 463-495.
10. L. Toti Rigatelli, *La mente algebrica. Storia dello sviluppo della Teoria di Galois nel XIX secolo*, Busto Arsizio, Bramante Editrice, 1989.
11. F. Tricomi, *Funzioni ellittiche*, Bologna, Zanichelli, 1951[2].
12. B.L. van der Waerden, *A History of Algebra*, Berlin - Heidelberg, Springer-Verlag, 1985.
13. G. Zappa, *Francesco Brioschi e la risoluzione delle equazioni di quinto grado*, in *Francesco Brioschi (1824-1897). Convegno di studi matematici*, Milano, Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, 1999, pp. 95-108.

* Le edizioni concernenti le "opere matematiche", quando edite, degli autori che appaiono nel carteggio, sono citate, all'occorrenza, nelle specifiche note redatte a pie' di lettera.

2 – LE LETTERE

1
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 6 Maggio [18]57

Preg.mo Amico

Se ho aspettato a scriverLe fino ad oggi ed a ripeterLe in iscritto le proteste di stima e di simpatia che ebbi il piacere di poterLe fare a voce, si è che desiderava prima avere risposta dal Betti[3], al quale aveva comunicato il nostro progetto intorno ad un giornale di matematica Italiano da surrogarsi agli Annali del Tortolini[4], quando non potesse essere una continuazione di questi. Il Betti aderisce completamente a quanto gli ho proposto mostrandosi ben contento si possa finalmente giungere a qualche cosa di meglio.

Domani o dopo al più tardi io scriverò al Tortolini sottoponendogli il progetto; io credo non potrà che aderirvi; ma nel caso il più sfavorevole amasse meglio abbandonare la redazione, ne pubblicheremo uno affatto nuovo a Milano od a Torino dove meglio converrà.

Da qualche tempo la vita matematica non è molto brillante, almeno qui non arrivano giornali; buon per me che occupato da quindici giorni di questioni di meccanica pratica non potrei tenervi dietro.

Però in questo mese mi giunse il 5° fascicolo del Quarterly Journal del Sylvester[5] il quale giornale credeva avesse cessato di vivere; ed il primo fascicolo 1857 del giornale di Schlömilch[6]. Le memorie contenute in questo

---

[3] Enrico Betti (1823-1892).

[4] Gli *Annali*, compilati a cura di Barnaba Tortolini (1808-1874) e editi a Roma dal 1850 al 1865, erano chiamati comunemente *Annali di Tortolini*, ma il loro nome completo era *Annali di Scienze matematiche e fisiche*. Dal 1858 furono associati alla redazione anche Enrico Betti, Francesco Brioschi ed Angelo Genocchi e la rivista assunse allora il nome di *Annali di matematica pura ed applicata*. Nel 1865 le pubblicazioni furono fatte cessare. Ripresero poi a Milano, a partire dal Luglio 1867, ancora col nome di *Annali di matematica pura ed applicata*, sotto la direzione di Francesco Brioschi e Luigi Cremona (1830-1903).

[5] Trattasi di *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* la cui pubblicazione ebbe inizio dal 1855 sotto la direzione di James Joseph Sylvester (1804-1851) e Norman Macleod Ferrers (1829-1903). La rivista sostituì il *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* fondato nel 1839 da Duncan Farquharson Gregory (1813-1844) e Robert Leslie Ellis (1817-1859).

[6] Il titolo completo della rivista qui citata è *Zeitschrift für Mathematik und Physik begründet 1856 durch Oscar Xavier Schlömilch* (Leipzig). La fondazione di questo giornale venne fatta da Oscar Xavier Schlömilch (1823-1901), in collaborazione con H. Benjamin Witzschel (1822-1860). Dopo la morte di quest'ultimo, Schlömilch continuò a dirigere il giornale, con altri collaboratori, fino al 1896.

fascicolo del giornale di Sylvester sono di poco interesse meno una memoria dello Schläfli sulle ventisette rette le quali si possono tracciare sopra una superf.[icie] del terzo ordine[7]. Sono cose per la maggior parte note, ma trattate in modo nuovo ed elegante, analogamente a quanto fece Jacobi nella memoria sulle tangenti doppie[8].

Finora non mi è occorsa alcuna occasione per mandarle la memoria del Kronecker[9] di cui abbiamo parlato, ma se Ella desidera averLa cercherò di procurarmi qualche mezzo a meno che Ella potesse indicarmene qualcuno.

Se per caso Ella dovesse venire alla Stradella[10] fra qualche tempo, e vi si potesse fermare un Giovedì od una Domenica La prego di farmelo sapere, ché farei in modo di venirvi io pure, onde avere il piacere di trovarmi ancora presto con Lei e combinare alcuni dettagli pel giornale.

E il nostro Faà di Bruno[11] che fà? con quale successo continua le sue lezioni di *alta analisi*? e le sue melodie per la madonna!

Se posso esserLe utile in qualche cosa, faccia conto sopra di me come su di un amico. La prego di salutarmi il Prof. Chiò[12], e l'ottimo amico Colombo[13]

Brioschi

---

[7] Ludwig Schläfli (1814-1895). La memoria di Schläfli è: *An attemp to detemine the twenty-seven lines upon a surface of the third order, and to divide such surfaces into species in reference to the reality of the lines upon the surface*. Pubblicata originariamente in «The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics»2, (1858), pp. 55-65 e 110-120, fu poi inserita in *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, herausgegeben vom Steiner - Schläfli - Komitee der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, Basel, Birkhäuser, 1950-19563, tomi, II, 1953, pp. 198-216.

[8] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). La memoria è: *Über die Anzahl der Doppeltangenten ebener algebraischer Curven*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 40 (1850), pp. 237-260. In *C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke*, Berlin, G. Reimer, 8 voll., 1881-1891, t. III, pp. 517-542.

[9] Leopold Kronecker (1823-1893). Il titolo di questa memoria verrà esplicitato nella nt. 1, lett. 2.

[10] Nota località a circa venti chilometri da Pavia, sulla via Emilia. È il luogo in cui era nata la madre di Angelo Genocchi, Carolina Locatelli.

[11] Francesco Faà di Bruno (1825-1888). Egli aveva iniziato a tenere un corso libero di "Alta Analisi e di Astronomia", presso l'Università di Torino, a partire dal 1857. Lesse la prolusione d'apertura del corso il 27 Febbraio di quell'anno. In parallelo alla sua attività di studioso in scienze matematiche, Faà di Bruno si impegnò molto in opere religiose e caritative. Il 22 Ottobre del 1876 fu ordinato sacerdote. Su Faà di Bruno si segnala il volume *Francesco Faà di Bruno. Ricerca scientifica Insegnamento e Divulgazione*, a cura di L. Giacardi, Torino, Deputazione Subalpina di Storia Patria 2004.

[12] Felice Chiò (1813-1871).

[13] Giuseppe Colombo (1836-1921).

2
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 28 Maggio [18]57

Preg.mo Amico

Permettete che io lasci in disparte i modi cerimoniosi così contrari alle mie tendenze ed alle mie abitudini, ed assuma modi più amichevoli; spero che ciò non vi sarà discaro e farete altrettanto con me nelle vostre lettere.

Col mezzo di vostro cugino vi ho spedito la memoria del Kronecker "De unitatibus complexis"[14] ed il primo fascicolo 1857 del Quarterly Journal[15] che credo sia l'unico pubblicato in quest'anno. Mi pare che questo mezzo di spedizione, che avete trovato, sia eccellente, e se voi credete che esso non possa tornar incomodo a vostro cugino ne approfitteremo spesso.

Tre giorni sono ricevetti risposta dal Tortolini[16]. Egli aderisce completamente al nostro progetto sebbene non *ci ringrazia* di averglielo proposto; egli è anche contento di ridursi quasi a far da amministratore e ci abbandona la parte scientifica; rimborsandoci però di tutte le spese postali che potremo dimostrare. Egli desidera solamente che il giornale porti scritto sul frontespizio "2ª serie in continuazione degli Annali[17] etc. ...".

Io crederei utile che fra un mese o due al più avessimo a pubblicare un programma di questo giornale, e spedirne copie ai nostri conoscenti.

Il Tortolini promette anche di far produrre caratteri opportuni; e di accelerare la pubblicazione del volume in corso onde non far ritardare quella del nuovo giornale, essendo conveniente che il primo fascicolo venga pubblicato in Gennajo 1858.

Se fosse possibile trovarci assieme io, voi e Betti[18] prima di quell'epoca almeno per un giorno sarebbe molto opportuno; in quanto a me ciò non

---

[14] Kronecker, per il quale cfr. nt. 7, lett. 1, compose una dissertazione dal titolo *De unitatibus complexis, dissertatio inauguralis arithmetica quam consensu et auctoritate amplissimi philosophorum ordinis in alma literarum Universitate Friderica Guilelma pro summis in philosophia honoribus rite capessendis, die X M. Septembris a. 1845, H. L. Q. S. publice defendet Leopoldus Kronecker, Ligniciensis. Adversarii erunt: G. Eisenstein Phil. Dr., E. Cauer Phil. Cand., H. Ruehle Med. Cand.*, Berolini [Berlino], 1845, in *Leopold Kronecher's Werke*, Herausgegeben auf veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von K. Hensel, Erster Band, Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1895, pp. 5-73. A beneficio del lettore, si vuole segnalare che Kronecker pubblicò nel 1857 l'articolo: *Über complexe Einheiten*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 53, pp. 176-181, inserito in *Leopold Kronecher's Werke*, opera ora citata, pp. 109-118.

[15] Cfr. nt. 3, lett. 1.

[16] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[17] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[18] Cfr. nt. 1, lett. 1.

potrebbe essere che dalla prima metà di Settembre in avanti e mi pare che dopo quell'epoca voi pure contiate muovervi da Torino.

Ho veduto in questi giorni il terzo fascicolo del volume 53 del giornale di Crelle[19], contiene due brevi articoli di Jacobi[20] dall'uno dei quali rilevasi che questo geometra fino dal 1847 conosceva la proprietà della forma quadratica chiamata dal Sylvester[21] legge d'inerzia[22]. Vi è una dimostraz.[ione] di questa

---

[19] Il riferimento è al *Journal für die reine und angewandte Mathematik herausgegeben zu Berlin von A. L. Crelle*, Berlin, Walter de Gruiter, fondato nel 1826 da August Leopold Crelle (1780-1855) che lo diresse fino alla sua morte. Il periodico veniva citato, durante la direzione di Crelle, anche come *Journal von Crelle* o *Giornale di Crelle.* Dopo la morte di A. L. Crelle, dal 1856 fino al 1880, il giornale fu diretto da Carl Wilhelm Borchardt (1817-1880), di conseguenza veniva chiamato *Giornale di Borchardt.*

[20] Per Jacobi cfr. nt. 6, lett. 1. I due articoli sono: *Über eine elementare Transformation eines in Bezug auf jedes von zwei Variablen-Systemen linearen und homogenen Ausdrucks* e *Über einen algebraischen Fundamentalsatz und seine Anwendungen*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 53 (1857), rispettivamente pp. 265-270 e 275-280. In *C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke*, cit. nt. 6, lett. 1, t. II, rispettivamente alle pp. 583-590 e 591-598.

[21] Cfr. nt. 3, lett. 1.

[22] Sulla *legge d'inerzia* si cita da E. Pascal, *Repertorio di Matematiche Superiori, II, Geometria*, Milano, Hoepli, 1900, pp. 120-121: "*Una forma quadratica può in infiniti modi ridursi ad una combinazione lineare di quadrati (forma canonica): $A_1x_1^2+ A_2x_2^2+...+A_rx_r^2$. Se tale riduzione la si vuol fare con sostituzione ortogonale, cioè in modo che resti inalterata la forma speciale $x_1^2+x_2^2+...+x_r^2$, allora i coefficienti A_1, A_2... della forma ridotta, sono, con segno contrario, le radici λ dell'equazione* $\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & a_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$. *Se i coefficienti a_{ij} sono tutti reali, le radici λ di tale equazione sono reali.* Per la trasformazione delle forme quadratiche in un'espressione lineare di quadrati, è interessante il teorema conosciuto sotto il nome di *legge d'inerzia delle forme quadratiche. Se una forma quadratica di r variabili a coefficienti reali, si trasforma, con sostituzioni lineari reali, in due modi diversi in espressioni contenenti i soli quadrati delle variabili, il numero dei termini con segno positivo è sempre il medesimo.* Questo teorema fu enunciato da Sylvester (*Phil. Mag.*, 1852, II, pag. 138; *Phil. Trans.*, 1853, pag. 407); indi Borchardt fece sapere (*Crelle*, LIII, pag. 275) che una legge simile era già conosciuta da Jacobi fin dal 1847. Sullo stesso teorema si può vedere Hermite (*Crelle*, LIII, pag. 271), Gundelfinger (*Crelle*, XCI), Presle (*Soc. math.*, XV, pag. 179) etc.". In termini aggiornati la *legge d'inerzia*, legata al nome di Sylvester, afferma, com'è noto: Sia V(C) uno spazio euclideo complesso *n*-dimensionale e $g(x;x)$ una forma quadratica hermitiana. Con una trasformazione lineare non singolare, $g(x;x)$ può essere posta nella forma $|\eta_1|^2+...+|\eta_p|^2-|\eta_{p+1}|^2-...-|\eta_{p+q}|^2$, dove i numeri p e q (che, eventualmente, possono essere anche nulli) sono invarianti rispetto al gruppo lineare. L' espressione in p e in q del tipo sopra indicato è una forma canonica per le forme quadratiche rispetto al gruppo lineare. La coppia (p, q) si chiama *segnatura* della forma quadratica e si deduce che due forme quadratiche sono equivalenti rispetto al gruppo lineare se e solo se hanno lo stesso rango e la stessa segnatura". Si ricorda che una forma bilineare $g(x;y)$ su V(C) si dice hermitiana (o di Hermite) se $g(x;y)=\overline{g(y;x)}$ dove $\overline{g(y;x)}$ indica il complesso coniugato di $g(y;x)$.

legge dovuta all'Hermite[23]; ed un articolo del Borchardt sull'applicaz.[ione] della medesima alla ricerca del numero delle radici reali[24]. Inoltre un breve articolo del Tchebichef sopra una formola di interpolazione[25] della quale ho mandato jeri una semplicissima dimostrazione al Terquem[26].

Vi prego di salutare per me il carissimo mio amico Colombo[27] ed il Prof.e Chiò[28].

Se posso essere utile in qualche cosa, disponete di me come di un amico

il Vostro Brioschi

3
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 6 Luglio [1857][29]

Caris.mo Amico

Non imitatemi nel frapporre un mese fra una lettera e l'altra, tanto più che vi prometto emendarmi; almeno a vostro riguardo.

Spero che ora i libri vi saranno stati consegnati, e che conoscerete dove stia il difetto in questo mezzo di trasmissione.

Anch'io desidererei, come i vostri amici di costì, vedervi occupato nell'insegnamento; ma vorrei che la cattedra fosse di sola algebra e geometria

---

[23] Charles Hermite (1822-1901). Per la dimostrazione si veda lo scritto *Extrait d'une lettre de M. Ch. Hermite à M. Borchardt sur l'invariabilité du nombre des carrés positifs et de carrés négatifs dans la transformation des polynômes homogènes du second degré*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 53 (1857), pp. 271-274, in *Oeuvres de Charles Hermite*, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par Émile Picard, t. I, Paris, Gauthier-Villars, 1905, pp. 429-433.

[24] C. W. Borchardt, *Bemerkung über die beiden vorstehenden Aufsätze*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 53 (1857), pp. 281-283.

[25] Pafnutj L'vovic Cebyšev (o Tchebychef o Tschebischeff) (1821-1894), *Sur une formule d'Analyse*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 53 (1857), p. 286.

[26] Orly Terquem (1782-1862). Questi, insieme a Camille Gerono (1799-1892), aveva fondato nel 1842 la rivista dal titolo *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Dal momento che Terquem tardava a pubblicargli la nota (si veda lettera 12, testo corrispondente alla nt. 10), Brioschi decide di inserirla negli *Annali* (cfr. lett. 14 e relativa nt. 10).

[27] Cfr. nt. 11, lett. 1.

[28] Cfr. nt. 10, lett. 1.

[29] La lettera è da ritenersi scritta in un anno successivo al 1856, in base al contenuto della lett. 2, Pavia 28 Maggio 1857; essa è poi precedente il 1858 considerato il riferimento al Mainardi contenuto nella lett. 4, Pavia 29 Luglio 1857.

complementare[30]. Io credo che voi non avrete bisogno di raccomandazioni, ma se io potessi col mezzo di De Filippi[31] o di Sismonda[32] o d'altri farvi ottenere questo posto od almeno aumentare la probabilità che lo conseguiate disponete di me come di un amico. Se questo posto vi deve costare anche qualche sacrificio fatelo per il meglio dell'istruzione; voi sapete meglio di me che costì vi sono molte piaghe e molto a migliorare.

Le combinazioni pel giornale proseguono; ebbi un'altra lettera dal Tortolini[33] più gentile della prima. Scrisse al Betti[34], e forse anche a Voi, in proposito.

Dietro proposta del Betti si è fissato che il sesto del nuovo giornale sia come quello del giornale di Crelle[35], e la pubblicazione ogni due mesi. Il titolo rimane fissato Annali di Matematica pura ed applicata[36] pubblicati per cura del Prof. B. Tortolini, e compilati dai Proff. Betti, Brioschi, Genocchi, Tortolini. Così o presso a poco ha dichiarato il Tortolini, se avete qualche cosa in contrario fatemelo conoscere.

Ho letto la nuova opera del Lamé[37], contiene poco di nuovo, meno nell'ultima parte, è però un libro scritto bene, che si legge con piacere. Mi fece stupore il non trovarsi citata una memoria del Jacobi che a mio avviso è il germe di tutte le idee esposte nel libro; cioè l'esprimersi per funzioni inverse i parametri di tre superfici del secondo ordine omofocali. La rappresentazione fisica dipende da questa. La memoria del Jacobi è la seguente "Über eine particuläre Lösung etc." Vol.e 2 delle opere[38].

In questo mese non vidd'altro di nuovo. Ho mandato al Tortolini un breve lavoro sui poligoni inscritti e circoscritti alle coniche[39]; cioè sulle condizioni che devono verificarsi affinché gli infiniti poligoni inscrivibili in una conica, siano

---

[30] Angelo Genocchi fu nominato reggente la cattedra di Algebra e Geometria complementare all'Università di Torino nel Novembre del 1857. Diventò titolare nel 1859. Su ciò si veda pure la lettera 7.

[31] Filippo De Filippi (1814-1867).

[32] Eugenio Sismonda (1815-1870).

[33] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[34] Cfr. nt. 1, lett. 1.

[35] Cfr. nt. 6, lett. 2.

[36] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[37] Gabriel Lamé (1795-1870). L'opera è: *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes,* Paris, Mallet- Bachelier, 1857.

[38] Per Jacobi cfr. nt. 6, lett. 1. La memoria è: *Über eine particuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 36 (1848), pp. 113-134. In *C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke*, cit. nt. 6, lett. 1, t. II, pp. 191-216.

[39] Il lavoro di cui si parla è: F. Brioschi, *Sui poligoni inscritti e circoscritti alle coniche*, «Annali di Scienze matematiche e fisiche», t. VIII (1857), pp. 119-124, in *Opere matematiche*, Milano, Hoepli, 5 voll., 1901-1909, t. I, pp. 257-262.

circoscrivibili ad un altra. Questo problema è già stato studiato da Cayley[40] e Salmon[41] in modo differente, e giungono anche a risultati di forma differenti. In questo lavoro facevo vedere che quei risultati si ottengono eseguendo una eliminaz.[ion]e in due modi differenti, e che i risultati medesimi sono paragonabili alle equaz.[ioni] algebriche razionali ed irrazionali che legano gli argomenti nel teorema di Abel[42].

Alcuni giorni sono ricevetti una lettera d'ufficio dal segretario dell'Accademia nella quale mi si partecipa che dietro proposizione di Menabrea[43] e Richelmy[44] fui nominato socio corrispondente dell'Accademia[45]; sapreste dirmi se furono fatte altre nomine di matematici? La proposizione del Prof.e Fenolio[46] ci sarà utilissima, tanto più che la lingua tedesca è poco conosciuta.

---

[40] Arthur Cayley (1821-1895).

[41] George Salmon (1819-1904).

[42] Consultando il citato *Repertorio di Matematiche Superiori* di E. Pascal, *I, Analisi*, 1898, pp. 400-403, si vede che il *Teorema di Abel* è così enunciato: "*Si abbia una funzione algebrica t sulla superficie di Riemann e di essa sieno* $x_1 \ldots x_m$, $y_1 \ldots y_m$ *rispettivamente i punti-zero, e i punti-infinito (due gruppi di punti corresiduali); se I è un qualunque integrale abeliano, la somma* $\sum_{i=1}^{m} \int_{y_i}^{x_i} dI$ *è una funzione algebrico-logaritmica di t, a meno di multipli interi dei moduli di periodicità di I* ". Volendoci mantenere nei "panni" di Abel, come scrive A. Del Centina (in *La memoria parigina di Abel e la sua importanza per la geometria*, «Lettera matematica pristem», 472,003, pp. 45-55) il *teorema di Abel* si può enunciare secondo la forma seguente: " *Se si hanno più funzioni le cui derivate possono essere radici d'una stessa equazione algebrica, i cui coefficienti sono funzioni razionali d'una stessa variabile, si può sempre esprimere la somma di un numero qualunque di tali funzioni mediante una funzione algebrico-logaritmica, purchè si stabilisca tra le variabili delle funzioni in questione un certo numero di relazioni algebriche*". Nel lavoro originale di Abel (*Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes*, presentato à l'Académie des Sciences di Parigi il 30 Ottobre 1826 e stampato in «Mémoire présentés par divers savants», t. VII, Parigi, 1841; in *Oeuvres complètes*, Christiania, Grøndahl & Son, 18812, voll., t. I, pp. 145-211), il teorema è così enunciato: *"Si l'on a plusieurs fonctions dont les dérivées peuvent être racines d'une même équation algébrique, dont tous les coefficients sont des fonctions rationnelles d'une même variable, on peut toujours exprimer la somme d'un nombre quelconque de semblables fonctions par une fonction algébrique et logarithmique, pourvu qu'on établisse entre les variables des fonctions en question un certain nombre de relations algébriques"*.

[43] Luigi Federico Menabrea (1809-1896).

[44] Prospero Richelmy (1813-1884).

[45] Si tratta dell'Accademia delle Scienze di Torino, fondata nel 1783.

[46] Giovanni Dionigi Fenolio, per il quale cfr. la voce redatta da C. S. Roero in *La Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino 1848-1998*, a cura di C. S. Roero, Torino, Deputazione Subalpina di Storia Patria, 1999, t. II, p. 446.

Salutatemi gli amici Colombo[47] e Prof. Chiò[48]. State sano e conservatemi la vostra amicizia

Brioschi

Il mio ottimo collega M.[ainardi][49] mi si dice veda di mal occhio il nostro giornale; avete le sue ultime famose memorie sull'estensione del metodo di Charpit[50], e sulla teoria degli invarianti[51]? Nella prima vi posso mostrare 50 errori, nella seconda 50 plagi e 10 errori. Pare che la vena sia esaurita, giacché da qualche tempo tace.

---

[47] Cfr. nt. 11, lett. 1.

[48] Cfr. nt. 10, lett. 1.

[49] Gaspare Mainardi (1800-1879).

[50] Nel *Repertorio di Matematiche Superiori, I, Analisi*, cit. nella precedente nt. 14, alla pag. 227 è scritto: "*Per le equazioni [differenziali] di 1° ordine non lineari i primi metodi sono quelli di Lagrange e di Charpit (in una Mem. presentata all'Accad. di Parigi nel 1784 ma non pubblicata; il metodo è riprodotto nel Vol. II, pag. 548 del Calcolo di Lacroix).*" A riguardo, le considerazioni di M. Kline (in *Storia del pensiero matematico*, Vol. I, edizione italiana a cura di A. Conte, Torino, Einaudi, 1996) sono: "*L'equazione generale alle derivate parziali del prim'ordine in due variabili indipendenti è della forma f(x, y, z, p, q)=0, dove* $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ *e* $q=\frac{\partial z}{\partial y}$. *Se l'equazione è lineare in p e q, allora viene detta equazione alle derivate parziali non lineare. Paul Charpit (morto nel 1784) combinò insieme presumibilmente nel 1784, i metodi per risolvere le equazioni lineari e quelle non lineari in modo da ricondurre ogni equazione f(x, y, z, p, q)=0 a un sistema di equazioni differenziali ordinarie. Lacroix disse nel 1798 che Charpit aveva presentato nel 1784 un lavoro (che non venne pubblicato) in cui riconduceva le equazioni alle derivate parziali del primo ordine a sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Jacobi trovò l'affermazione di Lacroix sorprendente ed espresse il desiderio che il lavoro di Charpit venisse pubblicato. Ciò non fu mai fatto e noi non sappiamo quindi se l'affermazione di Lacroix era corretta. In realtà, Lagrange aveva già fatto tutto e Charpit non avrebbe potuto aggiungervi nulla. Il metodo dato nei testi moderni, e detto metodo di Lagrange, o di Lagrange - Charpit o di Charpit, è la fusione delle idee di Lagrange esposte nei suoi lavori del 1772 e del 1779. Esso afferma che per risolvere l'equazione generale alle derivate parziali del prim'ordine f(x, y, z, p, q)=0 bisogna risolvere il sistema di equazioni differenziali ordinarie (dette equazioni caratteristiche di f=0)*

$$\frac{df}{dt} = f_p\,; \quad \frac{dy}{dt} = f_q\,; \quad \frac{dz}{dt} = pf_p + qf_q\,;$$

$$\frac{dp}{dt} = -f_x - f_z p\,; \quad \frac{dq}{dt} = -f_y - f_z q\,."$$

[51] Brioschi si riferisce ai seguenti lavori di G. Mainardi: *Conseguenze a cui conduce il metodo di Charpit e Lagrange applicato alle equazioni differenziali parziali di secondo ordine* e *Sulla teoria generale degli invarianti delle forme omogenee*, «Giornale del I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti e Biblioteca Italiana», t. IX (1856), rispettivamente alle pp. 94-102 e 208-221.

4
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 29 Luglio 1857

Cariss.mo Amico

Per quanto mi dispiaccia che abbiate abbandonato il pensiero di dedicarvi all'istruzione, pure non posso darvi torto giacché anch'io sento quanto sia pesante l'insegnare; e tanto più l'insegnare per molti anni di seguito la stessa materia, ed a giovani pei quali essa va sminuzzata.

Del resto in questa vostra decisione v'è una parte vantaggiosa; cioè che trovandovi libero e potendo disporre di tutte le ore del giorno lavorerete di più pel giornale e sostituirete i lettori agli uditori. Ed a questo proposito vi rammento che mi avete promesso a voce ed in iscritto di far parte della redazione dei nuovi Annali[52]; ed io non intendo assolutamente di rinunciare a questa vostra promessa.

Avete deciso qualche cosa intorno a quanto farete questo Autunno? Io verrò in Piemonte il 7 di Settembre giorno della chiusura dell'Università, e verrò in cerca di voi probabilmente anche a Torino, almeno per qualche ora.

Siete voi in relazione con alcuno dei matematici Napoletani? Se si potessero indurre Trudi[53], Rubini[54], Padula[55] a diventare collaboratori dei nuovi annali faremmo un buon acquisto.

Sono contento vi sia caduto sott'occhio la memoria del Mainardi sul metodo di Charpit[56]; quanto voi osservate intorno agli esempj è la parte ridicola della memoria, non essendovi fra dieci esempi neppure uno che faccia allo scopo; ma quel che è peggio si è che gli integrali ottenuti (se il metodo fosse un estensione di quello di Charpit) dovrebbero almeno in parte essere completi e non particolari. Mi spiego meglio. Considero la equazione

$$vs\text{-}p\varphi(x)=0$$

il metodo di Charpit darà per p un integrale completo, mentre quello del Mainardi è particolare; e ciò perché non ha capito lo spirito del metodo di Charpit. Ecco dove trovasi l'errore. Nei casi da lui trattati apparentemente alla derivata del quarto ordine è $\frac{dF}{dt}=0$, la seconda delle equazi.[ioni] (5) decomponsi quindi nelle due $y'=0$, y' $\frac{dF}{dr}-\frac{dF}{ds}=0$; ora egli fa uso della prima

---

[52] Cfr. nt. 2, lett. 1.
[53] Nicola Trudi (1811-1884).
[54] Raffaele Rubini (1817-1890).
[55] Fortunato Padula (1815-1881).
[56] Per la memoria cfr. nt. 23, lett. 3, mentre per il metodo di Charpit cfr. nt. 22 della stessa lettera.

senza curarsi della seconda (rigore a parte) quando invece se avesse studiato il metodo di Charpit avrebbe veduto che dovea assumere la seconda. Ne volete un'altra bella. Osservate l'ultima equazione della pag. 97 e leggete le parole che vengono in seguito "e disponendo della arbitraria composizione di y, z, p, q in per modo che questa equazione riesca soddisfatta indipendentemente dai differenziali parziali di r e s che in essa rimangono abbiamo le condizioni:

(5)...

(6)..."

Ma queste condizioni stando alle due, par che dovrebbero essere otto e le (5) (6) sono in numero di cinque; cosa ne avviene delle altre tre? Ma le (6) si ponno dire condizioni essendo equazioni identiche? È un ammasso di spropositi e di inesattezze. Mi era proposto di dargli una lezione all'Istituto di Milano[57], ma vedo che una memoria non aspetta l'altra e non mi conviene buttar via il poco tempo che posso dedicare allo studio in una polemica senza frutto. Vorrei però che i lavori di quest'uomo fossero letti con attenzione, onde il giudizio che io già feci di lui, perché ho molta conoscenza della cose sue, venga fatto da altri.

In questi giorni così caldi lavoro poco anch'io; sto lavorando dietro alla integrazione delle equazioni iperellittiche[58]. Queste equazioni come sapete ammettono integrali algebrici irrazionali e razionali. Sotto la prima forma vennero già ottenuti da Dirichlet[59] e Jacobi[60], alla seconda vennero ridotti dai medesimi geometri in un caso particolare.

Parmi di essere bene avviato; ma non sono ancora giunto alle note.

Purtroppo però fra due o tre giorni dovrò abbandonare ogni argomento matematico, dovendo pel venti del mese venturo aver composta la biografia del matematico milanese G.[abrio] Piola morto nel 1850, ed al quale si sta erigendo una *statua*[61].

Salutatemi Colombo[62]. Credetemi colla massima stima

l'Amico Brioschi

---

[57] Trattasi dell'Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti.

[58] Nel 1858, F. Brioschi pubblicherà su «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 55, pp. 56-60 il lavoro dal titolo *Sur l'integration des équations ultra-elliptiques*, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. V, pp. 287-291.

[59] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859).

[60] Cfr. nt. 6, lett. 1.

[61] Gabrio Piola (1791-1850). A lui fu eretta una statua, proprio nel 1857, opera di Vincenzo Vela, nel cortile del Palazzo di Brera. Non risulta però che Brioschi abbia pubblicato una biografia di Piola.

[62] Cfr. nt. 11, lett. 1.

E la bella *nuova* forma pel volume della piramide del nostro armonizzante[63]? Vi è piaciuta?

5
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 1° Settembre [1857][64]

Caris.mo Amico

Lunedì prossimo giorno sette del corrente conterei essere per la sera a Torino, sempre nell'ipotesi che voi vi troviate costì a quell'epoca e che possiate dedicarmi qualche ora del giorno otto. Perciò vi prego di scrivermi subito e di fissarmi per la mattina dell'otto un'ora ed un luogo di ritrovo.

Non conosceva il teorema di Newton[65] di cui mi avete scritto, e per quel poco che ci ho pensato parmi che una dimostrazione generale non sia molto

---

[63] Il riferimento è a F. Faà di Bruno, per il quale si veda nt. 9, lett. 1, e al suo lavoro *Sopra il volume della piramide triangolare*, «Annali di Scienze matematiche e fisiche», t. VIII (1857), pp. 77-78. Faà di Bruno è così appellato probabilmente perché scrisse vari articoli sul giornale cattolico «L'Armonia»; per esempio, vi annunciò l'inizio delle lezioni del corso di "Alta Analisi e di Astronomia popolare" (a. X, n° 41, del 19 Febbraio 1857, p. 164) e vi pubblicò poi brani della prolusione allo stesso corso (a. X, n° 80, 8 Aprile 1857, p. 320). Sullo stesso giornale Faà di Bruno vi scrisse pure due articoli commemorativi su Cauchy, com'è specificato nella nt. 4 della prossima lettera.

[64] La data si evince sia in base al contenuto della lettera 4, Pavia 29 Luglio 1857, sia in base al contenuto della lettera 7, Pavia 17 Dicembre 1857.

[65] Sotto il nome di *teorema di Newton*, sembra che i due interlocutori intendano riferirsi alla seconda delle due seguenti proposizioni poste da Isaac Newton (1643-1727) nella *Arithmetica Universalis; sive de Compositione et Resolutione Arithmetica Liber* (Cantabrigiae, Typis Academicis, 1707) le quali sono poste rispettivamente alle pp. 241 e 242.

La prima, che si cita per completezza d'informazione, è:

"*Ubi aequationis radices nulla impossibiles sunt, numerus radicum affirmativarum et negativarum ex signis terminorum aequationis cognosci potest. Tot enim sunt radices affermativae quot signorum in continua serie mutationes de + in – et – in +; caeterae negativae sunt*".

Prima di presentare, poi, la seconda proposizione, si fa presente che Newton scrive: "*Verum quot radices impossibiles* [intendasi immaginarie, n. d. r.] *sunt conosci fere potest per hanc regulam*". E così viene enunciata da Newton quella che qui si è chiamata la seconda proposizione:

"*Constitue seriem fractionum quorum denominatores sunt numeri in hac progressione 12., 3, 4, 5, etc. pergendo ad numerum usque qui est dimensionum aequationis; numeratores vero eadem series numerorum in ordine contrario. Divide unamquamque fractionem posteriorem per priorem. Fractiones prodeuntes colloca super terminis mediis aequationis. Et sub quolibet mediorum terminorum, si quadratum ejus ductum in fractionem capiti imminentem sit majus quam rectangulum terminorum utrinque consistentium, colloca signium +; sin minus, signum -.*

facile; però esso mi stuzzica la curiosità ed in un momento di maggior quiete vi ritornerò sopra.

Delle altre nostre cose parleremo a viva voce. Betti[66] avrebbe desiderato trovarsi con noi, ma dice che non può muoversi da Firenze.

Ho ricevuto dal Santo Faà de Bruno una biografia di Cauchy[67] veramente edificante.

Conservatemi la vostra amicizia e credetemi

il Vostro Brioschi

6
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 6 Novembre [18]57

Caris.mo Amico

Vi ho promesso di scuotervi quando serbate troppo lungo tempo il silenzio con me, ed eccomi a mantenervi la promessa: tanto più che siamo prossimi al doverci intendere sui materiali coi quali comporremo il primo fascicolo del nostro Giornale[68]. Fra pochi giorni avremo il programma o meglio l'annuncio; il Betti[69] ha desiderato qualche variazione a quello che vi ho comunicato costì allo scopo di farlo servire anche di prefazione; ed io approfittando del largo permesso che m'avete dato l'ho sottoscritto anche per voi. Il primo fascicolo dovrà essere pubblicato il 1° febbraio. Il Betti ha già in porto una memoria sulla teoria degli invarianti[70], e porzione di una monografia su quella delle equazioni[71], io ho terminato un lavoro sulle funzioni Abeliane complete di

---

Sub primo vero et ultimo termino colloca signum +. Et tot erunt radices impossibiles quot sunt in subscriptorum signorum serie mutationes de + in – et – in +".

[66] Cfr. nt. 1, lett. 1.

[67] Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Faà di Bruno, cit. in nt. 9, lett. 1, pubblicò i *Cenni biografici del barone Agostino Cauchy membro dell'Istituto di Francia*, Torino, Tip. P. De Agostini. Questo opuscolo raccoglie due articoli di Faà di Bruno apparsi su «L'Armonia» (a. X, n^{i} 163 e 166, rispettivamente del 18 e 22 Luglio 1857) in occasione della morte di Cauchy.

[68] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[69] Cfr. nt. 1, lett. 1.

[70] E. Betti, *Sopra i covarianti delle forme binarie*, «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t.I (1858), pp. 129-134. In *Opere matematiche di Enrico Betti*, pubblicate per cura della R. Accademia de' Lincei, Milano, Hoepli, 1903-1913, t. I, pp. 157-162.

[71] E. Betti, *Sopra l'equazioni algebriche con più incognite*, «Annali di matematica pura ed applicata», t. I (1858), pp. 1-8. In *Opere matematiche di Enrico Betti*, citate nella nota precedente, t. I, pp. 150-156.

prima e seconda specie[72]; e quasi anche un secondo sulle formule per l'addizione delle funzioni Abeliane[73]. Il Jonquières mi ha mandato due note di geometria superiore da pubblicarsi nel nostro giornale[74]. Ecco quello su di cui possiamo in oggi contare; senza che per questo si voglia farvi grazia di un lavoro. Sarà bene che mi facciate conoscere (se intendete di fare qualche articolo bibliografico) su quali lavori rivolgete la vostra attenzione, onde non abbiamo per caso situarci sullo stesso campo gettando il tempo. Io crederei bene di render conto dell'opera del Lamé, di una di Baltzer sulla teoria dei determinanti; di una del Dienger -Die Differential und Integralrechnung etc... Stuttgart 1857. Di una memoria postuma di Jacobi nel penultimo fascicolo del giornale di Borchardt[75].

Pare che il Tortolini[76] voglia accontentarsi quanto all'edizione; sta a noi ad obbligarlo ad essere esatto nelle pubblicazioni.

Il Betti fu nominato in questi giorni ad una cattedra di Pisa[77], e la cattedra di Torino è ancora vacante?

---

[72] F. Brioschi, *Sulle funzioni Abeliane complete di prima e seconda specie*, «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. I (1858), pp. 12-19, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. I, pp. 277-284.

[73] F. Brioschi, *Sopra alcune proprietà delle funzioni Abeliane*, «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. I (1858), pp. 20-32, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. I, pp. 285-299.

[74] Ernest Jean Philippe Fauque de Jonquières (1820-1901). Le note sono: *Note relative a la construction de diverses courbes a 3 points multiples des degrés supérieurs, et théoreme relatifs a ces courbes* e *Note relative a une courbe du sixiéme degré qui se présente en astronomie*, «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. I (1858), rispettivamente alle pp. 110-112 e 112-116. Ma Jonquières, di lì a poco, manderà una terza nota dal titolo: *Généralisation de la théorie de l'involution: applications geométriques*, che apparirà sulla stessa rivista al t. II (1859), pp. 86-94.

[75] Negli *Annali* non fu pubblicata nessuna recensione, fatta da Brioschi, dell'opera di Lamé, *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes*, già citata nella nt. 9, lett. 3 e del lavoro di Joseph Dienger (1818-1894), *Die Differential und Integralrechnung*, Stuttgart, 1857. Fu invece pubblicato il seguente articolo: *Sullo sviluppo delle funzioni Jacobiane secondo le potenze ascendenti dell'argomento*, «Annali di matematica pura ed applicata-Rivista bibliografica», serie I, t. I (1858), pp. 41-42. Articolo che rappresenta la recensione del lavoro di Jacobi, *Darstellung der elliptischen Functionen durch Potenzreihen*, («Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 54 (1857), pp. 82-97, inserito in *C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke*, cit. nt. 6, lett. 1, t. II, pp. 381-398) e, contemporaneamente, del lavoro di Weierstrass, *Zur Theorie der Abel'schen Functionen*, che verrà citato nella nota 8, lett. 11. La recensione dell'opera di Richard Baltzer (1818-1887), *Theorie und Anwendung der Determinanten*, Leipzig, S. Hirzel, 1857, fu invece fatta da F. Casorati («Annali di matematica pura ed applicata-Rivista bibliografica», serie I, t. I (1858), pp. 45-47).

[76] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[77] Dal 1857 fino alla morte, Enrico Betti fu titolare della cattedra di Fisica matematica, succedendo ad Ottaviano Fabrizio Mossotti (1791-1863), all'Università di Pisa.

Salutatemi gli amici Colombo[78] e Chiò[79]. Conservatemi la vostra amicizia.
Scrivetemi presto

l'aff.mo Amico Brioschi

7
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 17 Dicembre [18]57

Caris.mo Amico

Un amico mi dà in questo momento la notizia della vostra nomina a Prof. dell'Università di Torino[80], da lui letta sopra un giornale Piemontese.

Non mi congratulo con voi, ma coll'Università, e principalmente col consiglio che finalmente ha dato una prova di non essere completamente cieco.

Avete ricevuto dal Tortolini[81] alcuni esemplari del manifesto del nostro giornale[82]; vi avverto che io non l'ho mandato ad alcuno dei conoscenti che ho in Piemonte pensando che l'avreste fatto voi. Io spero che troveremo buon numero di associati, onde costringere il Tortolini a far le cose bene, almeno col mezzo dell'interesse.

Io spero anche che avrete scritto qualcuno dei lavori che mi avete citati nell'ultima vostra, e lo avrete spedito al Tortolini pel primo fascicolo; se non lo avete ancora fatto desidererei lo faceste per dar principio con buon esempio. Per esempio il vostro lavoro – sopra una costruzione del teorema di Abel[83] – o l'altro – sulle caustiche secondarie[84] – potrebbero utilmente comparire nel 1° fascicolo.

Quanto mi dite intorno la memoria del Rubini[85] è giustissimo; a me pare inoltre che l'uso dei determinanti in quasi tutte le questioni da lui trattate sia per nulla adatto, e quindi nuoca allo scopo che l'autore erasi prefisso; cioè di

---

[78] Cfr. nt. 11, lett. 1.
[79] Cfr. nt. 10, lett. 1.
[80] Cfr. nt. 2, lett. 3.
[81] Cfr. nt. 2, lett. 1.
[82] Cfr. nt. 2, lett. 1.
[83] A. Genocchi, *Sopra una costruzione del teorema di Abel*, «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t.I (1858), pp. 33-40.
[84] Il lavoro di Genocchi comparirà sugli «Annali di matematica pura ed applicata» serie I, t. VI, pp. 97-123, col titolo *Intorno alla rettificazione e alle proprietà delle caustiche secondarie*, soltanto nel 1864.
[85] É la memoria di Raffaele Rubini, per il quale si cfr. nt. 3, lett. 4, *Applicazione della teorica dei determinanti,* «Annali di Scienze matematiche e fisiche», t. VIII (1857), pp. 179-200.

mostrare i vantaggi che ne verrebbero dal far entrare quella teoria nei corsi elementari.

Ho tardato tanto a scrivervi in causa di malattia che mi obbligò a letto per alcuni giorni con tre cacciate di sangue. Fortunatamente il male fu locale (alla gola) ed ora sono quasi completamente ristabilito: almeno quanto mi basta per poter lavorare.

Da qualche tempo non ricevo novità in fatto di scienza, aspetto una pubblicazione fatta a fascicoli dal Raabe intitolata Mathematische Mittherlungen- Heft. I. Zürich[86].

Se Chiò vi consegnasse questo suo lavoro sul teorema di Newton[87], fatemi il piacere di leggerlo, giacché in queste questioni è assai facile il cadere in errore. Io credo anzi che egli medesimo vi pregherà di farlo.

Salutatemi l'amico Colombo[88] che avrà senza dubbio gioito del sapervi nominato Professore.

Conservatemi la vostra amicizia e scrivetemi presto

l'aff.mo Amico Brioschi

8
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 29 Dicembre [1857][89]

Caris.mo Amico

Come vi ho scritto nell'ultima mia sarebbe mio desiderio che nel 1° numero dei nostri Annali[90] comparisse anche qualche vostro lavoro; ora è bene di affrettarci a consegnare al Tortolini[91] ciò che deve stamparsi, affinché facendolo con abbondanza di tempo, vi ponga maggiore diligenza e maggiore precisione. Io sono persuaso a priori che il vostro lavoro sulla costruzione del teorema di

[86] Joseph Ludwig Raabe (1801-1859), *Mathematische Mittherlungen,* Zürich, Meyer und Zeller, 1857-1858.

[87] Per Chiò cfr. nt. 10, lett. 1. Non risulta essere stato pubblicato, negli *Annali*, un lavoro di Chiò sul *teorema di Newton*, secondo l'enunciato precisato nella nota 2, lett. 5. Il lavoro di quest'autore, ivi pubblicato, più vicino a questa è: *Sopra due proposizioni di Navier intorno alla curvatura delle curve a doppia curvatura,* «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. III (1860), pp. 353-362.

[88] Cfr. nt. 11, lett. 1.

[89] La data si deduce per i legami che essa evidenzia con i contenuti della lettera precedente.

[90] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[91] Cfr. nt. 2, lett. 1.

Abel[92] sarà interessante, però se credete di mandarmelo perché lo spedisca io al Tortolini dopo averlo letto lo farò con molto piacere; e vi scriverò subito l'impressione fattamene.

Ho infatti ricevuto dal Sig. Fenolio il suo opuscolo *Sur le sinus integral* [*sic*][93], ad una prima scorsa mi parve un lavoro di poco conto, per cui in luogo di una traduzione italiana in aggiunta mi parrebbe meglio fare un estratto scritto in italiano della lunghezza al più di un pajo di pagine; a meno che le aggiunte abbiano maggior valore del testo. Anche i desideratum [*sic*] del Fenolio hanno d'uopo di essere ridotti; od almeno modificati, p. e. quello dell'ultima pagina (liaison évidente etc.).

Vi auguro buona fortuna nelle vostre ricerche sui numeri primi, spiacemi che la mancanza d'esercizio in questo argomento, ed il poco studio che ne ho fatto non mi permettono per ora di tenervi dietro. Se giungete a dimostrare il teorema di Legendre[94] messo a concorso dovete presentarlo all'Accademia pel medesimo concorso.

Della mia memoria del T.° 52 del giornale di Crelle[95] non vi ho potuto mandare esemplare giacché essendo essa stata pubblicata all'epoca della morte del Crelle[96] non mi pervennero le copie a parte come al solito. Vi è un errore nel titolo che vedrete facilmente.

Il Mainardi[97] nella sua memoria "su la teoria generale degli invarianti[98] etc." vorrebbe far credere che siccome egli non ha *potuto istruirsi* nelle memorie pubblicate da Cayley[99] e Sylvester[100] nel *medesimo giornale* di Cambridge; così egli cava dal suo cervello tutto quanto segue nella memoria. Se non che quello

---

[92] Cfr. nt. 4, lett. 7.

[93] Il titolo completo è *Essai sur le sinus intégral*, opuscolo di trenta pagine scritto da Fenolio (cfr. nt. 18, lett. 3) che reca le seguenti indicazioni editoriali: Turin, Imp. Royale, 1857.

[94] Brioschi si riferisce, probabilmente, all'approssimazione empirica di $\pi(x)$ – il numero di interi primi inferiori ad un dato numero x – proposto da Adrien Marie Legendre (1752-1833) nel suo saggio dal titolo *Recherches d'Analyse Indéterminée* pubblicato nel 1788. La formula di Legendre è: $\pi(x) = \frac{Ax}{(B \log x + C)}$, dove A e B sono opportune costanti. Sui numeri primi va segnalata la recensione di Genocchi dal titolo: *Formole per determinare quanti siano i numeri primi fino ad un dato limite*, «Annali di matematica pura ed applicata-Rivista bibliografica», serie I, t. III (1860), pp. 52-99. Trattasi della recensione del lavoro di B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, «Monatsberichte der Berliner Akademie», November 1859; in Gesammelte Mathematische Werke, herausgegeben von H. Weber, Leipzig, 1876, pp. 136-144.

[95] F. Brioschi, *Sur l'analogie entre une classe de déterminants d'ordre pair, et sur les déterminants binaires*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 52 (1856), pp. 133-141, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. I, pp. 511-520.

[96] Cfr. nt. 6, lett. 2.

[97] Cfr. nt. 21, lett. 3.

[98] Cfr. nt. 23, lett. 3.

[99] Per Cayley cfr. nt. 12, lett. 3.

[100] Per Sylvester cfr. nt. 3, lett. 1.

che egli *ha potuto raccogliere da altri scritti* comprende, meno alcuni errori, quanto trovasi nella sua memoria, e non so capire il perché citi quello che non ha potuto leggere, e non la memoria del Cayley del T° 47 del giornale di Crelle[101], quello che ho fatto io, e la memoria del Combescure nel giornale di Liouville[102], il quale considera appunto il caso generale. È poi ancora più strano il citare la prima memoria del Cayley sugli iperdeterminanti[103] essendo essa di difficilissima lettura, giacché i ragionamenti poggiano in gran parte sul metodo abbreviato di simbolizzazione, ora detto calcolo delle operazioni; ed inoltre avendo nella memoria nulla a che fare in quanto a metodo, con quello usato di poi dal Cayley ed ora dal Mainardi.

L'altra memoria di cui mi parlate "sulla teoria generale delle superficie"[104] (notate bene che egli non pubblica che teorie generali) è un capo d'opera di mala fede, e d'ignoranza. E ve lo provo. *Incomincia dall'offrire ancora alcune formole essenziali etc. ... ed altre conosciute*; ora quale tra le formole (1) (2) ... (18) non è conosciuta: e citando soli tre autori il Chelini[105] il Bonnet[106] ed il Gauss[107] per le formole (8) (7) (18) non lascia supporre che buon numero delle altre siano sue? E per esempio le formole (11) ...(15) non sono già trovate e dimostrate meno barbaramente nella mia nota "Intorno ad alcune proprietà di una linea tracciata sopra una superficie" Annali del Tortolini 1854[108]? Ma passiamo a quel che l'autore crede di maggior interesse ed ha il coraggio di paragonare alle formole di Gauss pel prodotto dei raggi di curvatura[109]. Egli

---

[101] A. Cayley, *Nouvelles Recherches sur les Covariants*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik », Bd. 47 (1854), pp. 109-125. In *The Collected Mathematical papers of Arthur Cayley*, Cambridge, University Press, 1889-1897, 14 voll., t. II, pp. 164-178.

[102] Édouard Combescure (1824-1889), *Sur divers points de la théorie des invariants*, «Journal de Mathématiques pures et appliquées», t. XX (1855), pp. 337-358. Si vuole ricordare che il titolo completo del "Giornale di Liouville" era *Journal de Mathématiques pures et appliquées ou recueil mensuel sur les diverses parties des mathématiques publié par Joseph Liouville*; pubblicato a Parigi, esso fu fondato nel 1836 da Joseph Liouville (1809-1882). Combescure tradusse in francese, nel 1856, *La teorica dei determinanti e le sue principali applicazioni* che Brioschi aveva pubblicato nel 1854, per questo e per la sua traduzione francese si veda nt. 12, lettera 12.

[103] A. Cayley, *Mémoire sur les hyperdéterminants. Traduction d'un memoire anglais dans le «Cambridge Mathematical Journal» avec quelques additions de l'auteur*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik », Bd. 30 (1846), pp. 1-37. In *The Collected Mathematical papers of Arthur Cayley*, cit. nella nota in alto, t. I, p. 117.

[104] G. Mainardi, *Su la teoria generale delle superficie*, «Giornale del I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti e Biblioteca Italiana», t. IX (1856), pp. 385-399.

[105] Domenico Chelini (1802-1878).

[106] Pierre Ossian Bonnet (1819-1892).

[107] Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

[108] F. Brioschi, *Intorno ad alcune proprietà di una linea tracciata sopra una superficie*, «Annali di Scienze matematiche e fisiche», t. V (1854), pp. 232-240, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. I, pp. 115-122.

[109] Brioschi si riferisce qui alle *Disquisitiones generales circa superficies curvas* che Gauss pubblicò per la prima volta a Göttingen, «Commentationes societatis regiae scientiarum

crede di aver fatto una scoperta avendo fatto la ridicola osservazione che come Gauss ha trovata una relazione fra le sei quantità E, G, I, D, D', D'' funzioni delle derivate prima e delle derivate seconde di x, y, z rispetto ad u e v; così si potranno ottenere relazioni fra altre quantità che siano funzioni delle derivate terze. E perché non delle derivate quarte? E così via. Vi sarebbe molte altre cose a dire su questa malferma idea, ma osservate i dettagli. Per esempio, per introdurre, nei primi determinanti che si presentano dopo l'eliminazione, le quantità P, Q, ... in luogo di moltiplicare tutti i termini per un determinante opportuno; fa il quadrato ed estrae la radice, per cui lasciando da parte gli errori che ponno commettersi per questa operazioni, le formole vanno sempre più complicandosi. La applicazione che il Mainardi fa delle sue formole nella penultima pagina dimostra all'evidenza la ignoranza sua in fatto di questioni geometriche, ed il valore delle sue formole. La sua formola $d_u\left(\frac{d_u G}{\sqrt{EG}}\right)\frac{dG}{dr}=0$ conduce al risultato che le superfici aventi le linee di curvatura di un sistema geodetiche sono quelle di rivoluz.[ione] e le sviluppabili; ora sono già note altre famiglie di superficie aventi questa proprietà p. e. quelle di Monge che hanno le linee di curvatura di un sistema situate in piani paralleli[110]. L'erronea conseguenza dipende dall'essere per uno sbaglio di calcolo, erronea la equazione superiore, la quale riducesi invece ad una equaz.[ione] identica. Per cui le sue formole non conducono a nessun risultato. Dopo letto questo lavoro ho mandato al Tortolini una breve nota in appendice ed una su questo argomento, nella quale faccio osservare questo errore[111].

Gottingensis recentiores», vol. VI, 1828, per l'editore Dieterich (in *Carl Friedrich Gauss Werke*, herausgegeben von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, t. 4 (1873), p. 231) e alle formule che precedono il suo noto teorema: "*Mensura curvaturae in quovis superficiei puncto aequalis est fractioni, cuius numerator unitas, denominator autem productum duorum radiorum curvaturae exstremorum in sectionibus per plana normalia*". (Si vuole citare pure dall'edizione francese *Recherches générales sur les surfaces courbes par M. Gauss, traduit du latin par M. A., ancien éleve de l'École Politechnique*, Paris, Bachelier, 1852, p. 20: "*La mesure de la courbure en un point quelconque d'une surface est égale à une fraction, dont le numérateur est l'unité, et dont le dénominateur est le produit des deux rayons de courbures extrémes dans les sections faites par les plans normaux*").

[110] Gaspard Monge (1746-1818). Brioschi incomincia il suo articolo, *Intorno ad alcune proprietà delle superficie a linee di curvatura piane o sferiche*, citato nelle nota successiva, scrivendo: "*Le prime ricerche intorno alle superficie di cui le linee di curvatura sono piane si devono a Monge, il quale nel § XVII della «Application de l'Analyse», ecc. determinava la classe di superficie che hanno le linee di una curvatura situate in piani paralleli.*"

[111] Su questo punto esiste un articolo di F. Brioschi dal titolo *Intorno ad alcune proprietà delle superficie a linee di curvature piane o sferiche*, «Annali di Scienze matematiche e fisiche», t. VIII (1857), pp. 297-308, e in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. I, pp. 263-272.

Eccovi quel che io penso delle ultime pubblicazioni del mio collega, è una ripetizione di quanto potrei dire delle penultime e così via pochissime eccettuate.

Da qualche tempo non mi parlate del Faà di Bruno[112], sono cessate le sue lezioni? è divenuto deputato clericale?

Salutatemi gli amici Chiò[113] e Colombo[114] ed anche Menabrea[115] se vi trovate con lui. Scrivetemi presto a proposito della vostra memoria. Conservatevi sano e credetemi

l'aff.mo Amico Brioschi

Nei Monatsbericht dell'Accademia di Berlino Giugno 1857 vi è un lavoro di Borchardt intitolato "Über eine Eigenschaft der Potenzsummen ungerader Ordnung"[116] sarà conveniente renderne conto nei nostri Annali. Parmi già che la dimostraz.[ione] del teorema principale possa semplificarsi d'assai[117].

9
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 7 Gennaio [18]58

Caris.mo Amico

Ho letto con molta attenzione la vostra nota[118], ed assolutamente non so perché la trattiate con tanto dispregio; a mio parere essa è degnissima di essere

---

[112] Cfr. nt. 9, lett. 1.

[113] Cfr. nt. 10, lett. 1.

[114] Cfr. nt. 11, lett. 1.

[115] Cfr. nt. 15, lett. 3.

[116] Per Borchardt cfr. nt. 6, lett. 2. Il lavoro è: *Über eine Eigenschaft der Potenzsummen ungerader Ordnung*, «Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin», 1857, pp. 301-311 e cfr. pure (Herausgeben von G. Hettner) *C. W. Borchardt's Gesammelte Werke*, Berlin, Druck und Verlag von G. Reimer, 1888, pp. 109-118.

[117] Trattasi di F. Brioschi, *Intorno ad un teorema del signor Borchardt* [teorema contenuto nell'articolo citato qui nella precedente nota 28], «Annali di matematica pura ed applicata-Rivista bibliografica», serie I, t. I (1858), pp. 43-44, e in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. I, pp. 305-307. In questo articolo Brioschi enuncia il teorema di Borchardt in questi termini: "*Se le radici* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *della equazione* $f(x) = 0$ $[f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0]$ *sono disuguali tra loro, i coefficienti* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *della medesima, e quindi tutte le funzioni simmetriche di quelle radici, sono esprimibili per funzioni razionali delle n quantità* $s_1, s_3, \ldots, s_{n-1}$ $[s_r$ *rappresenta la somma delle potenze r-sime delle radici* $x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ".

[118] Probabilmente è il lavoro cit. in nt. 4, lett. 7 e poi richiamato in nt. 4, lett. 8; si tratterebbe quindi di: *Sopra una costruzione del teorema di Abel.*

pubblicata nei nostri Annali[119], ed a questo scopo la mandai oggi al Tortolini[120]. Solo mi spiace che da quanto egli mi scrisse abbiamo poco spazio di non occupato, per cui non so se potrà essere tutta pubblicata; gli ho scritto che in caso di *impossibilità assoluta* lo debba essere almeno fino alla fine del pf. 3°; giacché parmi che i primi tre paragrafi contengano la soluzione della questione principale.

È strano come il Jacobi giunga alla terza delle sue formole della pag. 361 del Vol. 1° dei suoi Opus. Mat.[121], la quale è un caso particolare della vostra[122], deducendola dalla prima formola di detta pagina, mentre questa ottiensi con metodo affatto simile al vostro. Difatti è noto che essendo $f(x,y)=0$, $\lambda(x,y)=0$ due equaz.[ioni] a due incognite rispettivamente dei gradi n, m e $\psi(x,y)$ una funz.[ione] razionale, intera del grado $n+m-2$, si ha

$$(1) \qquad \Sigma \frac{\psi(x,y)}{f'(x)\lambda'(y)-f'(y)\lambda'(x)} = 0$$

la sommatoria dovendo estendersi a tutte le soluz.[ioni] comuni delle due equaz.[ioni].

Sia s l'arco della linea rappresentata dall'equaz.[ione] $f(x,y)=0$ si hanno le:

$$dx = \frac{ds \cdot f'(y)}{\sqrt{f'^2(x)+f'^2(y)}} \qquad dy = -\frac{ds \cdot f'(x)}{\sqrt{f'^2(x)+f'^2(y)}}$$

quindi

$$\lambda'(x)dx+\lambda'(y)dy = \frac{ds\left|\lambda'(x)f'(y)-\lambda'(y)f'(x)\right|}{\sqrt{\left|f'^2(x)+f'^2(y)\right|}}$$

dacché

---

[119] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[120] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[121] Per Jacobi cfr. nt. 6, lett. 1. L'opera è: *Opuscula mathematica*2, voll., 1846-1857. Per quanto concerne la formula di Jacobi, alla quale lo stesso Brioschi perviene in questa lettera (e la cui dimostrazione pubblicherà a parte nell'articolo *Dimostrazione di una formula di Jacobi* che qui si verrà a citare nella nt. 5, della lett. 15), si può pure vedere la pubblicazione *Extraits de deux lettres de Charles Hermite à C. G. J. Jacobi et d'une lettre de Jacobi adressée à Hermite*, che si citerà in nt. 5, lett. 12.

[122] Per intendere meglio il significato di questa osservazione di Brioschi si rimanda specificamente alle pp. 34 e 35 del lavoro di Genocchi menzionato nella nota 1 in alto.

$$\Sigma \frac{\psi(x,y)ds}{(\lambda'(x)dx+\lambda'(y)dy)\sqrt{f'^2(x)+f'^2(y)}}=0 .$$

Sia:

$$\lambda(x,y) = A+Bx+Cy$$

e supponiamo che la retta $\lambda=0$ sia tangente ad una seconda curva, indicando con X, Y le coord.[inate] del punto di contatto si hanno le:

$$A + BX+CY = 0$$

$$dA+XdB+YdC = 0$$

dalle quali:

$$X=-\frac{AdC-CdA}{BdC-CdB}, \qquad Y=\frac{AdB-BdA}{BdC-CdB}$$

quindi la distanza δ da questo punto di contatto, da uno dei punti di intersezione della retta $\lambda=0$ colla linea $f=0$ sarà data dalla

$$\delta^2=\left(x+\frac{AdC-CdA}{BdC-CdB}\right)^2+\left(y-\frac{AdB-BdA}{BdC-CdB}\right)^2 .$$

Ora le x, y essendo le coord.[inate] di un punto comune alla retta $\lambda=0$ ed alla linea $f=0$ si hanno identicamente le:

$$A+Bx+Cy=0$$

$$dA+xdB+ydC=-(Bdx+Cdy)$$

quindi:

$$\delta^2=\frac{(B^2+C^2)(Bdx+Cdy)^2}{(BdC-CdB)^2},$$

ma in questo caso

$$Bdx+Cdy=\lambda'(x)dx+\lambda'(y)dy$$

dunque:

$$\Sigma \frac{\psi(x,y)ds}{\delta\sqrt{f'^2(x)+f'^2(y)}} = 0$$

essendo ψ(x,y) del grado n-2.

Il difetto di formole più generali della (1), cioè per funzioni ψ di grado maggiore, ha condotto Jacobi ad una formola meno generale della vostra; oltre di che il passaggio dalla ultima formola superiore alla seconda della pag. 361 non è molto breve.

Davvero che quel povero Faà di Bruno[123] fa di tutto per rendersi ridicolo. Studiare in due mesi il calcolo delle probabilità! Una delle parti più difficili delle matematiche, e della quale le applicazioni principali sono ancora così contrastabili! O poveri Laplace[124], Poisson[125], Gauss[126], ... in che mondo siete capitati!

Non mi avete risposto intorno a ciò che vi scrissi sull'opuscolo del Fenolio[127], ciò che faranno sarà pel secondo fascicolo, non conviene ci intendiamo del da farsi.

In quel che vi scrissi intorno le memorie del Mainardi[128] non ebbi altro scopo che di mostrarvi che io sono lettore conscienzioso, per cui se talvolta gettai lo sprezzo sui lavori di lui[129] lo feci con cognizione di causa. Del resto io gli lascerei volentieri i suoi onori, i suoi diplomi academici [*sic*], i suoi trionfi scientifici se pure ne ha, allor quando volesse ritirarsi dall'insegnamento; giacché vi dico in verità che l'insegnare meccanica razionale a' giovani ai quali egli insegnò algebra superiore, geometria analitica, calcolo sublime è una vera pena. Io gli auguro tutte le fortune ma vorrei vederlo lontano da ogni stabilimento d'istruzione.

Dispiace il sentire che le vostre ricerche sui numeri primi[130] non vadano troppo bene. Quanto al concorrere al premio dell'Accademia se arrivate a risolvere la questione, dovete farlo come già vi scrissi non per voi ma pel nostro paese.

Ricambiate i saluti agli amici di costì. Scrivetemi presto e credetemi

l'aff.mo Vostro Amico Brioschi

---

[123] Cfr. nt. 9, lett. 1.
[124] Pierre-Simon Laplace (1749-1827).
[125] Siméon Denis Poisson (1781-1840).
[126] Cfr. nt. 19, lett. 8.
[127] Cfr. nt. 5, lett. 8.
[128] Per Mainardi cfr. nt. 21, lett. 3; per le memorie si vedano la nota 23 della lettera 3 e la nota 16 della lettera 8.
[129] A riguardo si vedano le lettere 3 e 8.
[130] Su queste ricerche di Genocchi si veda la lettera 8.

10
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 5 Febbraio [18]58

Caris.mo Amico

Non ho risposto subito alla vostra lettera giacché era in aspettazione di qualche notizia intorno alla pubblicaz.[ione] del I° fascicolo del nostro giornale[131], la quale voleva comunicarvi. Finalmente jeri mi giunse una lettera dal Tortolini[132], che annunzia la pubblicaz.[ione] pel giorno tre del corrente, senza però darmi alcun dettaglio, per cui non so se il vostro lavoro sarà stato pubblicato per intero o solo in parte[133]. Io gli aveva raccomandato fortemente che questo fascicolo fosse composto di nove fogli, giacché uno va perduto pel frontespizio e prefazione, ma Egli mi scrisse che per molte ragioni non ha potuto farne stampare che otto. Da ciò vedete che incominciamo male, giacché io credo non debbano esservi altre ragioni che il meglio del giornale. E da questo proposito avrei pensato ad un modo di trovarci assieme voi, io e Betti[134] senza molto disagio per ciascuno. Io passerò la settimana detta *santa* a Genova, se il Betti come è probabile vi scrisse lo potreste fare anche voi?

Il Tortolini ha dato alla luce il fascicolo d'Agosto del suo giornale; non so perché io non l'ho ricevuto ma l'ho veduto. Esso contiene una vostra nota sopra una somma di derivata successiva[135]. Le vostre osservazioni sono giustissime ed il vostro metodo è sempre preferibile non essendo d'uopo di ricercare dopo i valori delle costanti introdotte dall'integrazione; però volendo passare per quest'ultima si può giungere assai brevemente al risultato. Mi ricordo di averlo fatto allorquando lessi la nota del Sig. Harton[136]; la teoria dei determinanti vi si può applicare con vantaggio; ma il Sig. Harton la conosce poco, se debbo giudicarlo dal modo con cui l'applica in questo suo lavoro.

Ho letto anche con molto piacere il vostro articolo pubblicato nello Zeitschrift di Schlömilch[137]. La trascendente W[138] sebbene possa farsi dipendere dalla γ di Legendre, o meglio dalla Θ di Jacobi, merita di essere studiata per sé,

---

[131] Cfr. nt. 2, lett. 1.
[132] Cfr. nt. 2, lett. 1.
[133] Su questo fatto si veda la parte iniziale della lettera precedente. Si tratterebbe del lavoro di cui si è detto in nt. 4, lett. 7 e poi richiamato nelle lettere 8 e 9.
[134] Cfr. nt. 1, lett. 1.
[135] A. Genocchi, *Intorno ad una somma di derivate successive*, «Annali di Scienze matematiche e fisiche», t. VIII (1857), pp. 289-296.
[136] Julien Napoléon Harton de la Goupilliere (1833-1927).
[137] L'articolo di Genocchi è: *Ueber gewisse elliptsche Integral*, «Zeitschrift für Mathematik und Physik», Leipzig, 1857.
[138] Brioschi intende riferirsi alla trascendente di Karl Weierstrass (1815-1897).

giacché la sua forma può condurre ad importanti proprietà, e ne abbiamo un bell'esempio nella vostra formola d'addizione. Forse potrebbe anche essere utile a rendere più elementari le proprietà delle funz.[ioni] Θ. La lettura di questo vostro articolo mi fece nascere l'idea di cercare i valori degli integrali:

$$\int_0^K log\, sn(nu)du\,,\quad \int_0^K log\, cn(nu)du\,,\quad \int_0^K log\, dn(nu)du$$

(scrivo *sn(nu)* in luogo di *sen.am(nu)* come fa il Gudermann)[139]; sebbene quasi evidente è però singolare che essi siano ordinatamente quelli di:

$$\int_0^K log\, sn\, u\, du\,,\quad \int_0^K log\, cn\, u\, du\,,\quad \int_0^K log\, dn\, u\, du$$

ritrovati ultimamente dallo Schlömilch.
A proposito di questi ho osservato che indicandoli p. e. con *A*, *B*, *C*, essendo

$$dn(u+K)=\frac{k'}{dn\,u}$$

si ha:

$$\int_0^K log\, dn(u+K)du = K\, log\, k' - C$$

ma ponendo $u = v+K$ si ha:

$$\int_0^K log\, dn(u+K)du = \int_{-K}^0 log\, dn\ u\, du = \int_0^K log\, dn\, u\, du = C$$

dunque

$$C=\frac{1}{2}K\, lg\, k'$$

Così essendo $sn(u+K)=\frac{cn\,u}{dn\,u}$ si ha:

$$\int_0^K log\, sn(u+K)du = B - C$$

e quindi

$$A = B - C$$

per cui non rimane ad ottenersi che uno degli integrali *A* o *B*.

Dalle formole di trasformaz.[ione] o di moltiplicazione si ponno dedurre alcune proprietà del vostro tras.[formato] *W(u)*. Giacché essendo:

---

[139] Christoph Gudermann (1798-1852).

$$W(u+iK') = \int_0^K lg\left(1-\frac{sn^2 v}{sn^2 u}\right)dv$$

si ha:

$$W(u+iK') - W(u) = \int_0^K lg\frac{1-\frac{sn^2 v}{sn^2 u}}{1-k^2\, sn^2 u\, sn^2 v}dv$$

nella quale prendo $u = \omega = \frac{2m\,K + 2m'iK'}{n}$, e sommando si ottiene sotto il segno integrale la espres.[sione] $log\frac{sn(nv)}{\omega\ sn(v)}$ per cui per esempio si avrebbe:

$$\sum\{W(\omega) - W(\omega + iK')\} = K\log n$$

ed altre simili.

Ho ricevuto dallo Schlömilch due memorie una sulla teoria delle derivate d'ordine superiore[140]; l'altra sulla trasformazione di un integrale definito[141].

Mi pare che questa seconda abbia qualche pregio, e vorrei dirne qualche parola nel nostro giornale, la conoscete voi?

Mi spiace il sentirvi oggetto d'articoli dell'*Armonia*[142], sebbene il modo colla quale mi dite parla di voi, non possa che farvi onore presso i galantuomini. Dico mi spiace giacché credo che anche voi non avrete potuto [fare] a meno di sentirne qualche molestia od almeno irritazione. Il *Crepuscolo*[143] di Domenica scorsa fa allusione a quell'articolo dell'*Armonia* e lo dice di un Prof. P.

A proposito dell'*Armonia* avete veduto l'articolo del Faà di Bruno stampato nell'ultimo fascicolo di Crelle[144]! Intende dare una dimostrazione delle nove equaz.[ioni] alle quali deve soddisfare un risultante, più semplice di quella che ho dato io. Non è erronea, ma è un caso giacché dal modo che è scritta si vede che non ha capito ciò che scriveva; quanto alla semplicità è paragonabile a quella dell'*Armonia*.

---

[140] Probabilmente Brioschi si riferisce a O. Schlömilch, *Théorèmes généraux sur les dérivées d'un ordre quelconque de certaines fonctions très générales*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik », Bd. 32 (1846), pp. 1-7.

[141] O. Schlömilch, *Transformation de quelques intégrales définies*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 36 (1848), pp. 271-276.

[142] *L'Armonia* è il nome di una rivista cattolica fondata a Torino nel 1849, già citata in nt. 12, lett. 4.

[143] Rivista ideata, nel 1850, da Carlo Tenca (1816-1883).

[144] F. Faà di Bruno, per il quale cfr. nt. 9, lett. 1, *Note sur un théorème de M. Brioschi*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 54 (1857), pp. 283-284.

Del resto, se la opinione degli uomini onesti ha ancora, come sono certo, potenza in questo mondo, voi siete in un eccellente posizione come uomo civile; la stima di tutti quelli che coltivano la scienza per la scienza ve la fa tale come Prof.[essor]e.

In ogni circostanza contate sempre sull'amicizia del Vostro Brioschi.

11
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 14 Febbraio [18]58

Caris.mo Amico

Spiacemi che allorquando vi scrissi aver trovato una eloquente dimostrazione del teorema di Borchardt[145], non vi abbia aggiunto quale era il teorema, giacché la vostra conoscenza della memoria del Cauchy mi sarebbe stato assai utile, massimamente trattandosi di rivista bibliografica. A ciò mi pare bene di rimediare nel prossimo fascicolo[146], ma io non ho la memoria del Cauchy, né la credo quella pubblicata nel Cahier 18 del giornale della scuola politecnica[147]; per cui fatemi il favore di indicarmi in quale periodico sia pubblicata. È strano che la seconda parte della memoria del Borchard[148] contiene una dimostrazione molto lunga del secondo dei teoremi di Cauchy che voi mi indicate; io non ne ho parlato essendo esso conseguenza necessaria della mia dimostrazione. Sono curioso di conoscere la dimostrazione del Cauchy, ma m'imagino [*sic*] che egli dimostrerà solo la possibilità come fa di solito.

Il Tortolini[149] ha mantenuto la parola circa al migliorare la stampa; però questo primo fascicolo doveva essere di nove fogli, essendo uno di essi occupato da frontespizio etc.

Vi è piaciuto l'avviso dell'editore? E notate bene che avendomi egli mandato una bozza di stampa del medesimo a leggere, mi arbitrai di correggere alcuni errori di sintassi, di levar via il titolo di *illustri* che ci aveva regalato, ed anche

---

[145] Cfr. nt. 29, lett. 8.
[146] Si tatta degli *Annali*, per i quali cfr. nt. 2, lett. 1.
[147] A titolo di informazione, si danno comunque i riferimenti bibliografici completi del lavoro di Cauchy a cui accenna qui Brioschi: A. L. Cauchy, *Sur les racines imaginaires des équations*, «Journal de l'École polytechnique», 18e cahier, t. XI (1820), pp. 411-416. In *Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy*2,e sér., Paris, Gauthier-Villars, 1905, t. I, pp. 258-263.
[148] Brioschi si riferisce alla memoria citata nella nt. 28, lett. 8.
[149] Cfr. nt. 2, lett. 1.

l'ultima parte in elogio della stamperia de propaganda fide[150]. Ma egli avrà avuto le sue buone ragioni per non seguire il mio avviso su quest'ultimo punto.

Amerei molto che anche voi vi occupaste della teoria delle funzioni Abeliane. Essa appare un campo immenso di ricerche, e sebbene non l'abbia osato stampare, pure dirò con voi essere intimamente persuaso che il Weierstrass[151] non l'ha presentata nella sua integrità, o per meglio dire non ha poste nemmeno le basi per istudiarla nella sua integrità. A questa mia idea che ora vengo a spiegarvi meglio alludono le denominazioni che io ho introdotte di *funzioni Abeliane ad indice unico*, f. A. *a doppio indice*, quasi ad indizio dell'esistenza di funzioni Abeliane a maggior numero di indici. Notate che il Weierstrass nella sua memoria del programma scolastico di Braunensberg[152] dice incidentalmente che come nella teoria delle funzioni Ellittiche si considerano le tre funz.[ioni] *snn*, *cnn*, dnn così in quella delle funz.[ioni] ultra-ellittiche dell'$(n-1)$-esima specie si dovranno considerare $2n+1$ funzioni; delle quali n analoghe a *snn*, a *cnn*; ed una a *dnn*. Ma essendosi in questo tempo pubblicata la memoria del Rosenhain[153] nella quale si dimostrano esser quindici le funzioni analoghe alle *snn*, ... pel caso delle trasf.[ormazion]i ultra-ellittiche di prima specie; il Weierstrass si sarà accorto di aver enunciato una proposizione erronea; quindi nella seconda memoria[154], senza dir niente di quella prima proposizione né della memoria del Rosenhain, introduce quelle funzioni che ha chiamate a doppio indice.

Ora io credo che debbonsi considerare anche funzioni a tre indici, a quattro indici etc. ... e precisamente per le funzioni ultra-ellittiche dell'$(n-1)$esima specie vi saranno: $2n+1$ funz.[ioni] ad un indice; $\frac{(2n+1)2n}{2}$ funz.[ion]i a doppio indice; $\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{2\cdot 3}$ funz.[ion]i a triplo indice etc. in tutto:

---

[150] È la *Congregazione de propaganda fide* o *Sant'Uffizio* divenuta poi *Congregazione per la dottrina della fede*.

[151] Cfr. nt. 8, lett. 10.

[152] Brioschi nel suo lavoro *Sulle funzioni abeliane complete di prima e seconda specie*, già citato in nt. 5, lett. 6, in un'opportuna nota scrive: "*Weierstress – Beitrag zur Theorie der Abel'schen Integrale. Programma scolast. di Braunsberg, 1849. Zur Theorie der Abel'schen Functionen. Giornale di Crelle T. 47, pag. 293. Giornale di Liouville. Tom. XIX, pag. 262.*" Braunsberg è probabilmente la regione, oggi polacca, del Braunensberg.

[153] Brioschi nell'articolo *Sopra alcune proprietà delle funzioni Abeliane*, cit. in nt. 6, lett. 6, in una nota posta alla pag. 27 cita il seguente lavoro di Johann Georg Rosenhain (1816-1887): "*Mémoire sur les fonctions de deux variables et a quatre périodes etc. Recueil des Savants étrangers. T. XI, pag. 423.* "

[154] Brioschi nello stesso lavoro citato nella nota precedente, alla pag 25 annota: "*Le ingegnose ricerche del Sig. Weierstrass nella teorica delle funzioni Abeliane sono pubblicate nei Vol. 47 e 52 del giornale del Sig. Crelle. Le definizioni e denominazioni superiori sono quelle adottate da questo Autore nella seconda delle sue memorie, della quale non è finora pubblicata che una parte. Giornale di Crelle, Tom. 52, pag. 313.*"

$$2n+1+\frac{(2n+1)2n}{2}+\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{(2n+1)2n(2n-1)\ldots(n+2)}{2\cdot 3\ldots n}=2^{2n}-1=4^{n}-1.$$

Per *n=1* si hanno le tre *snn* ...; per *n=2* le quindici del Rosenhain etc. ... Questa mia opinione è appoggiata alla seguente considerazione.

Le funzioni Abeliane come le snn, cnn, dnn sono eseguibili mediante rapporti tra funzioni doppiamente infinite a denominatore comune. Ora considerando la più generale fra queste, e supponendo che in essa vi siano n argomenti, vedesi facilmente che la medesima dà origine a 4^n funzioni della stessa specie; alle quali debbono corrispondere altrettante meno una funzioni Abeliane. La difficoltà sta nel determinare la forma di queste ultime, perché risulti la più semplice; ma in modo che quella a triplo indice non siano p. e. esprimibili razionalmente per mezzo di quelle ad uno o due indici etc. Ho fatto osservare nel mio lavoro[155] che le f. A. a doppio indice si riducono a quelle ad un solo nel caso delle funz.[oni]E llittiche; così dovranno ridursi a quelle a doppio indice quelle a triplo nel caso delle tras.[formazioni] ultraellittiche di prima specie etc. Io non ho ancora potuto afferrare la forma generale di quelle funzioni sebbene alcune ricerche sulla periodicità delle prime due specie mi abbiano in parte rischiarato la via; prevedo però che difficilmente potrò risolvere questa quistione se non mi è dato di fermarmi sopra di essa per qualche tempo senza alcuna distrazione.

Spiacemi che nel secondo fascicolo del nostro giornale non potrò pubblicare quanto ho già fatto intorno alla periodicità di quelle due prime specie di funz.[oni] Abeliane; od intorno al valore che esse assumono per valori particolari degli argomenti; giacché oltre alle tre brevi note del Jonquières[156] delle quali vi scrissi, il Tortolini ha accettata una memoria del P.e Jullien[157], ed io una del Prof.e Codazzi sulla teoria delle carte geografiche[158]; inoltre il Tortolini ha una sua memoria pur troppo assai lunga che intende pubblicare in quel fascicolo[159], per cui credo che con qualche articolo di rivista il fascicolo sarà completo.

---

[155] Cfr. le note 5 e 6, lett. 6.

[156] I lavori di Jonquières sono stati già citati nella nt. 7, lett. 6.

[157] Brioschi si riferisce all'opera di Marc-Antoine Jullien (1775-1848), *Mémoire sur la probabilité des erreures dans la somme et dans la moyenne de plusieurs observations*, «Annali di matematica pura ed applicata»serie I, t. I (1858), pp. 76-88, 149-1552,27-237.

[158] Delfino Codazzi (1824-1873), *Intorno alla questione: riportare in una superficie piana o sferica una figura situata in una superficie qualunque di rivoluzione talmente che le parti dell'immagine e della figura abbiano le aree in rapporto constante*, «Annali di matematica pura ed applicata»serie I, t. I (1858), pp. 89-109.

[159] Nel 1858, risultano pubblicati, sugli «Annali di ma tematica pura ed applicata»i seguenti lavori di Tortolini: *Nuove ricerche relative alla sostituzione lineare per la reduzione delle funzioni ellittiche di prima specie*, serie I, t. I, pp. 57-75; *Sopra alcune curve algebriche delle quali la lemniscata è un caso particolare*, serie I, t. I, pp. 178-181, *Sulla risoluzione algebrica dell'equazioni di terzo e quarto grado*, serie I, t. I, pp. 310-322.

Quanto mi dite intorno al Consiglio Superiore mi ha fatto molto senso; in questa parte stiamo meglio noi; i professori dell'Università sono affatto liberi nel programma delle loro Lezioni, né devono presentarlo ad alcuna Autorità.

Mi pare sarà difficile possiate attenervi al programma prescrittovi, non potreste parlarne all'amichevole col Menabrea[160]?

Ho veduto sulla rivista contemporanea del Gennajo riprodotto il vostro programma, quasi a conforto del ministro Lanza[161]. Aveva egli forse degli scrupoli?

Ieri ho ricevuto il primo fascicolo del corrente anno dello Zeitschrift di Schlömilch[162]; vi è un articolo intitolato "Reduction eines vielfachen Integrales" del redattore; è il medesimo già pubblicato nei berichten dell'Accademia di Lipsia[163]; ma fa cenno in ultimo della vostra generalizzazione.

Io sarò certamente a Genova nei giorni che voi avete liberi, e vi sarò sommamente grato se verrete a trovarmi; quanto ai giorni di cui potrà disporre il Betti[164] ve li saprò dire.

Salutatemi l'Am[ico]. Colombo[165] ed il Prof. Chiò[166]. Conservatevi sano e credetemi

l'Aff.mo Amico Brioschi

12
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 25 Febbraio [18]58

Caris.mo Amico

Vi ringrazio assai della memoria del Cauchy[167] che mi avete mandato; la dimostrazione del teorema che io ho attribuito al Borchardt[168] mi è assai

[160] Cfr. nt. 15, lett. 3.

[161] Giovanni Lanza (1810-1882). Ministro della Pubblica Istruzione del Regno di Sardegna, dal 31 Maggio 1855 al 18 Ottobre 1858.

[162] Cfr. nt. 4, lett. 1.

[163] L'articolo di O. Schlömilch, *Reduction eines vielfachen Integrales*, fu pubblicato dapprima nella rivista «Berichte über die Verhandlungen der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig», Leipzig, t. XIX (1857), pp. 67-73 e poi, nel 1858, nello «Zeitschrift für Mathematik und Physik».

[164] Cfr. nt. 1, lett. 1.

[165] Cfr. nt. 11, lett. 1.

[166] Cfr. nt. 10, lett. 1.

[167] E' la memoria, che non si è riusciti a determinare, alla quale Brioschi accenna anche nella lettera 11.

[168] Per Borchardt si veda nt. 6, lett. 2.

piaciuta, ma le formule finali sulle quali quest'ultimo autore poggia la dimostrazione del teorema sono assai più comode, e per la forma di determinante e per aver fatto uso di sviluppi in cui non entrano i numeri bernoulliani.

Credo che il teorema dell'Hermite[169] di cui mi parlate sia quello che riguarda la determinazione della costante T. Effettivamente nella formula di trasformazione, come avrete veduto nel mio lavoro, la determinazione di essa è inutile giacché nel rapporto fra due θ scompare; ma è senza dubbio una ricerca curiosa. Io vi ho pensato un momento e giunsi finora a dimostrare il caso particolare di $b=0$, e pel caso generale dover essere $T=\frac{C}{\sqrt{a+b\omega}}$ essendo C una costante rispetto ad ω. Ma ora sono occupato in alcune ricerche sui covarianti delle forme a più variabili per cui devo lasciar da parte questo argomento, ed attendo che voi abbiate a soddisfare il desiderio di una dimostrazione. Vi esporrò brevemente il modo col quale giunsi a quel valore di T. Le funzioni $\theta_{\mu,\nu}$, $\Theta_{m,n}$ come ha osservato Jacobi[170], e come si vede facilmente, soddisfano alle equazi.[oni]:

$$(1)\quad \frac{d^2\theta_{\mu,\nu}}{dx^2}-4i\pi\frac{d\theta_{\mu,\nu}}{d\omega}=0\,,\quad \frac{d^2\Theta_{m,n}}{dx^2}-4i\pi\frac{d\Theta_{m,n}}{d\Omega}=0\,.$$

Ora ponendo per brevità $a+b\omega=s$ la formula dell'Hermite è

$$(2)\quad e^{i\pi b s x^2}\theta_{\mu,\nu}(sx)=T\Theta_{m,n}(x)$$

Derivo questa due volte per x, ed una per ω, ed osservando che posto $y=sx$ si ha:

$$\frac{d^2\theta_{\mu,\nu}(sx)}{dx^2}=s^2\frac{d^2\theta_{\mu,\nu}(y)}{dy^2}=0$$

e che:

$$\frac{d\Theta_{m,n}}{d\omega}=\frac{1}{s^2}\frac{d\Theta_{m,n}}{d\Omega}$$

---

[169] Per Hermite cfr. nt. 10, lett. 2. Il lavoro è *Sur quelques formules relatives à la trasformation des fonctions elliptiques* «Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences», Paris, t. XLVI (1858), pp. 171-175. Questo lavoro fu pubblicato anche su «Journal de Mathématiques pures et appliquées», serie II, t. III (1858), pp. 26-36. In *Oeuvres de Charles Hermite*, cit. nt. 10, lett. 2, si trova al t. I, 1905, pp. 482-495.

[170] Per Jacobi si veda nt. 6, lett. 1.

si ottiene per le (1)

$$e^{i\pi b s x^2}\left(b\theta_{\mu,\nu}(y)+2by\frac{d\theta_{\mu,\nu}(y)}{dy}\right)=-2s\frac{dT}{d\omega}\Theta_{m,n}(x)$$

la quale divisa per la (2) dà

$$b+2by\frac{d\log\theta_{\mu,\nu}(y)}{dy}=-2s\frac{d\log T}{d\omega}.$$

Ora fra le quattro funzioni $\theta_{\mu,\nu}$ le tre $\theta_{0,0}$; $\theta_{1,0}$; $\theta_{0,1}$, hanno la proprietà che i valori di $\frac{d\theta_{\mu,\nu}}{dy}$ corrispondenti ad $y=0$ sono nulli e non lo sono quelli di $\theta_{\mu,\nu}(y)$ quindi l'equaz.[ione] superiore nella quale pongasi $y=0$ potrà dare:

$$\frac{d\log T}{d\omega}=-\frac{1}{2}\frac{b}{s}=-\frac{1}{2}\frac{b}{a+b\omega}$$

per cui $T=\frac{C}{\sqrt{a+b\omega}}$. Adesso però che vi scrivo mi nasce qualche dubbio sull'ultima parte di questa dimostrazione. Essa potrebbe avere il vantaggio di essere applicabile anche alle funzioni Abeliane, giacché si hanno anche in questo caso formule analoghe alla (1); le quali non saranno ancora considerate in questa teoria, ma che sono assai utili. La formula poi che dà l'Hermite alla pag. 172, dalla quale, egli dice, deduconsi le equazioni algebriche e differenziali ... non è la più generale. Jacobi ha indicato nella lettera diretta all'Hermite e pubblicata nelle sue opere[171] come si possa giungere ad una formula assai generale nella quale gli argomenti siano in un membro u_1, u_2, u_3, u_4 e nell'altro v_1, v_2, v_3, v_4 legati dalle equaz.[ioni]: $2v_1=u_1+u_2+u_3+u_4 2, v_2=u_1+u_2-u_3-u_4$ etc. ...

Tutta la memoria del Rosenhain[172] premiata dall'Accademia di Parigi si appoggia su questo teorema; che può estendersi anche alle funz.[ion]i Abeliane.

---

[171] È una degli estratti di lettera: C. G. J. Jacobi, *Extraits de deux lettres de Charles Hermite à C. G. J. Jacobi et d'une lettre de Jacobi adressée à Hermite*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 32 (1846), pp. 277-299, pp. 176-181. In *C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke*, cit. nt. 6, lett. 1, t. II, pp. 87-114, pp.115-120. Per i primi due estratti si veda pure in *Oeuvres de Charles Hermite*, cit. nt. 10, lett. 2, t. I, 1905, pp. 10-15.

[172] Cfr. nt. 9, lett. 11.

Vedrò con molto piacere la [vostra]dimo strazione del mio teorema sulle radici comuni[173]; ma probabilmente dovrò attenderla, se il Terquem[174] farà di essa come di due dimostrazioni l'una di una formula dell'Hesse[175], l'altra di quella di interpolazione del Tchebicheff[176] che gli mandai da molto tempo. Anzi sarei tentato di pubblicare quest'ultima nella rivista dei nostri Annali[177]. Non so se abbiate veduto che in una nota alla traduz.[one]francese del mio opuscolo sui determinanti[178] ho generalizzato quel teorema[179] ed ho mostrato come possa estendersi al caso di equazioni a più variabili. Quella nota è estratta da una lunga lettera che io aveva scritto al Terquem sull'argomento, e credo sia questa lettera a cui allude il Terquem nella nota a pie' di pagina all'articolo pubblicato nei suoi Annali[180].

Ho letto ieri alcuni dei rendiconti delle sedute del parlamento piemontese. Vedo che il Ministro[181] diventa sempre più codino: l'episodio del deputato Boggio[182] circa il famoso franchir la barrière, mi è assai piaciuto.

Giovedì della settimana scorsa fui a Milano per una seduta dell'Istituto[183]. Il Mainardi[184] lesse il sunto di otto memorie d'argomenti differenti cioè d'analisi, di geometria sintetica ed analitica, di teoria dei numeri, etc.

Se non fosse un ciarlatano, sarebbe un genio. Le sue letture sono fatte con tanta arte che non si può comprendere né il punto di partenza né quello d'arrivo, per cui non è possibile fargli obbiezioni seduta stante; il che avrei certo potuto fare almeno una volta. Nella Gazzetta di Milano del 23 Febbraio troverete il rendiconto della Seduta, che contiene presso a poco tutta la lettura del Mainardi.

---

[173] Probabilmente trattasi di A. Genocchi, *Théorème de M. Brioschi sur les racines des èquations algébriques*, Nouvelles Annales de Mathématiques»detti pure *Annali di Terquem* (cfr. nt. 13, lett. 2), serie I, t. XVI (1857), pp. 95-96. Va segnalato che Brioschi aveva in precedenza pubblicato l'articolo: *Méthode pour déterminer les racines communes à deux équations*, Nouvelles Annales de Mathém atiques»serie I, t. XIV (1855), pp. 81-83, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. V, pp. 113-118.

[174] Cfr. nt. 13, lett. 2.

[175] Ludwig Otto Hesse (1811-1874). Non risulta, tra i lavori pubblicati da Brioschi sugli *Annali di Terquem*, alcun articolo che sembra rimandare a una *formula di Hesse*.

[176] Cfr. nt. 13, lett. 2 e nt. 10, lett. 14.

[177] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[178] F. Brioschi, *La teorica dei determinanti e le sue principali applicazioni*, Pavia, tip. degli Eredi Bizzoni, 1854. Come già si è già accennato nella nt. 14, lett. 8, questo lavoro fu tradotto in francese da E. Combescure col titolo di *Théorie des déterminants et leurs principales applications*, Paris, Mallet-Bachelier, 1856.

[179] Brioschi allude alla generalizzazione del teorema sulle radici comuni che aveva dato nel lavoro cit. qui nella precedente nt. 7.

[180] Trattasi della rivista di Terquem, per la quale cfr. nt. 13, lett. 2.

[181] Cfr. nt. 17, lett. 11.

[182] Pier Carlo Boggio (1827-1866), professore di diritto costituzionale, deputato al Parlamento del Regno di Sardegna e patriota.

[183] È l'Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti, citato in nota 6, lettera 4.

[184] Cfr. nt. 21, lett. 3.

Il Betti[185] viene certamente a Genova nelle vacanze Pasquali, egli ha già inoltrato domanda pel permesso al Granduca[186] (vedete che larghezza di governo). Farà in modo di trovarvisi nei giorni che mi avete indicati; vi saprò dir meglio i giorni precisi.

Credete convenga fare un articolo bibliografico sull'opuscolo del Fenolio[187]?

Il Trudi ha pubblicato una nuova memoria (almeno nuova per me) "Sulle proprietà delle curve del 2° ordine circoscrittibili ad un quadrigono"[188] l'avete letta?

Avete veduto la memoria del Kummer "Theorie der idealen primfaktoren der complexen Zahlen"?[189] Non sarebbe bene renderne conto nel nostro giornale?

Conservatevi sano e credetemi

il Vostro Aff.mo Amico
Brioschi

13
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 23 Marzo [18]58

Caris.mo Amico

Finalmente Betti[190] mi diede notizia sicura intorno al suo viaggio, ed io posso rispondere alla vostra lettera. Se il mare sarà tranquillo egli partirà da Livorno dopodomani Giovedì alla sera, e verrà a Torino senza fermarsi che pochi istanti a Genova; dove sarà di ritorno pel Lunedì o Martedì e vi starà fino dopo le feste. Se ciò è, lo vedrete prima di me, in qualunque modo però vi aspetto a Genova dal Mercoledì Santo in avanti. Io vi andrò il prossimo Lunedì ed alloggierò [*sic*] all'Albergo della Ville.

---

[185] Cfr. nt. 1, lett. 1.

[186] Granduca di Toscana era Leopoldo II di Lorena (1797-1870).

[187] Cfr. nt. 5, lett. 8.

[188] N. Trudi, per il quale si veda nt. 2, lett. 4, *Sulle proprietà delle curve del secondo ordine circoscrittibili ad un quadrigono ed alla ricerca della minima tra esse in superficie*, «Memorie della R. Accademia delle Scienze di Napoli», serie II, t. I (1856), pp. 239-284.

[189] Ernst Eduard Kummer (1810-1893), *Theorie der idealen Primfactoren der complexen Zahlen, welche aus den Wurzeln der Gleichung* $\omega^n = 1$ *gebildet sind, wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist*, cfr. pure (A. Weil Edited by) E. E. Kummer, *Collected Papers*, Berlin Heidelberg New York, Springer-Verlag, 1975, I, pp. 583-630 (dove vengono indicati i seguenti luoghi editoriali: Berlin. Abh. 1856, 1-47, gelesen 18. Decbr. 1856. Blosser Titel, ohne Auszug in Berlin. Monatsber. 1856, 648).

[190] Cfr. nt. 1, lett. 1.

Mi è molto piaciuta la vostra dimostrazione del teorema sulle radici comuni[191], nella nota alla traduz.[ion]e[192] oltre al considerare il caso di equazioni a più incognite ho dato questo teorema. Indicando con P_1 il simbolo di operazione

$$x^s \frac{dV}{db_m} - sx^{s-1} \frac{dV}{db_{m-1}} + .. + (-1)^s \frac{dV}{db_{m-s}}$$

e con P_2 ciò che si ottiene ripetendo sopra V l'operaz.[ione] P_1 ossia

$$P_2 = x^{2s} \frac{d^2V}{db^2{}_m} - 2s\, x^{2s-1} \frac{d^2V}{db_m db_{m-1}} + \text{etc...}$$

ed analogamente P_3, P_4 etc. ... Se le due equaz.[ioni] hanno r radici $x_1, x_2, \ldots, x_r$ comuni si avranno le:

$$V=0,\ P_1=0,\ P_2=0 \ldots\ P_{r-1}=0$$

e

$$P_r = 1\cdot 2\cdot 3 \cdot \ldots \cdot r\ V_{1,2,3,\ldots,r}(x-x_1)^s(x-x_2)^s \ldots (x-x_r)^s.$$

Per $s=1$ si ha il teorema che ho pubblicato negli Annali. Analogamente si ponno stabilire dei criterj sulla molteplicità delle radici di una equazione.

Quella parte di dimostrazione del teorema dell'Hermite[193] che vi comunicai è esatta, ma avendo per errore di calcolo tralasciato un termine giungeva ad una formola che mi fece nascere un dubbio mentre la trascriveva. Infatti credo avervi scritto che la funzione $\theta_{\mu,\nu}(sx)$ soddisfa alla equaz.[ione]:

$$\frac{d^2\theta_{\mu,\nu}(y)}{dy^2} - 4i\pi \frac{d\theta_{\mu,\nu}(y)}{d\omega} = 0 \qquad (y=sx)$$

mentre invece la formola esatta è:

$$\frac{d^2\theta_{\mu,\nu}(y)}{dy^2} - 4i\pi \frac{d\theta_{\mu,\nu}(y)}{d\omega} + 4i\pi bx \frac{d\theta_{\mu,\nu}(y)}{dy} = 0$$

per cui fatte le riduzioni arrivasi alla:

$$\frac{d \log T}{d\omega} + \frac{1}{2}\frac{b}{s} = 0$$

e perciò:

$$T = \frac{C}{\sqrt{a+b\omega}}.$$

---

[191] Cfr. nt. 7, lett. 12.

[192] Si tratta di una nota apposta alla traduzione in francese dell'opuscolo *La teorica ecc.* per la quale si vedano pure le nt. 12, lett. 12 e nt. 14, lett. 8.

[193] Per quanto riguarda Hermite cfr. nt. 10, lett. 2, per il lavoro cfr. nt. 3, lett. 12 e per la dimostrazione la stessa lettera 12.

Sono anche giunto a dimostrare essere C una radice ottava dell'unità, ma non potei ottenere quella espressione così generale dell'Hermite. Se suppongo

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \alpha \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

si dimostra facilmente essere $C=\sqrt{\alpha}$, ma $\alpha=\sqrt{\frac{k}{\lambda}}$ pel caso dell'Hermite; dunque dalla formola generale di relazione fra i moduli (p. e. la (20) della mia nota sulla trasformaz.[ione] delle funzioni Ellittiche)[194] si ha che C è una radice ottava dell'unità. Io ho qualche dubbio sulla formola dell'Hermite; intanto essa non può sussistere colle condizioni da lui date, cioè colle due

$$m = a\mu+b\nu+ab$$
$$n = c\mu+d\nu+cd$$

ma questo può essere errore di stampa; giacché queste equaz.[ioni] debbono essere sostituite da due congruenze (*mod. 2*). Parmi che l'Hermite non abbia osservato che i numeri a, b, c, d devono soddisfare oltre l'equaz.[ione] $ad-bc=1$ anche due altre che si ottengono così. Se nella equazione:

$$e^{i\pi b s x^2}\theta_{\mu,\nu}(sx) = T\Theta_{m,n}(x)$$

si pone $\mu=\nu=1$ ed $x=0$ essendo $\theta_{1,1}(0)=0$ dovrà essere $\theta_{m,n}(0)=0$ ma ciò non può essere se non sono $m=n=1$; giacché delle quattro funzioni θ una sola annullasi, annullandosi l'argomento; quindi le a, b, ... debbono soddisfare le congruenze

$$\begin{aligned} a+b+ab &\equiv 1 \\ c+d+cd &\equiv 1 \end{aligned} \quad (mod.2)$$

Se cambiate queste congruenze in equazioni la formola dell'Hermite non può più sussistere.

Nell'ultimo fascicolo del giornale di Borchardt[195] ho letto la nota di un tale Lipschitz "Untersuchung einer aus vier Elementen gebildeten Reihe"[196] che mi pare di qualche interesse.

La memoria del Kummer "Theorie der Idealen Primfaktoren etc."[197] è negli atti dell'Accademia di Berlino del 1856; mi pare che il renderne conto sia affare abbastanza grave, e forse converrà una traduzione; a meno che si potesse

---

[194] F. Brioschi, *Sulla trasformazione delle funzioni ellittiche*, «Annali di Scienze matematiche e fisiche», t. VIII (1857), pp. 70-76, 125-128, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. I, pp. 247-255.

[195] Cfr. nt. 6, lett. 2.

[196] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903), *Untersuchung einer aus vier Elementen gebildeten Reihe.* «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 54 (1857), pp. 313-328.

[197] Cfr. nt. 23, lett. 12.

combinare una monografia su questo argomento dei numeri complessi, della quale dovreste voi occuparvi[198]. Ma di questo e di molte altre cose parleremo a Genova.

Fatemi il favore di domandare al Prof. Chiò[199] se si può avere il rapporto della Commissione pel traforo del Cenisio[200]; egli me ne parlò l'anno scorso, e mi aveva anche promesso di mandarmi alcune sue operazioni sul medesimo. Ora la quistione venne di nuovo agitata dal Moigno[201].

Salutatemi l'amico Colombo[202] e conservatemi la vostra amicizia

il Vostro Brioschi

14
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 11 Maggio [18]58

Caris.mo Amico

Non ho potuto rispondere prima alla vostra lettera e per una leggiera [*sic*] indisposizione, e perché aspettava notizie recenti dal Tortolini[203]. La prima scomparve, queste non giunsero ancora, per cui vi comunico quello che conosco, cioè quanto abbiamo a pubblicare nel terzo fascicolo[204]. Oltre la continuaz.[ione] della memoria del Jullien[205], vi è una memoria del Tardy sulle derivate ad indice fratto[206]; una del Betti sui covarianti delle forme binarie[207];

---

[198] Dalla consultazione del *Catalogo delle pubblicazioni di Angelo Genocchi* posto in appendice ai *Cenni necrologici di Angelo Genocchi*, redatto da Francesco Siacci («Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino», serie II, t. XXXIX (1889), pp. 463-495) non risulta alcun lavoro di questo tipo scritto da Genocchi.

[199] Cfr. nt. 10, lett. 1.

[200] Il traforo del Cenisio, ovvero del Fréjus, fu il primo grande traforo alpino. Iniziato nel 1857, fu inaugurato il giorno di Natale del 1870.

[201] François Napoléon Marie Moigno (1804-1884).

[202] Cfr. nt. 11, lett. 1.

[203] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[204] È naturalmente il terzo fascicolo degli *Annali* per i quali cfr. nt. 2, lett. 1.

[205] Cfr. nt. 13, lett. 11.

[206] Tra i lavori di Placido Tardy (1816-1914) risulta pubblicato, nel 1858, l'articolo *Sui differenziali a indice qualunque*, «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. I (1858), pp. 135-148.

[207] Per Betti cfr. nt. 1, lett. 1. Il lavoro è: *Sopra i covarianti delle forme binarie*, cfr. nt. 3, lett. 6.

una mia sui covarianti sulle forme a più indeterminate[208]; una del Cremona sulle linee gobbe del terzo ordine[209]; una del Bertrand sopra una formola di Abel[210]. – [Nella Sezione] Rivista [Bibliografica:] – La continuazione dell'articolo Cattaneo[211], la dimostraz.[ione] della formola di interpolaz.[ion]e del Tchebicheff[212]; il vostro articolo sulla memoria del Riemann[213]? Sulla risoluzione delle equazioni del quinto grado[214]? Aspetto da voi di sapere se questo penultimo articolo possa pubblicarsi in questo fascicolo; del Betti si conoscerà quel che ha fatto intorno alle nuove ricerche dell'Hermite[215].

Io ho pure lavorato intorno a questo argomento; ma trovai utile l'abbandonare almeno in parte la strada dell'Hermite, cioè di far uso in luogo delle equazioni modulari di altre equazioni che denominerei del Moltiplicatore. La proprietà principale delle radici di esse fu già enunciata dal Jacobi (Crelle T. 3° pag. 308)[216] non credo che alcuno l'abbia dimostrata; anzi l' Hermite a torto

---

[208] F. Brioschi, *Sui covarianti delle forme a più variabili*, «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. I (1858), pp. 158-163, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. I, pp. 313-319.

[209] Per Cremona cfr. nt. 2, lett. 1. Il lavoro è: *Sulle linee del terz'ordine a doppia curvatura*, «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. I (1858), pp. 164-1742,78-295. Com'è noto, le espressioni "linee (o curve) gobbe", "linee (o curve) a doppia curvatura", "linee (o curve) sghembe" sono equivalenti. In *Opere matematiche* di Luigi Cremona, pubblicate sotto gli auspici della R. Accademia dei Lincei, Ulrico Hoepli, Milano, 1914, vol. I, pp. 39-69.

[210] Joseph Louis François Bertrand (1822-1900), *Note sur une formule d'Abel*, «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. I (1858), pp. 156-157.

[211] Francesco Cattaneo (1811-1873). Cattaneo pubblicò sul t. I degli «Annali di matematica pura ed applicata-Rivista bibliografica» un articolo, bibliografico, *Sopra una memoria del Prof. Ottaviano Fabrizio Mossotti sotto il titolo "Nuova teoria degli stromenti ottici". Osservazioni del Prof. F. Cattaneo*, ripartito in tre pezzi che iniziano rispettivamente con le pagine 48, 120, 184.

[212] Per Tchebicheff cfr. nt. 12, lett. 2. Il lavoro è: F. Brioschi, *Intorno ad una formola d'interpolazione (Tschebicheff, Sur une formule d'Analyse, Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. LIII (1857), p.286)*, «Annali di matematica pura ed applicata-Rivista bibliografica», serie I, t. I (1858), pp. 182-183, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. I, pp. 325-327.

[213] A. Genocchi, *Formole per determinare quanti siano i numeri primi fino ad un dato limite (Riemann, Bericht der Akademie der Wiss. zu Berlin, Novembre 1859)*, «Annali di matematica pura ed applicata-Rivista bibliografica», serie I, t. III (1860) pp. 52-59.

[214] F. Brioschi, *Sulla risoluzione delle equazioni del quinto grado, (Hermite, Sur la résolution de l'équation du cinquième degré, Comptes Rendus, N. 11 Mars, 1858* [per ulteriori indicazioni bibliografiche si veda nt.6, lett. 43]), «Annali di matematica pura ed applicata-Rivista bibliografica», serie I, t. I (1858), pp. 256-259, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. I, pp. 335-341.

[215] Per Hermite cfr. nt. 10, lett. 2. Per quanto riguarda le ricerche dell'Hermite, a cui si riferisce Brioschi, esse sono quelle contenute nell'articolo, del 1858, *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré* (si veda questa Introduzione, pf. 1.1, e la nt. 6, lett. 43).

[216] Per quanto riguarda Jacobi cfr. nt. 6, lett. 1. Il lavoro di cui si parla è: C. G. J. Jacobi, *Notices sur les fonctions elliptiques*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 3 (1828), pp. 192-195, 303-310, 403-404; Bd. 4, pp. 185-193. In *C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke*, cit. nt. 6, lett. 1, t. I, pp. 249-275.

la chiama assai astrusa (Jacobi Opere T. 2° pag. 249-250)[217]. Ecco i valori delle quantità indicate dal Jacobi con $A_0, A_1, A_2, \ldots$

$$A_0 = \frac{\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} q^{n m^2}}{\sum_m q^{m^2}}, \quad A_1 = 2q^{\frac{1}{n}} \frac{\sum_m q^{n m^2+2m}}{\sum_m q^{m^2}}, \quad \ldots \quad A_r = 2q^{\frac{r^2}{n}} \frac{\sum_m q^{n m^2+2rm}}{\sum_m q^{m^2}}.$$

Da questa prima proprietà se ne ricavano altre di molto interesse, e tra esse una risoluz.[ione] delle equazioni del quinto grado analoga a quella dell'Hermite. Se il Betti non intende per ora pubblicare le sue ricerche sulle equazioni modulari[218] io potrei pubblicare queste.

Occupato di questo argomento non ritornai sulla memoria dell'Hermite del giornale di Liouville[219] però mi rimane ancora un dubbio che vi scriverò in seguito.

Vi ringrazio delle osservazioni che mi fate intorno alla troppa concisione alla quale mi sono abituato; avete ragione; ma credetemi che non ho interamente la colpa di ciò. È una conseguenza del poter occupare solo poche ore allo studio, occupato come sono dalle due ore di scuola quotidiane, e da molte altre incombenze.

In questo mese non ebbi giornali o libri nuovi; mi si dice che nel fascicolo di Crelle ora pubblicato trovasi una memoria di Jacobi sulle funzioni Abeliane[220], ma non giunse ancora questo fascicolo alla Biblioteca.

Scrivetemi subito intorno all'articolo sul lavoro del Riemann, per poter decidere come riempire le poche pagine che rimangono.

Conservatevi sano e credetemi l'aff.mo

Brioschi

---

[217] C. G. J. Jacobi, *Über unendliche Reihen, deren Exponenten zugleich in zwei verschiedenen quadratischen Formen enthalten*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 37, pp. 61-94 e 221-254. In *C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke*, cit. nt. 6, lett. 1, t. II, pp. 217-288.

[218] Betti divenuto professore di Algebra all'Università di Pisa, nel 1857, più volte promise, come è ricordato in *Enrico Betti: Teoria della elasticità* (a cura di D. Capecchi, G. Ruta, R. Tazzioli, Benevento, Hevelius2,006, p. 68) di dare alle stampe un trattato di algebra che avrebbe raccolto le sue lezioni universitarie. Il trattato non fu mai pubblicato, né tanto meno risultano editi negli *Annali* articoli del tipo accennato in questa lettera.

[219] Cfr. nt. 3, lett. 12.

[220] C. G. J. Jacobi, *Über die Substitution* $(ax^2+2bx+c)y^2+2(a'x^2+2b'x+c')y+a''x^2+2b''x+c''=0$ *und über die Reduction der Abel'schen Integrale erster Ordnung in die Normalform*, (Aus den hinterlassenen Papieren von C. G. J. Jacobi mitgetheilt durch Herrn F. Richelot), «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 55 (1858), pp. 1-14. In *C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke*, cit. nt. 6, lett. 1, t. II, pp. 363-379.

15
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 12 Maggio [18]58

Caris.mo Amico

Con questa mia riceverete uno stampone della nota del Bertrand[221] della quale vi annunciai solo il titolo non sapendone più in là. Me l'ho fatto mandare dal Tortolini[222] perché in generale è bene che le memorie che pubblichiamo non siano lette prima soltanto da lui. Credo giusta l'operazione del Bertrand; quanto alle notizie storiche sono cose notissime; però leggetele e scrivetemene subito qualche cosa, principalmente se avete a fare qualche osservazione.

Se non avete pronto l'articolo sulla memoria del Riemann[223], potrò empire io le poche pagine che rimangono con una nota sulla risoluz.[ione] delle equazioni di quinto grado[224], e colla dimostrazione del teorema di Jacobi[225] di cui vi dissi. Parmi questa sia assai più semplice di quella dell'Hermite[226].

Vi saluto di fretta

il Vostro aff.mo Brioschi

16
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 5 Giugno [1858][227]

Caris.mo Amico

Ricevo ora due memorie del Prof.e Lebesgue[228] inviatemi da voi. Se avete

---

[221] Cfr. nt. 8, lett. 14.
[222] Cfr. nt. 2, lett. 1.
[223] Cfr. nt. 11, lett. 14.
[224] Cfr. nt. 12, lett. 14.
[225] F. Brioschi, *Dimostrazione di una formola di Jacobi*, «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. I (1858), pp. 117-118, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. I, pp. 309-310. A riguardo, si veda pure la lettera 9.
[226] Per Hermite cfr. nt. 10, lett. 2. Per gli scritti ai quali qui si fa implicitamente riferimento si veda nt. 5, lett. 12.
[227] L'anno si evince dalla pubblicazione della memoria di Kummer, *Über die allgemeinen Reciprocitätsgesetze der Potenzreste*, apparsa nel 1858.
[228] Victor Amédée Lebesgue (1791-1875). Le memorie potrebbero essere: *Démonstration de quelques formules d'un Mémoire de Jacobi*; «Journal de Mathématiques pures et appliquées», t.

occasione di scrivergli ringraziatelo a mio nome, ed inoltre fatemi conoscere il suo indirizzo affinché possa mandargli qualche mio lavoro.

Ho ricevuto in questi giorni il fascicolo di Febbraio dei Monatsberichte di Berlino[229]; esso contiene una memoria di Kummer che ha per titolo "Über die allgemeinen Reciprocitätsgesetze der Potenzrëste"[230]. Se desiderate vederla ve la manderò e potrete tenerla con tutto vostro comodo.

Avrei ora bisogno di una notizia bibliografica che voi mi potrete dare.

Io conosco pochissimo intorno la teoria dei numeri complessi; le uniche letture da me fatte sull'argomento sono le memorie del Kummer stampate nel giornale di Liouville[231] e la vostra[232] pure pubblicata in questo giornale. Vorrei ora formarmi una chiara idea dei numeri ideali; quale fra le posteriori memorie di Kummer mi converrà leggere?

Ieri giunse alla biblioteca la parte 2ª del Vol. 147 della Transactions di Londra[233]; credo sia l'ultimo Vol.e pubblicato. Esso contiene due memorie del Cayley l'una sulle curve piane del terzo ordine, l'altra sulle funzioni simmetriche delle radici di equazioni algebriche[234]. Ieri sera lessi quest'ultima la quale può dirsi un ammasso di tavole (od esempj) con alcune operazioni intorno alle medesime. Queste operazioni sono tutte conseguenze dei teoremi generali da me dati sull'argomento[235], meno una che è di qualche importanza e che sarei desideroso di poter dimostrare. Eccola. Siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le radici della

---

XVI (1854), pp. 289-300; *Note sur le Canon arithmeticus de Jacobi*, «Journal de Mathématiques pures et appliquées», t. XVI (1854), pp. 334-336.

[229] *Monatsberichte der Koeniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.*

[230] Per Kummer cfr. nt. 23, lett. 12. La memoria di E. E. Kummer è *Über die allgemeinen Reciprocitätsgesetze der Potenzreste*, «Monatsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin», 1858, pp. 158-171 e cfr. pure (A. Weil Edited by) E. E. Kummer, *Collected Papers*, cit. in nt. 23, lett. 12, I, pp. 673-687.

[231] E. E. Kummer, *Mémoire sur la théorie des nombres complexes composés de racines de l'unité et de nombres entiers*, «Journal de Mathématiques pures et appliquées», t. XVI (1851), pp. 377-498, confronta pure (A. Weil edited by) E. E. Kummer, *Collected Papers*, cit. in nt. 23, lett. 12, I, pp. 363- 484.

[232] A. Genocchi, *Note sur les nombres complexes*, «Journal de Mathématiques pures et appliquées», t. XIX (1854), pp. 281-288.

[233] Il riferimento è alla rivista *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.*

[234] Per Cayley cfr. nt. 12, lett. 3. Le memorie sono: *A Memoir on Curves of the Third Order*, «Philosophical Transactions of the Royal Society of London», t. CXLVII (1857), pp. 415-446; e *A Memoir on the Symmetric Functions of the Roots of an Equation*, «Philosophical Transactions of the Royal Society of London», t. CXLVII (1857), pp. 489-499. Le due memorie sono inserite in *The Collected Mathematical papers of Arthur Cayley*, cit. in nt. 13, lett. 8, t. II, rispettivamente alle pp. 381-416 e 417-439.

[235] Si veda F. Brioschi, *Sulle funzioni simmetriche delle radici di una equazione*, «Annali di Scienze matematiche e fisiche», t. V (1854), pp. 313-315 e 422-428, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. I, pp. 143-145 e 145-150.

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0.$$

Se calcolassi p. e. la funzione simmetrica $\varphi=\Sigma x_1^3x_2^2x_3$ risulterà, pel mio teorema, quello del Sylvester (Tortolini Agosto 1854)

$$(1)\quad \varphi=Aa_1^2a_4+Ba_1a_2a_3+Ca_1a_5+Da_2a_4+Ea_3^2+Fa_6$$

essendo A, B, ... coefficienti numerici. Ora se si calcolano le funzioni simmetriche:

$$\varphi_1=\Sigma x_1^4x_2x_3,\quad \varphi_2=\Sigma x_1^5x_2,\quad \varphi_3=\Sigma x_1^4x_2^2,\ \Sigma x_1^3x_2^3,\quad \Sigma x_1^6,$$

nelle quali gli indici dei vari termini della (1) sono passati ad esponenti, trovasi che in φ_1 il coeff. di $a_1\ a_2\ a_3$ è A

φ_2 ... $a_1\ a_2\ a_3$ è C
φ_3 ... $a_1\ a_2\ a_3$ è D
φ_4 ... $a_1\ a_2\ a_3$ è E
φ_5 ... $a_1\ a_2\ a_3$ è F

e $a_1\ a_2\ a_3$ è il termine *corrispondente* a φ, cioè gli esponenti sono passati ad indice. È questo un problema di partizione di qualche interesse.

Ho veduto nell'ultimo fascicolo degli Annali del Tortolini un vostro lavoro che può dirsi di fine critica, la vostra catilinaria contro *coloro* che fanno uso di serie divergenti e le vostre citazioni molto a proposito mi sono assai piaciute[236]. Mi pare che quanto dite della memoria del Menabrea[237] non sia completamente esatto; giacché oltre i calcoli dell'Olivero [*sic*][238], se ben mi ricordo il Menabrea ha dato una dimostrazione che ha qualche analogia colla vostra.

Il Tortolini mi lascia al bujo, per cui non so se il fascicolo sarà stato pubblicato il 1° Giugno, e se conteneva il vostro articolo sulla memoria del Riemann[239]. Io gli aveva mandato la dimostrazione del teorema di Jacobi[240] di cui vi scrissi e poco più ... che non v'era molto spazio libero.

---

[236] Per tutto ciò si vedano le considerazioni di Genocchi in: *Di una nota del Barone Plana. Casi particolari del moto dei liquidi*, «Annali di matematica pura ed applicata-Rivista bibliografica», serie I, t. I (1858), pp. 383-396.

[237] Per Menabrea cfr. nt. 15, lett. 3. La vaghezza della citazione non ha permesso di individuare la memoria.

[238] Giovanni Valerio Oliveri (?-?). Nato a Chiusa in provincia di Cuneo. Su di lui si veda la voce biografica a cura di M. T. Navale in C. S. Roero, *La Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino 1848-1998*, cit. in nt. 18, lett. 3, t. II, p. 41.

[239] Cfr. nt. 11, lett. 14.

[240] Cfr. nt. 5, lett. 15.

Datemi presto vostre notizie e credetemi sempre

l'aff.mo Amico Brioschi

Salutatemi gli amici Chiò[241] e Colombo[242].

17
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 21 Giugno [18]58

Caris.mo Amico

Ho tardato d'alcuni giorni il rispondervi, per poter mandarvi questo articolo bibliografico che desidero leggiate ed in seguito spediate a Tortolini[243] se vi pare abbastanza chiaro. Vi mando anche la memoria del Weierstrass[244] perché vediate quali sono le dimostrazioni che ho creduto di cambiare. Infine a questo mio articolo spero manderete voi pure qualche lavoro al Tortolini, almeno l'articolo bibliografico sull'opuscolo del Riemann[245].

I materiali che abbiamo già pel quarto fascicolo sono Continuazione delle memorie del P.e Jullien[246], e Prof. Cremona[247], una memoria del Prof. Codazzi che ha per titolo "Teorica dei moti piccioli di un galleggiante omogeneo"[248], un lavoro del Betti sul risultante di più equaz.[ioni] algebriche a più variabili[249], la continuaz.[ion]e della mia nota sulle equaz.[ion]i del moltiplicatore[250].

L'articolo sul libro del Lamé[251] era lavoro del quale erasi incaricato il Betti; ma che pensò di non fare trovando poco a lodare e molto di criticabile.

Io sono d'accordo con lui circa al giudizio ma non alla conseguenza.

---

[241] Cfr. nt. 10, lett. 1.
[242] Cfr. nt. 11, lett. 1.
[243] Per Tortolini cfr. nt. 2, lett. 1.
[244] Si ricorda che nel lavoro *Sopra alcune proprietà delle funzioni Abeliane*, Brioschi fa riferimento alle "*ingegnose ricerche del Sig. Weierstrass nella teorica delle funzioni Abeliane*". Si vedano a riguardo le note 8 e 10 della lettera 11.
[245] Cfr. nt. 11, lett. 14.
[246] Cfr. nt. 13, lett. 11.
[247] Cfr. nt. 7, lett. 14.
[248] Per Codazzi cfr. nt. 14, lett. 11. Il lavoro è *Teorica dei moti piccioli d'un gallegiante omogeneo*, «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. I (1858), pp. 205-226.
[249] Per Betti cfr. nt. 1, lett. 1, mentre il lavoro è *Sopra l'equazioni algebriche con più incognite*, cit. in nt. 4, lett. 6.
[250] F. Brioschi, *Sulle equazioni del moltiplicatore per la trasformazione delle funzioni ellittiche*, «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. I (1858), pp. 175-177, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. I, pp. 321-324.
[251] Probabilmente si tratta del libro citato in nt. 9, lett. 3.

Il Sac.[erdot]e Janni mandò anche a me con lettera il suo opuscolo;[252] non vi diedi che una rapida scorsa; le dimostrazioni sono oltre modo prolisse ed anche un po' confuse, però parmi che egli conosca abbastanza bene l'argomento. Non gli ho ancora risposto, ma lo farò fra pochi giorni.

18
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 26 Luglio [18]58

Caris.mo Amico

Sebbene anche oggi non possa scrivervi che brevemente, mi sono deciso di farlo per non prolungare di più a rispondervi.

In questo tempo non ho potuto lavorare molto, però ho continuato le ricerche sulla trasformaz.[ione] delle equazioni[253] di cui vi scrissi nell'ultima mia e sono arrivato a determinare n equazioni alle derivate parziali lineari alle quali debbano soddisfare ogni funzione dei coefficienti della trasformata.

Mediante queste equazioni si determinano assai facilmente quelle funzioni, principalmente allorquando siano invarianti o primi coefficienti di covarianti della trasformata. Ho letto una breve nota sull'argomento all'Istituto di Milano Giovedì scorso.

Le novità in fatto di pubblicazioni sono la memoria del Bellavitis sui determinanti[254] la quale suppongo v'avrà mandato; il secondo fascicolo delle Mathemathische Mittheilungen di Raabe[255]. Contiene un lungo articolo sulle proprietà delle funzioni Bernoulliane già considerate dall'Autore nel giornale di Crelle[256]; e sulle funzioni Euleriane ora introdotte per la prima volta. Scrissi una breve notizia bibliografica sull'argomento pel nostro giornale[257].

---

[252] L'opuscolo di Giuseppe Janni reca per titolo *Saggio di una teorica elementare de' determinanti del sacerdote Giuseppe Janni*, Napoli, 1858.

[253] F. Brioschi, *Sulla trasformazione delle equazioni algebriche*, «Giornale del I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti e Biblioteca Italiana», serie I, t. I (1858), pp. 231-233, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. III, pp. 171-175.

[254] Giusto Bellavitis (1803-1880), *Sposizione elementare della teorica dei determinanti*, «Memorie dell'I. R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti», t.VII, parte I (1858), pp. 67-144.

[255] Cfr. nt. 7, lett. 7.

[256] J. L. Raabe, *Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die Jacob-Bernoulli'sche Function*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 42 (1851), pp. 348-367.

[257] F. Brioschi, *Sulle funzioni Bernoulliane ed Euleriane* «Annali di matematica pura ed applicata-Rivista bibliografica», serie I, t. I (1858), pp. 260-263, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. I, pp. 343-347.

L'ultimo volume degli Atti dell'accademia di Napoli contiene varie memorie di Matematica di Padula[258], di Battaglini[259], di Fergola[260]. Ma quella gente coll'ostinarsi a rimanere isolati o col doverlo fare, sono al bujo di cose agli altri notissime. Il Padula p. e. dimostra alcuni teoremi attribuendoli a Steiner[261] ed a Clausen[262]; teoremi che leggonsi nella memoria di Dupin sui corpi galleggianti[263], e furono dimostrati da Bordoni[264]. Il Fergola ha una memoria sullo sviluppo dell'espres.[sione] $\frac{1}{c\,e^x - 1}$, sviluppo, egli dice, non ancora considerato da alcuno. Nella notizia bibliografica della quale vi scrissi sopra essendomi venuto il destro rammassai quel che scrisse Eulero[265] ed il vostro lavoro sull'argomento.

Quindici giorni sono ebbi una lettera dall'Hermite[266] di ringraziamento ai compilatori del giornale pel dono fattogliene; e promette la sua collaborazione. Probabilmente appena avrà tempo mi manderà un lavoro sulle equaz.[ioni] modulari dell'ottavo grado[267].

Voi probabilmente sarete alla fine delle vostre fatiche scolastiche, io ne ho ancora per più di un mese. Io e Betti[268] coltiviamo sempre il progetto del viaggio in Germania, non potreste venirci anche voi?

---

[258] Per Padula cfr. nt. 4, lett. 4. Il lavoro è: *Ricerche sulle superficie curve*, «Memorie della Reale Accademia delle Scienze», Vol. II (1857), pp. 308-314.

[259] Giuseppe Battaglini (1826-1894). L'articolo è: *Sulla partizione de' numeri*, «Memorie della Reale Accademia delle Scienze», Vol. II (1857), pp. 353-363.

[260] Emanuele Fergola (1830-1915). Risultano pubblicati sulle «Memorie della Reale Accademia delle Scienze», Vol. II (1857) i seguenti lavori: *Sopra la condizione per la possibilità dello sviluppo di qualunque funzione in serie ordinata, secondo le potenze ascendenti della variabile sopra un valore costante*; *Ricerca dell'espressione di una derivata qualunque di una funzione, in termini delle derivate delle funzioni inverse*; *Ricerche per esprimere in serie le radici di un'equazione qualunque*, comprese tra le pp. 197-216; *Sopra lo sviluppo della funzione* $\frac{1}{ce^x - 1}$ *e sopra una nuova espressione de' numeri di Giac. Bernoulli*, pp. 315-324.

[261] Jakob Steiner (1796-1863).

[262] Thomas Clausen (1801-1885).

[263] Pierre Charles François Dupin (1784-1873). In una raccolta di lavori di Dupin, dal titolo *Applications de géométrie et de méchanique, à la marine aux ponts et chaussées, etc., pour faire suite aux Développements de géométrie*, Paris, Bachelier, 1822, vi è contenuto il capitolo *De la stabilité des corps flottants*. Forse Brioschi vuole riferirsi proprio a questo saggio di Dupin.

[264] Antonio Bordoni (1788-1860).

[265] Leonhard Euler (1707-1783).

[266] Per Hermite cfr. nt. 10, lett. 2.

[267] C. Hermite, *Sur l'abaissement de l'équation modulare du huitième degré* (*Extrait d'une Lettre adressée à M. Brioschi*), «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. II (1859), pp. 59-61. In *Oeuvres de Charles Hermite*, cit. in nt. 10, lett. 2, t. II, 1908, pp. 83-86.

[268] Cfr. nt. 1, lett. 1.

Scrivetemi che impressione vi fece il lavoro del Bellavitis. Al Prete Janni[269] non ho ancora risposto e voi? State sano e credetemi

l'Aff.mo Amico Brioschi

Mi scordavo dirvi che sebbene con qualche lentezza pure attendo alla monografia sulla teorica dei covarianti e degli invarianti[270]; fate voi altrettanto per quella sui numeri complessi[271]?

19
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 6 Agosto [18]58

Cariss.mo Amico

La dimostrazione del *nuovo* principio di Meccanica del Menabrea[272] è a mio credere inamissibile [*sic*]. La teoria del lavoro applicata a queste prime leggi della meccanica è un controsenso; sebbene oggi se ne faccia uso ed abuso principalmente in Francia: ne fa prova la meccanica del Delaunay[273] la quale non so perché intitolò razionale. Il Lamé qualificò assai bene la teoria del

[269] Cfr. nt. 10, lett. 17.

[270] F. Brioschi, *La teorica dei covarianti e degli invarianti delle forme binarie e le sue principali applicazioni*, (Monografia), «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. I (1858), pp. 296-309, 349-361; serie I, t. II (1859), pp. 82-852,65-277; serie I, t. III (1860), pp. 160-168; serie I, t. IV (1861), pp. 186-194, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. I, pp. 349-414.

[271] Cfr. nt. 9, lett. 13.

[272] Per Menabrea cfr. nt. 15, lett. 3. Il principio da lui enunciato ha la seguente forma: "Quando un corpo elastico è in equilibrio sotto l'azione di forze esterne, il lavoro dovuto all'effetto delle tensioni e delle pressioni dei vincoli che uniscono i vari punti del sistema è minimo". Esso risale al 1858 e fu dato nell'articolo *Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques*, «Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences», t. XLVI (1858), pp. 1056-1060. La dimostrazione di questo principio suscitò molte critiche, un'eco si trova anche, come si può vedere, in questa lettera scritta da Brioschi a Genocchi, in cui Brioschi esprime dei dubbi persino sulla originalità dell'enunciato rimandando all'appendice all'art. 73 delle *Lezioni di Meccanica Razionale* (si veda qui la nota successiva) di Mossotti. Menabrea ne propose una nuova dimostrazione, più rigorosa, in un articolo del 1875 (*Sulla determinazione delle tensioni e delle pressioni ne' sistemi elastici*, «Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei», serie II, t. II (1874-75), pp. 201-220), dove utilizzò un risultato, ottenuto nel 1873 da Carlo Alberto Castigliano (1847-1884), citandolo soltanto in nota. Questo fatto provocò le dimostranze del Castigliano e aprì una nuova fase polemica.

[273] Charles Èugene Delaunay (1816-1872). Il Delaunay pubblicò nel 1856 il *Traité de mécanique rationnelle*, Paris, Masson: Langlois et Leclercq. La seconda edizione venne alla luce l'anno seguente.

Lavoro a proposito di un teorema di Clapeyron[274] nel suo trattato sui corpi elastici pag. 92[275]. Quanto poi alla novità del principio potrete appurarla leggendo l'appendice all'Art.o 73; che forma l'ultimo foglio pubblicato della meccanica di Mossotti. Pare che il Menabrea non conosca questa appendice giacché quanto dice di quest'autore si riferisce piuttosto al P. 73 di quell'opera che alla detta appendice[276]. Secondo me anche la dimostrazione del Mossotti è poco persuadente, ed io credo che sarà così di tutte, volendosi dimostrare come rigorosa una proprietà che non può essere che di approssimazione. Per me paragono questo principio a quello dei minimi quadrati, e sarei contento di renderlo chiaro sotto questo punto di vista. La memoria del prof. Dorna non la conosco; è già pubblicata[277]?

Io oserei dire che il Menabrea avendo di mira di giungere a quel principio ha creduto buono ogni mezzo. Per esempio quella quantità l sembra dapprima la lunghezza del legame, dopo è "l'extension ou l'accourcissement qui a primitivement eprouvé le lien etc." dunque l è già una variazione della lunghezza del legame? Poi supposto vero che: $\sum I\,\delta l = 0$, $I = \varepsilon l$ non deducesi subito $\sum \frac{l}{\varepsilon} I\,\delta I = 0$ senza andar a cercare la confusa idea di lavoro sviluppato per produrre la variazione della *lunghezza l*?

Un'altra pubblicazione di questa specie è la nota letta qualche tempo fa dal Minich[278] all'istituto di Venezia presentando un pacco suggellato che contiene niente meno che la risoluzione *per radicali* di una equazione algebrica di grado qualunque[279]. Vi trascrivo le ultime parole di quella nota "... Ad ogni modo intendeva di decidere *sperimentalmente* sul valore del mio metodo nel tempo

---

[274] Si vuol ricordare che il *Teorema di Clapeyron* è enunciabile sotto la seguente forma: "Il lavoro compiuto dalle forze agenti su una struttura in equilibrio è indipendente dall'ordine con cui sono applicate le forze e vale la metà della somma dei prodotti delle forze per i loro spostamenti finali cioè misurati dopo l'applicazione dell'ultima forza".

[275] Per Lamé cfr. nt. 9, lett. 3. Il trattato di Lamé è: *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Paris, Bachelier, 1852. La seconda edizione fu pubblicata per l'editore Gauthier-Villars nel 1866.

[276] Per Mossotti cfr. nt. 10, lett. 6. L'appendice in questione ha per titolo: *Dimostrazione dell'equazione, citata all'articolo 73, per la determinazione delle pressioni sofferte dai punti d'appoggio d'un sistema* (si cita, p. 404, dalla copia a stampa esistente presso la Biblioteca Universitaria di Napoli. Copia che però presenta il frontespizio e l'indice fatto di pagine litografate. Dal frontespizio si legge: *Lezioni di Meccanica Razionale del Prof.e Ottaviano Fabbrizio* [*sic*] *Mossotti*. Esso non reca alcuna indicazione tipografica).

[277] Alessandro Dorna (1825-1887). Per quanto riguarda il lavoro di Dorna si rimanda alla nota 1 della lettera successiva.

[278] Serafino Raffaele Minich (1808-1883), *Sulla risolubilità generale delle equazioni algebriche*, «Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti», serie III, t. III (1857-1858), pp. 629-636.

[279] Su questo particolare si veda pure M. T. Rivolo, *Ricerche sulla risolvente di Malfatti*, tratto da *Le scienze matematiche nel Veneto dell'Ottocento, atti del terzo seminario di storia delle scienze e delle tecniche nell'Ottocento veneto*, Venezia 1991, Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Venezia, 1994, p. 202.

delle vicine ferie autunnali, di cui potrò pienamente disporre. Ma essendomi giunta nel dì 24 del corrente mese (Giugno) per mezzo del giornale il *Cosmos*[280], la notizia [che] aveva il Chiariss.mo Sig.re Hermite[281] annunziato all'Accademia delle Scienze di Parigi, che un *analista alemanno* gli aveva comunicato una elegante soluzione dell'equazione di quinto grado, mi trovo indotto, qualunque sia l'indole di quella riflessione, a deporre presso questo Istituto in plico suggellato l'esposizione dei principj del mio metodo colla riserva di farlo conoscere al più tardi nella prima sezione del prossimo Novembre, quantunque *la riprova delle cifre numeriche* forse può distruggerne il *fondamento teorico*; poiché resterebbe tuttavia quel documento come una prova del *metodo specioso* onde può essere trattata teoricamente la tesi della risolubilità algebrica delle equazioni d'un grado qualunque elevato."

Non vi pare un capo d'opera, non vi pare ridicola la citazione del geometra alemanno[282] del *Cosmos*. E quel nuovo sinonimo di *specioso ed erroneo* ...

Non so a quale scopo il Bellavitis[283] mi ha mandato un foglietto volante che ha l'aria di una prova di stampa che contiene quella nota del Minich. Probabilmente per mettermi di buon umore.

La monografia sulla teoria dei covarianti[284] fece grandi passi in questi ultimi giorni, e se non si farà di meglio potrò pubblicarne tre o quattro fogli nel venturo fascicolo.

Se è vero quanto si dice qui sembra che il Ministro Lanza[285] sia riuscito a disgustare poco a poco tutti i buoni; si dice che Piria[286] sia assai malcontento e voglia ritirarsi. Ditemene qualche cosa.

Non ho novità scientifiche. Da qualche tempo non mi giungono giornali o nuove memorie.

Voi sarete ora in vacanza, scrivetemi quindi presto e tenetemi al passo della controversia fra Menabrea e Dorna. Vi saluto di cuore.

Salutatemi Chiò[287], l'a.mo Colombo[288]

l'affez.mo Amico Brioschi

---

[280] Il *Cosmos* era un giornale destinato alla divulgazione scientifica fondato nel 1852 dall'abate Moigno (già citato in nt. 12, lett. 13) il quale fondò anche, nel 1862, *Les Mondes*, rivista pure indirizzata verso la divulgazione scientifica.

[281] Cfr. nt. 10, lett. 2.

[282] Il nome del "geometra" o "analista" alemanno corrisponde a quello di Leopold Kronecker per il quale cfr. nt. 7, lett. 1.

[283] Cfr. nt. 2, lett. 18.

[284] Cfr. nt. 18, lett. 18.

[285] Cfr. nt. 17, lett. 11.

[286] Raffaele Piria (1814-1865).

[287] Cfr. nt. 10, lett. 1.

[288] Cfr. nt. 11, lett. 1.

20
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 25 Agosto [18]58

Caris.mo Amico

Voi avete finito ed io sono in pieno lavoro d'esami, però fra otto giorni cioè il 31 corrente sarò al termine di queste noje. Il 1° Settembre andrò a Milano, quindi in campagna fin verso il venti cioè fino al momento di intraprendere il viaggio in Germania. Scrivendomi dopo il 30 corrente indirizzate le lettere Milano – C.da della Spiga – N°1385.

Ho letto l'altro giorno una nota (assai malscritta) che il Prof. Dorna presentò all'Accademia[289] accusando di plagio il Menabrea[290]. Da quanto mi scrivete le dimostrazioni del Dorna sono analoghe a quelle già note del Cournot[291] o meglio del Mossotti[292], ma per me non sono rigorose, e dico appunto che quel principio[293] non può essere che di approssimazione giacché parmi impossibile arrivare allo spezzamento dell'equaz.[ion]e delle velocità virtuali in due senza fare ipotesi di movimenti infinitamente piccoli. Leggerei però volentieri questa memoria del Dorna, se poteste procurarmene una copia senza vostro incomodo mi fareste piacere. Egli mandò all'Istituto di Milano quella specie di protesta ma non la memoria.

Avrete veduto sull'ultimo fascicolo (3°) dello Zeitschrift del Schlömilch[294] un breve articolo di certo Hoppe sull'espress.[ione] delle radici delle equazioni mediante integrali definiti[295]. Credete convenga fare un breve articolo bibliografico sull'argomento richiamando i lavori di Cauchy del T.° 17 giornale

---

[289] Probabilmente si tratta dello scritto di Dorna, a cui Brioschi già ha accennato nella lettera precedente, recante il titolo *Memoria sulle pressioni sopportate dai punti d'appoggio di un sistema equilibrato ed in istato prossimo al moto*, presentata all'Accademia delle Scienze di Torino il 1° Febbraio 1857 e pubblicata in seguito nelle «Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino», serie II, t. XVIII, parte I (1859), pp. 281-318.
[290] Per Menabrea cfr. nt. 15, lett. 3.
[291] Antoine Augustin Cournot (1801-1877).
[292] Cfr. nt. 10, lett. 6.
[293] Cfr. nt. 1, lett. 19.
[294] Cfr. nt. 4, lett. 1.
[295] Reinhold Hoppe (1816-1900). Il lavoro è: *Aufläsung der algebraischen Gleichungen in Form bestimmter Integrale*, «Zeitschrift für Mathematik und Physik», t. III (1858), pp. 173-175.

della Scuola Politecnica[296], di Jacobi del T.° 2° giornale di Crelle[297]? Quest'ultimo cita nelle prime righe della sua memoria, quella [memoria] che Parseval pubblicò nel 1°. Vol. delle Mémoires Présentés[298], e che voi avete citato recentemente. Ora affatto analogamente a quanto fa Jacobi[299] si può dimostrare che supponendo

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) \qquad x_1>x_2>\ldots>x_n$$

in valore assoluto

ed $x_m-n > r > x_{m+1}-n$ si ha

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\cos\alpha x \log f(u+re^{ix})\, f(u+re^{-ix})+i\,\mathrm{sen}\,\alpha x \log\frac{f(u+re^{ix})}{f(u+re^{-ix})}\right\}dx$$

$$(-1)^{\alpha\frac{2(n-m)}{\alpha}-\frac{2}{\alpha r}\sum_{s=m+1}^{n} y_s^{\alpha}}$$

posto $y_s=x_s-u$. Pongo in questa equazione $\alpha=1$, $m=n-1$ e si ha

---

[296] Quasi sicuramente si tratta di *Mémoire sur diverses formules relatives à la théorie des intégrales définies et sur la conversion des différences finies des puissances en intégrales de cette espèce*, «Journal de l'École polytechnique»2,8e cahier, t. XVII (1844), pp. 147-248. In *Ouvres complètes d'Augustin Cauchy*, cit. in nt. 3, lett. 11, pp. 467-567.

[296] C. G. J. Jacobi, *Über den Ausdruck der verschiedenen Wurzeln einer Gleichung durch bestimmte Integrale*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 2 (1827), pp. 1-8. In *C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke*, cit. nt. 6, lett. 1, t. VI, pp. 12-20.

[297] C. G. J. Jacobi, *Über den Ausdruck der verschiedenen Wurzeln einer Gleichung durch bestimmte Integrale*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 2 (1827), pp. 1-8. In *C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke*, cit. nt. 6, lett. 1, t. VI, pp. 12-20.

[298] Marc Antoine Parseval des Chênes (1755-1836). Ufficialmente si conoscono soltanto cinque articoli scritti da Parseval. Essi furono pubblicati nel 1806 nel volume di *Mémoires présentés à l'Académie des Sciences, Lettres et Arts, par divers savans, et lus dans ses assemblées. Sciences mathématiques et physiques. (Savans étrangers)*. I titoli delle cinque memorie sono:

1) Mémoire sur les résolution des équations aux différences partielles linéaires du second ordre, (5 Maggio 1798);
2) Mémoire sur les séries et sur l'integration complète d'une équation aux différences partielles linéaires du second ordre, à coefficents constants, (5 Aprile 1799);
3) Intégration générale et compléte des équations de la propagation du son, l'air étant considéré avec ses trois dimensions, (5 Giugno 1801);
4) Intégration générale et complète de deux équations importantes dans la mécanique de fluides, (16 Agosto 1803);
5) Méthode génerale pour sommer, par le moyen des intégrales définies, la suite donnée par le théoréme de M. Lagrange, au moyen de laquelle il trouve une valeur qui satisfait à une équation algébrique ou transcendente, (7 Maggio 1804).

[299] Per Jacobi cfr. nt. 6, lett. 1.

(1)

$$y_{s_n} = x_{s_n} - n = -r - \frac{r}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \cos x \log f(u+re^{ix}) f(u+re^{-ix}) + i \operatorname{sen} x \log \frac{f(u+re^{ix})}{f(u+re^{-ix})} \right\} dx$$

Ora supponendo

$$f(x)=u-x+\varphi(x)$$

il secondo membro di questa equazione mediante una nota formula di Laplace riducesi all'espressione:

$$\varphi(u)+\frac{1}{2}\frac{d}{du}\varphi^2(u)+\frac{1}{2\cdot 3}\frac{d^2}{du^2}\varphi^3(u)+\ldots$$

quindi risulterebbe:

$$(2) \quad x_n = u+\varphi(u)+\frac{1}{2}\frac{d}{du}\varphi^2(u)+\ldots$$

cioè x_n che è la minima delle radici in valore assoluto verrebbe data dalla formula di Lagrange; solo che per passare dalla (1) alla (2) ho ammesso lo sviluppo:

$$\log(1-X) = -(-X+\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{3}X^3+\ldots)$$

essendo $X = \frac{e^{-ix}}{r}\varphi(u+re^{ix})$. Questa sarà quindi una condizione (forse la stessa del Sig. Frontera[300] che voi citate e che io non conosco); la x_n-u<r non esige la condizione del Parseval che voi riportate potendo r essere qualunque almeno entro certi limiti. Ma quando sussista la condizione superiore la radice che vien data dalla formola di Lagrange è in valore assoluto la minima. È questo già conosciuto? Fatemi il favore d'occuparvene un momento[301].

---

[300] Geronimo Frontera. Egli fu coautore dei fortunati *Eléments de géométrie analytique, ... par H. Sonnet, ... et G. Frontera*, ... Paris, L. Hachette, 1854, dei quali si è potuto rintracciare fin la tredicesima edizione apparsa nel 1914.

[301] Per la risposta di Genocchi si veda la lettera I. Poiché l'argomento "serie di Lagrange" o "formula di Lagrange" ricorrerà in altri punti di queste lettere – in riferimento a una polemica tra Chiò e Menabrea e poi tra Menabrea e Genocchi – si vuole precisare che detta serie era stata esposta da Lagrange nell'opera *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés, avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques* (in *Oeuvres de Lagrange*, publiées par les soins de M. J.-A. Serret et G. Darboux, Paris, Gauthier-Villars, 14 vol., 1867-1892, VIII), *Note XI: Sur les formules d'approximation pour les racines des équations*, dove (p. 276) Lagrange scrive: "*Si α est la plus petite des racines de l'équation u-x+f(x)=0, on aura*

Forse non sapete che il Faa' di Bruno sta pubblicando e stampando un'opera sulla eliminazione[302] egli ne ha mandato i primi fogli a Betti[303] col quale da qualche tempo si è messo in corrispondenza domandandogli ora una dimostraz.[ion]e ora un'altra dei teoremi di Bezout o d'altri sull'eliminazione. Il Betti mi scrive che in quei primi fogli non v'è di nuovo che un teorema comunicato dal Cauchy[304] al Faà di Bruno, per cui parmi che quell'opera sia piuttosto d'altri che sua.

Il Tortolini[305] ha ritardata d'alcuni giorni la pubblicazione del fascicolo 4.° del nostro giornale e non so per qual ragione avendo egli già da tempo tutto il materiale occorrente. Pel fascicolo prossimo abbiamo finora la continuazione della memoria di Geometria del Prof. Cremona[306] circa due fogli di stampa; un articolo bibliografico del Betti sulla memoria del Cauchy sulle funzioni simmetriche[307], e parte della mia monografia[308]. Avete voi in pronto qualche lavoro?

Scrivetemi presto e ditemi dove dovrò dirigervi in seguito le lettere. Salutatemi gli amici Chiò[309] e Colombo[310] e credetemi

l'aff.mo Amico Brioschi

$\alpha^r = u^r + (u^r)f(u) + \left[\frac{(u^r)'f^2(u)}{2}\right]' + \left[\frac{(u^r)'f^3(u)}{2\cdot 3}\right]'' + \ldots$, *r ètant un nombre quelconque positif ou nègatif. Ainsi l'on a, par cette formule, non-seulement la racine α, mais encore une puissance quelconque de la même racine*".

[302] Per Faà di Bruno cfr. nt. 9, lett. 1. Il lavoro di cui si parla è *Théorie générale de l'élimination*, Paris, Leiber et Faraguet, 1859.

[303] Cfr. nt. 1, lett. 1.

[304] Per Cauchy cfr. nt. 4, lett. 5.

[305] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[306] Cfr. nt. 7, lett. 14.

[307] Probabilmente trattasi di E. Betti, *Sopra le funzioni simmetriche delle soluzioni comuni a più equazioni algebriche*, «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. I (1858), pp. 193-204. In *Opere matematiche di Enrico Betti*, cit. in nt. 3, lett. 6, t. I, pp. 163-173.

[308] Cfr. nt. 18, lett. 18.

[309] Cfr. nt. 10, lett. 1.

[310] Cfr. nt. 11, lett. 1.

21
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[?]

18 Settembre 1858

Cariss.mo Amico

Vi ringrazio assai delle memorie del Dorna[311] e della Tesi del Frontera[312].

Come vi scrissi aveva incominciato ad occuparmi di leggere e rileggere i varj lavori sulle espressioni delle radici delle equazioni algebriche per integrali definiti, e sulle analoghe espressioni per la serie di Lagrange[313]; ma gli ultimi giorni di mia dimora in Pavia fui indisposto ed anche obbligato a letto, pel che non potei continuare quelle letture; e dovetti abbandonare per ora il pensiero di un articolo bibliografico giacché domani vado a Novara a raggiungere Betti[314] e ci incamminiamo subito per Zurigo. Io credo che un articolo bibliografico un po' esteso sopra questo argomento sarebbe ora assai utile, quindi potreste farlo voi in queste vacanze, se vi trovate avere con voi i libri necessarj, se no combineremo per quest'inverno.

Ho veduto la nota del Plana[315], egli ne indirizzò una copia al Bordoni[316] sotto fascia, cosa non ordinaria e che prova come egli attacchi importanza alla modifica.

In questi pochi giorni da che mi trovo in campagna mi occupai della monografia[317] e della risoluzione delle equazioni del quinto grado sul quale argomento mi fece ritornare una osservazione fattami dall'Hermite[318] che vedrete nel primo fascicolo del nostro giornale. Scrissi anche un breve articolo sopra una memoria del Sig. Hirst "Sulla superficie d'uguale attrazione" che mandai al Tortolini[319] e che potrà pubblicare nel sesto fascicolo[320].

---

[311] Cfr. nt. 6, lett. 19 e nt. 1, lett. 20.

[312] Per Frontera cfr. nt. 12, lett. 20. Egli fu autore delle *Thèses d'analyse et de mécanique présentées à la Faculté des sciences de Paris... par M. Geronimo Frontera*, Paris, impr. de Bachelier, 1851. Il lavoro comprende due tesi, una di analisi, dal titolo *Sur une formule de M. Cauchy*, un'altra di meccanica *Sur l'attraction des corps en général*.

[313] Per le espressioni delle radici delle equazioni algebriche per integrali definiti si veda nt. 7, lett. 20, mentre per l'aspetto particolare della serie di Lagrange si rimanda alla nt. 13, lett. 20 e alla nt. 7, lett. 24.

[314] Cfr. nt. 1, lett. 1.

[315] Giovanni Antonio Amedeo Plana (1781-1864). La vaghezza della citazione non ha permesso di individuare il titolo della nota del Plana.

[316] Cfr. nt. 12, lett. 18.

[317] Cfr. nt. 18, lett. 18.

[318] Cfr. nt. 10, lett. 2.

[319] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[320] F. Brioschi, *Sulle superfici d'eguale attrazione (Hirst, Note sur les corps qui exercent des attractions égales [sur un point matériel], Comptes Rendus N. 6, [t. XLVII] Août 1858 [pp. 274-*

Avrei anche desiderato si fosse parlato nel nostro giornale del nuovo principio di Meccanica[321] od almeno delle memorie del Dorna, ma forse converrà aspettare quando il Menabrea[322] avrà pubblicato la sua memoria. Che ve ne pare?

Io vi scriverò ancora presto da qualche città della Germania, e vi indicherò dove possiate scrivermi. Conservatevi sano e credetemi l'aff.mo Amico

Brioschi

P.S. se avete qualche commissione a darmi sia per matematici sia per libraj fatelo con tutta la libertà, che spero di potervi servire.

22
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 9 Novembre [18]58

Caris.mo Amico

Da più di otto giorni sono di ritorno dal mio viaggio, ma solo da jeri sono qui stabilmente. Trovai qui una vostra lettera direttami a Berlino, la quale mi venne rimandata dal Borchardt[323] essendo giunta là dopo la nostra partenza. Abbiamo variato tanto l'itinerario che l'estensione del nostro viaggio, cioè in luogo di incominciarlo da Basilea, Carlsrhue etc. lungo il Reno, abbiamo tenuto questa via: Zurigo, Monaco, Lipsia, Dresda, Berlino, Gottinga, Heidelberg, Carlsrhue, Strasbourg, Parigi. A Berlino ci fermammo nove giorni, undici a Parigi, nelle altre città due o tre giorni al più. Abbiamo avuto la fortuna di ritrovare quasi tutti i geometri tedeschi e francesi già di ritorno dai loro viaggi autunnali; soltanto non potemmo trovare Dirichlet[324] a Gottinga, e Liouville[325] a Parigi. A Berlino passammo molte ore con Borchardt, Kronecker[326], Kummer[327],

---

276] – On equally attracting Bodies, Philosophical Magazine, September and October, [t. XVI] (1858) [p. 160 e segg.]), «Annali di matematica pura ed applicata-Rivista bibliografica», serie I, t. I (1858), pp. 379-382, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. II, pp. 1-5. Come si può vedere l'articolo di Thomas Archer Hirst (1830-1892) comparve, nello stesso anno, su due riviste diverse.

[321] Cfr. nt. 1, lett. 19.

[322] Cfr. nt. 15, lett. 3.

[323] Cfr. nt. 6, lett. 2.

[324] Cfr. nt. 8, lett. 4.

[325] Cfr. nt. 14, lett. 8.

[326] Cfr. nt. 7, lett. 1.

[327] Cfr. nt. 23, lett. 12.

Weierstrass[328], conoscemmo anche Arohnold[329], Schellbach[330]. A Gottinga Stern,[331] Riemann[332], Dedekind[333]; ad Heidelberg Hesse[334], Cantor[335]; a Carlsrhue Dienger[336], Clebsch[337]. A Lipsia abbiamo visitato Moebius[338], ed a Dresda il Baltzer[339], e lo Schlömilch[340]. A proposito di quest'ultimo girano in Germania voci poco favorevoli; cioè che buona parte dei suoi lavori principalmente gli *Studi Analitici* siano plagi delle lezioni di Dirichlet, ed anche di Jacobi[341]. Senza dubbio è un uomo che pensa a far danni; giacché alla scuola Politecnica occupa due o tre cattedre; oltre a ciò tiene una specie di collegio per gli studenti di quella scuola, e dà ripetizioni etc. È strano che essendoci fermati questi tre giorni a Dresda egli si schermì di trovarsi con noi, avanti l'ultima mezz'ora, cioè ci accompagnò alla stazione della strada ferrata.

I matematici francesi in generale non ci lasciarono impressioni molto gradite. La maggior parte non lavora per l'amore della Scienza ma per acquistare un posto o l'altro, principalmente quello all'Accademia. Da qui nascono invidia, pettegolezzi etc.

Anche gli uomini che hanno già tutti i posti possibili e, ciò che vale più, anche un posto nella storia della scienza non vanno esenti da simili debolezze. Se vedeste che bambini sono i Poncelet, i Bertrand, i Duhamel, gli Steiner etc! (Quest'ultimo ora dimora a Parigi). Uomini amanti delle Scienze trovammo l'Hermite[342], il Chasles[343], il buon Terquem[344], ed il Lebesgue[345]. Prouhet[346] e Bonnet[347] ci parvero pure onesti uomini. Vorrei essermi ingannato ma temo l'Hermite un affigliato dei Gesuiti. Esso è però l'unico matematico sia francese sia tedesco che mi ha lasciato l'impressione di essere dotato di una intelligenza straordinaria. Non potemmo trovarci con lui che due volte però lungamente ciascuna volta.

---

[328] Cfr. nt. 8, lett. 10.
[329] Siegfried Heinrich Aronhold (1819-1884).
[330] Karl Heinrich Schellbach (1805-1892).
[331] Moritz Abraham Stern (1807-1894).
[332] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866).
[333] Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916).
[334] Cfr. nt. 9, lett. 12.
[335] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918).
[336] Cfr. nt. 8, lett. 6.
[337] Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (1833-1872).
[338] August Ferdinand Möbius (1790-1868).
[339] Cfr. nt. 8, lett. 6.
[340] Cfr. nt. 4, lett. 1.
[341] Cfr. nt. 6, lett. 1.
[342] Cfr. nt. 10, lett. 2.
[343] Michel Chasles (1793- 1880).
[344] Cfr. nt. 13, lett. 2.
[345] Cfr. nt. 2, lett. 16.
[346] Eugène Prouhet (1817-1867).
[347] Cfr. nt. 18, lett. 8.

Il nostro giornale[348] ha al di fuori un credito superiore alla nostra aspettativa, esso è letto tanto in Germania che in Francia. Feci nuovi associati e nuovi collaboratori nel Kronecker, nel Weierstrass, nell'Hesse, nel Lebesgue, nell'Hermite, nel Bonnet. Una breve nota consegnatami dall'Hesse[349] e che tradussi la mandai già al Tortolini[350]; ora ho qui un lavoro del Bonnet di geometria[351].

Avete veduto l'ultimo fascicolo? Sono irritato col Tortolini che non dà ascolto e vuole stampare quelle sue filastrocche senza senso per quanto gli abbia dato consiglio di non farlo. Egli non sa e non comprende un' acca di queste moderne teorie ed è già la terza volta che vuole occuparsene.

E la monografia sui numeri complessi[352]? Essa sarebbe molto ben accolta principalmente in Francia, me ne parlarono varj matematici.

Il Borchardt mi fece conoscere a Berlino un onesto libraio M.r Behr, col quale feci intelligenza per quelle memorie che vorrei in seguito avere col mezzo postale, se credete potete approfittarne.

Scrivetemi presto e datemi notizia dei vostri lavori e della vostra Università.

Noi non abbiamo novità reali, molte immaginarie. Salutatemi Chiò[353], e Colombo[354].

State sano

il Vostro aff.mo Brioschi

23
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 15 Dicembre [18]58

Caris.mo Amico

Voi sarete meravigliato del mio lungo silenzio, ma la assoluta mancanza di novità scientifiche e le molte noje universitarie furono la causa che io protraessi di giorno in giorno il piacere di conversare con voi.

---

[348] Cfr. nt. 2, lett. 1

[349] Probabilmente si tratta della nota di O. Hesse che porta il titolo: *Il determinante di Sylvester ed il risultante di Eulero*, «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. II (1859), pp. 5-8.

[350] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[351] O. Bonnet, *Mémoire sur la figure de la terre considérée comme peu différente d'une sphère*, «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. II (1859), pp. 46-59.

[352] Cfr. nt. 9, lett. 13.

[353] Cfr. nt. 10, lett. 1.

[354] Cfr. nt. 11, lett. 1.

Speravo anche di ricevere il fascicolo del giornale[355] e di potervi così dire qualche cosa del vostro articolo, ma il Tortolini[356] questa volta ci tira per le lunghe.

In questo tempo fui sempre occupato intorno al problema della risoluzione dell'equazione di quinto grado. Il mio scopo era di dimostrare i risultati comunicati dal Kronecker[357] all'Hermite[358] e da questi all'Accademia Francese[359].

L'Hermite medesimo mi aveva spinto a ciò, essendo quella soluzione oscura anche per lui. Ma avendo considerata la quistione forse sotto un punto di vista più generale di Kronecker giunsi a trovare una classe di risolventi (del sesto grado) dell'equaz.[ioni] di quinto grado, una delle quali è appunto quella di Kronecker. Tutte queste risolventi hanno la proprietà che io denomino di Jacobi e sulla quale già mi appoggiai per dimostrare i risultati di Hermite. Cioè indicando con z_1, z_2, ..., z_6 le radici di una qualunque di esse, ed α una radice immaginaria dell'equaz. $x^5=1$, si hanno le tre relazioni:

$$\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}+\ldots+\sqrt{z_6}=\sqrt{5z_1}$$
$$\sqrt{z_2}+\alpha^2\sqrt{z_3}+\alpha^4\sqrt{z_4}+\alpha\sqrt{z_5}+\alpha^3\sqrt{z_6}=0$$
$$\sqrt{z_2}+\alpha^3\sqrt{z_3}+\alpha\sqrt{z_4}+\alpha^4\sqrt{z_5}+\alpha^2\sqrt{z_6}=0.$$

Esse si deducono dalle (2) del mio articolo "Sulla risoluz.[ione] delle equazioni del quinto grado" nel fascicolo 4° del giornale[360].

Ciò che a me pare di maggior importanza si è la semplicità colla quale giunsi a questi risultati; giacché essi hanno origine da un modo particolare di considerare le 120 permutazioni fra cinque quantità radici dell'equaz.[ioni] di quinto grado.

Un altro passo a farsi è la calcolazione effettiva di una almeno di queste risolventi, ma ciò in parte è ancora un desiderio. Mi spiego meglio. Affinché una risolvente di questa classe sia risolvibile per funzioni ellittiche è d'uopo che nei coefficienti della medesima entri una quantità indeterminata, della quale si possa disporre in modo da annullare il coefficiente del secondo termine. (Questa è la condizione più semplice se non l'unica). Ora non ho potuto trovare ancora sei funzioni z_1, z_2, ..., z_6 delle radici dell'equaz.[ione] di quinto grado e di una

---

[355] Cfr. nt. 2, lett. 1.
[356] Cfr. nt. 2, lett. 1.
[357] Cfr. nt. 7, lett. 1.
[358] Cfr. nt. 10, lett. 2.
[359] Si veda: *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré; extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite; par M. L. Kronecker*, «Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences», t. XLVI (1858), pp. 1150-1152. In *Leopold Kronecker's Werke*, cit. in nt. 1, lett. 2, Vierter Band, 1829, pp. 43-47.
[360] Cfr. nt. 12, lett. 14.

quantità indeterminata, tali che i coefficienti dell'equazione di sesto grado che ha per valori le z_1, z_2, ..., z_6 siano funzioni degli invarianti di quella di quinto. Le forme proposte da Kronecker ed anche altre più semplici di cui potrebbesi far uso sono di calcolazione sì lunga e difficile che non v'è a pensarvi.

Quando non si abbia riguardo a quella indeterminata la quistione è assai più facile; ed io credo non priva d'interesse una risolvente che ho calcolato, almeno come primo esempio di risolvente dell'equaz.[ione] di quinto grado. Primo esempio però giovandosi della teoria delle forme, giacché scopersi in questi giorni che il Malfatti fino dal 1771 nel Tomo IV degli atti dell'Accademia di Siena[361] aveva calcolato una risolvente con molta finezza. Le conseguenze che egli ne deduce sono però erronee come ha mostrato il Ruffini[362].

Fino ad ora non ricevetti alcuno dei lavori pel giornale che mi vennero promossi; la colpa è forse mia che non scrissi ancora né a Berlino né a Parigi.

Credo che il Lebesgue manderà a voi una sua memoria[363]. Povero uomo è malaticcio e parmi anche in condizioni finanziarie poco buone; egli mi ha però l'aria d'un buon galantuomo.

E la monografia sui numeri complessi[364] progredisce? Ne ho speranza, vi ripeto che è un desiderio universale.

Come vi dissi non ricevetti né giornali, né Monatsbericht[365], né alcuna novità scientifica, tranne due articoli di Sylvester sulla partizione dei numeri inseriti nel Philosophical Magazine[366]. A questo proposito potreste voi darmi qualche notizia storica intorno alla regola dagli Aritmetici denominata *regula virginum*[367]?

---

[361] Gianfrancesco Malfatti (1731-1807), *De aequationibus quadrato-cubicis dissertatio analitica*, «Atti dell'Accademia delle Scienze di Siena», t. IV (1771), pp. 129-185, in *Gianfrancesco Malfatti, Opere*, Roma, Edizioni Cremonese, 1981, vol. I, pp. 33-91.

[362] Paolo Ruffini (1765-1822).

[363] Per Lebesgue cfr. nt. 2, lett. 16. Probabilmente il lavoro di Lebesgue è: *Dimostrazione dell'irriducibilità dell'equazione formata con le radici primitive dell'unità*, «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. II (1859), pp. 232-238.

[364] Cfr. nt. 9, lett. 13.

[365] Cfr. nt. 3, lett. 16.

[366] Per Sylvester cfr. nt. 3, lett. 1. Gli articoli di Sylvester sono *Note on the equation in numbers of the first degree between any number of variables with positive coefficients* e *On the problem of the virginis, and the general theory of compound partition*, «Philosophical Magazine», t. XVI (1858), rispettivamente alle pp. 369-371 e 371-376. In *The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester*, Cambridge, at the University Press, vol. II, 1908, rispettivamente alle pp. 110-112 e 113-117.

[367] Detta anche *regula cecis*. Con questi nomi s'intende un antico metodo di calcolo che in pratica consiste nel cercare la soluzione, espressa per numeri interi, di un sistema di due equazioni di primo grado in due o più incognite. Il nome deriva dal fatto che i problemi, per i quali si usava questa regola, spesso trattavano di giovani uomini e donne (cioè "vergini") che riuniti ad una festa hanno da risolvere il seguente problema, preso ad esempio: "Considerate 20 persone, giovani uomini e donne, che hanno mangiato insieme per una spesa ammontante a 56 centesimi, sapendo che ogni giovanotto paga 4 centesimi ed ogni giovinetta paga 2 centesimi, si domanda, in

Vi prego di non imitarmi e di scrivermi presto, sarà questa una prova che non avete avuto a male il mio silenzio. Però se domani o dopo ricevo il giornale potrebbe darsi vi scrivessi io ancora.

Vi auguro miglior salute della mia. Salutatemi gli amici Chiò[368] e Colombo[369] e credetemi il

vostro aff.mo Brioschi

Ed il trattato sull'eliminazione[370] è comparso alla luce?

24
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 29 Gennajo [1859][371]

Caris.mo Amico

Il Prof.e Gherardi[372] vi avrà detto le ragioni della mia diminuita alacrità nello scrivervi. Credo le avrete trovate buone, e vorrei sapervi d'accordo con me intorno ad esse. Fui anche assente da Pavia varie volte avendo lasciato per un mese la mia famiglia a Milano, per cui sebbene affatto libero dalle occupazioni Universitarie ho lavorato pochissimo, per non dir nulla. Ne vedrete l'effetto nel prossimo fascicolo del giornale[373]; esso non conterrà di mio che un breve articolo bibliografico sopra una memoria di Richelot nella teoria dei massimi e dei minimi[374].

Nell'ultima vostra lettera mi domandavate conto di due lavori che mi era proposto di fare, cioè sulla Serie di Lagrange, e sulla questione Dorna[375] – Menabrea[376]. Parmi che il primo argomento sotto il punto di vista di cui vi ho

---

particolare, quanti giovanotti e quante giovinette sono presenti alla festa." (La soluzione è 8 giovanotti e 12 giovanette).

[368] Cfr. nt. 10, lett. 1.

[369] Cfr. nt. 11, lett. 1.

[370] Cfr. nt. 14, lett. 20.

[371] L'assegnazione di questa lettera all'anno 1959 è dovuta al riferimento che al suo interno si fa della "questione Dorna Menabrea" che ampliamente se ne parla nelle lettere del 1858.

[372] Silvestro Gherardi (1802-1979).

[373] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[374] F. Brioschi, *Dei criteri per distinguere i massimi dai minimi valori di una funzione* (*Richelot, Bemerkungen zur théorie der maxima und minima, Altona, 1858*), «Annali di matematica pura ed applicata-Rivista bibliografica», serie I, t. II (1859), pp. 61-64, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. II, pp. 7-10. Vi è da precisare che l'articolo di Friedrich Julius Richelot (1808-1875) era apparso sulla rivista «Astronomiche Nachrichten», t. XLVIII (1858), pp. 273-286.

[375] Cfr. nt. 6, lett. 19.

[376] Cfr. nt. 15, lett. 3.

scritto meriti sempre d'essere trattato per cui se non credete di farlo voi me ne occuperò presto[377]. Quanto alla seconda questione mi pare inutile il parlarne se il Menabrea si è dato per vinto ritirando il manoscritto. Su questo sentirò qual'è il vostro parere; ma dico il vero che anche dopo aver parlato a lungo con Mossotti[378] credo quest'argomento assai difficile.

---

[377] Scorrendo l'*Indice per ordine cronologico delle memorie contenute nelle «Opere Matematiche di Francesco Brioschi»*, non risulta che Brioschi abbia scritto un articolo su questo argomento. Invece Genocchi si interessò, poi, alla questione pubblicando l'articolo *Su d'una controversia intorno alla Serie di Lagrange*, «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», t. 8 (1872), pp. 18-31. Intorno alla "serie di Lagrange", per la quale si veda nt. 13, lett. 20, è forse il caso di specificare più estesamente i termini della polemica che Chiò ebbe con Menabrea. Chiò era riuscito a trovare due controesempi all'enunciato generale di Lagrange, riportato nella nt. 13, lett. 20: si trattava di due equazioni numeriche le cui radici erano tutte quante reali e per le quali la corrispondente serie di Lagrange, pur essendo convergente dava, nel primo caso, la quarta delle radici, disposte queste secondo i valori assoluti crescenti, mentre nel secondo caso dava la radice di valore assoluto massimo. Queste osservazioni furono presentate, per essere pubblicate, all'Accademia delle Scienze di Torino nel 1842. Esse non furono ammesse alla pubblicazione, in base ad un rapporto redatto da Menabrea (la commissione era composta da questi e da C. I. Giulio) basato su considerazioni non propriamente pertinenti. Di conseguenza Chiò si decise a sottoporre il suo lavoro all'Académie des Sciences di Parigi, ricevendone un parere pienamente favorevole da Cauchy e Binet (cfr. Cauchy et Binet, *Rapport sur une mèmoire qui a été presenté à l'Académie des Sciences de Paris par Chiò*, «Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences», Paris, t. XXIII, n. 10, 7 Sept. 1846). La memoria di Chiò dal titolo: *Recherches sur la série de Lagrange* fu pubblicata divisa in due parti: *Prèmiere Mémoire*, «Mémoire presentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France, Sciences Mathématiques et Physiques»2,, 12, 1854, pp. 340-423; *Second Mémoire*, *ibidem*, pp. 423-468. Alla morte di Chiò, nel 1871 la polemica con Menabrea proseguì per l'interposizione di Genocchi, il quale nel redigere le *Notizie intorno alla vita e agli scritti di Felice Chiò*, «Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche», 4 (1871), pp. 363-380, (questo scritto fu accompagnato dalla seguente appendice: B. Boncompagni, *Catalogo dei lavori di Felice Chiò*, *ibidem*, pp. 381-400), ricordò la vicenda trascorsa. Ciò indusse Menabrea a riaccendere la polemica con l'articolo: *Intorno ad uno scritto del sig. Prof. Angelo Genocchi. Lettera del Conte Luigi Federigo Menabrea a D. B. Boncompagni*, «Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche», t. V (agosto 1872), pp. 301-305. Seguirono poi due risposte di Genocchi, l'una dal titolo: *Intorno ad una lettera del sig. Conte L. F. Menabrea. Appunti di Angelo Genocchi*, «Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche», t. 5 (1872), pp. 535- 542, l'altra dal titolo: *Di una controversia intorno alla serie di Lagrange*, «Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino», t. 8 (1872), pp. 18-31. L'ulteriore replica di Menabrea rappresentata da *Un'ultima lettera sulle peripezie della serie di Lagrange in risposta al prof. Angelo Genocchi per L. F. Menabrea a D. B. Boncompagni*, «Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche», t. 6 (1873), pp. 435-457, fu seguita dalla pubblicazione di Genocchi *Breve risposta al sig. Conte L. F. Menabrea*, *ibidem*, t. 6 (1873), pp. 530-532. Intorno alla vicenda si scrisse ancora sui «Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences», in cui si trovano i seguenti articoli: L. F. Menabrea, *Note sur l'identité des formules données par Cauchy pour déterminer les conditions de convergence de la série de Lagrange, avec celles qui ont été établies par Lagrange lui-même*, t. 77 (1873), pp. 1358-1361; A. Genocchi, *Observations relatives à une note précédente de M. Menabrea, concernant la série de Lagrange*, t. 77 (1873), pp. 1541-1544.

[378] Cfr. nt. 10, lett. 6.

Meno alcuni fascicoli del giornale di Liouville[379] del resto non ricevetti in questi ultimi due mesi alcuna nuova pubblicazione. Avrete veduto che il Bienaymé[380] vi ha tradotto dal russo una memoria di Tchebichef[381]; mi pare non valesse la pena essendo la sua analisi per tre quarti composta di cose note. Ma in Francia si ha del Tchebischef una stima secondo me esagerata; il Bertrand[382] arrivò fino a dirmi che egli lo crede il primo matematico Europeo. Ciò principalmente per abbassare l'Hermite[383] il quale come già vi dissi è poco ben veduto.

Avrete ricevuto una copia del mio lavoro sulla equaz.[ion]e di quinto grado[384] ed una credo ne avrà ricevuto Chiò[385].

Il libro di Faà di Bruno[386] è pubblicato. Betti[387] mi scrisse averlo veduto, e si lamentava di alcune sue dimostrazioni introdotte senza citazione d'autore, ma non so se sia vendibile.

Addio scrivetemi presto; salutatemi gli amici Chiò e Colombo[388] e credetemi

il Vostro aff.mo Brioschi

25
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 24 Febbraio [18]59

Caris.mo Amico

Il latore di questa lettera è il giovane Cairoli[389], già uno de' migliori miei scolari ora dottore in Matematica e cultore di questa scienza. Egli è naturale che venendo egli costì per alcuni giorni desideri di conoscervi, ed io colgo anche

---

[379] Cfr. nt. 14, lett. 8.
[380] Irénée Jules Bienaymé (1796- 1878).
[381] Per Tchebichef cfr. nt. 12, lett. 2. La memoria è: *Sur les fractions continues (Traduit par Bienaymé)*, «Journal de Mathématiques pures et appliquées», serie II, t. III (1858), pp. 289-323.
[382] Cfr. nt. 8, lett. 14.
[383] Cfr. nt. 10, lett. 2.
[384] Cfr. nt. 12, lett. 14.
[385] Cfr. nt. 10, lett. 1.
[386] Si tratta probabilmente del libro citato in nt. 14, lett. 20.
[387] Cfr. nt. 1, lett. 1.
[388] Cfr. nt. 11, lett. 1.
[389] Luigi Cairoli (1838-1860), uno dei fratelli eroi del Risorgimento italiano. A lui appartengono la maggior parte, costituita da appunti di introduzione al calcolo sublime, geometria, idrometria e geodesia, dei "quaderni di appunti e calcolo" conservati nell'*Archivio Brioschi*, secondo quanto è scritto in *Francesco Brioschi e il suo tempo (1824-1897), II, Inventari*, a cura di C. Brunati, D. Franchetti, P. Papagna, P Pozzi, Milano, Franco Angeli2,000, p. 49.

volentieri l'occasione di una persona fidata per ripetervi in iscritto ciò che il Prof.e Gherardi[390] dovrebbe averti [*sic*] detto a voce; cioè che non abbiate a male che vi scrivo rado e lettere brevi e senza importanza; giacché ciò dipende dallo stato del mio animo che voi potrete facilmente immaginare agitatissimo in questi ultimi tempi.

E benché sia pieno di fiducia nell'esito degli avvenimenti che io credo e spero prossimi, non posso a meno di andare in traccia sia nei pochi giornali che sfuggono alla vigilanza della polizia Austriaca, sia nelle lettere private, di argomenti che confortino vieppiù questa mia fiducia.

Il fatto è che mi è impossibile lavorare con intensità, leggo qualche cosa, ho incominciato a far qualche tentativo sulla risoluzione delle equazioni di settimo grado, qualche paragrafo della monografia[391], ma il tutto con poca lena e con molta distrazione.

Bramerei conoscere se dividete le mie speranze, tanto più che voi potrete valutare meglio di me quanto v'è di favorevole e quanto di contrario nella politica estera. Mi pare che qui non si possa essere meglio disposti; avrete udito parlare della dimostrazione straordinaria che ebbe luogo Martedì in Milano in occasione del funerale del giovane Dandolo[392]. L'effervescenza è forte in tutte le classi.

Vi mando in questa occasione due vostri opuscoli l'uno di Cauchy[393] e l'altro del Frontera[394] (avendo fatto compra di queste tesi a Parigi); insieme ad un breve opuscolo di statica che pubblicai al principio di quest'anno; esso è puramente una traccia per gli scolari.

Scrivetemi presto, ed in modo un po' oscuro ditemi qualche cosa sul vostro modo di *giudicare la questione*. Conservatevi sano, salutatemi gli amici Chiò[395] e Colombo[396] l'ultimo dei quali spero veder presto

il vostro

[390] Cfr. nt. 2, lett. 24.
[391] Cfr. nt. 18, lett. 18.
[392] Emilio Dandolo (1830-1859), eroe risorgimentale.
[393] Per Cauchy cfr. nt. 4, lett. 5.
[394] Cfr. nt. 2, lett. 21.
[395] Cfr. nt. 10, lett. 1.
[396] Cfr. nt. 11, lett. 1.

26
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Milano, 12 Marzo [1859]

Caris.moAmico

Credo avrete ricevuto da alcuni giorni una mia lettera ed alcuni opuscoli. Approfitto di un'altra simile occasione per pregarvi di un favore. In questi giorni si sarà presentato al P.re Chiò[397] un giovane[398] con un mio biglietto di visita; esso è uno dei migliori studenti di matematica della nostra Università. Vorrei che glielo raccomandaste a mio nome, affinché lo consigli e lo diriga.

Io mi trovo in Milano da alcuni giorni, domani ritornerò nella *nuova fortezza* di Pavia. Fra pochi giorni vi scriverò ancora.

Conservatevi sano e credetemi

l'aff.mo Amico Brioschi

27
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 15 Marzo [1859]

Caris.mo Amico

Il giovane Cairoli[399] nella speranza d'essere questa volta più fortunato mi ha chiesto qualche riga per voi; ed io lo assecondo volentieri persuaso che troverete in lui un ottimo giovane. Ho ricevuto jeri la vostra lettera che mi ha fatto vivo piacere, tanto più che i giorni scorsi si avevano avuto ragioni (forse non tutte buone) di tristezza.

Ho mandato al Tortolini[400] pel prossimo fascicolo una memoria di geometria di Cremona[401], la continuazione della memoria di Bonnet[402], e poche pagine

---

[397] Cfr. nt. 10, lett. 1.

[398] In base al contenuto della lettera 27 trattasi probabilmente di uno dei due fratelli Cairoli ai quali già si è accennato nella nota 1 della lettera 25.

[399] Cfr. nt. 1, lett. 25.

[400] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[401] Per Cremona cfr. nt. 2, lett. 1. Sugli «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. II (1859), risultano pubblicati i seguenti lavori: *Teoremi sulle linee del terz'ordine a doppia curvatura*, pp. 19-29; *Intorno alla superficie della seconda classe inscritta in una stessa superficie sviluppabile della quarta classe*, pp. 65-81; *Intorno alle coniche inscritte in una stessa*

della mia monografia[403]. Egli ha già un mio articolo bibliografico sull'interpolazione[404] che avrebbe potuto inserire nel primo fascicolo, ma che credette bene di lasciarlo indietro per sostituirvi il prospectus del Poggendorff[405] come fosse cosa nuova. In quell'articolo dimostrava come senza ricorrere alla teoria delle frazioni continue come fa il Tchebicheff[406] od a quella delle forme quadratiche come l'Hermite[407] si possa giungere ad una formola di interpolazione avente le proprietà poste come dati dal Tchebicheff.

Adesso ho qui una lettera del Kronecker[408] intorno alla lettera dell'Hermite pubblicata nell'ultimo fascicolo[409]. Egli mantiene la sua prima opinione che sussista un solo tipo di funzioni di sette lettere aventi trenta valori; e vorrebbe che io avessi ad esporre in un articolo le ragioni alle quali egli crede potersi aggrappare. Ma finora sono persuaso che effettivamente vi siano due distinti tipi, forse però converrà cambiare qualche cosa al modo di caratterizzarli usato dall'Hermite. Questa quistione mi tiene occupato sebbene molto distratto.

In questi giorni avrete ricevuto un'altra mia lettera, nella quale vi pregava di parlare a Chiò[410] in favore di un giovane. Spero l'avrete ricevuta, e che Chiò avrà potuto giovargli.

Addio, conservatevi sano e credetemi

l'aff.mo Brioschi

---

superficie sviluppabile del quart'ordine (e terza classe), pp. 201-207. In *Opere matematiche* di Luigi Cremona, cit. in nt. 7, lett. 14, vol. I, rispettivamente alle pp. 70-81, 82-99, 100-107.

[402] Per Bonnet cfr. nt. 18, lett. 8. Il lavoro è *Mémoire sur la figure de la terre considérée comme peu différente d'une sphère [suite]*, già citato in nt. 29, lett. 22, che fu proseguito in due *tranche* apparse sulla stessa rivista alle pp. 113-131, 180-184.

[403] Cfr. nt. 18, lett. 18.

[404] Questo articolo ha ancora una volta per titolo *Intorno ad una formula di interpolazione (Tschebicheff, Sur les fractions continues, giornale di Liouville, Agosto-Settembre 1858. Hermite, Sur l'interpolation, Comptes Rendus 10 Gennaio 1859)*, «Annali di matematica pura ed applicata-Rivista bibliografica», serie I, t. II (1859), pp.132-134, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. II, pp. 11-14.

[405] Johann Christian Poggendorff (1796-1877). Il *prospectus* è relativo all'opera famosa di Poggendorff *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften*, la cui prima edizione, in due volumi, apparirà, nel 1863, a Lipsia, per l'editore Barth.

[406] Per Tchebichef cfr. nt. 12, lett. 2; per il lavoro, a cui Brioschi fa implicito riferimento, dal titolo *Sur les fractions continues* si veda nt. 11, lett. 24.

[407] Per Hermite cfr. nt. 10, lett. 2. Brioschi si riferisce al lavoro di Hermite dal titolo *Sur l'interpolation*, «Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences», t. XLVIII (1859), pp. 62-67, in *Oeuvres de Charles Hermite*, cit. in nt. 10, lett. 2, t. II, 1908, pp. 87-92.

[408] Per Kronecker cfr. nt. 7, lett. 1. Sugli «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. II (1859), è pubblicato alla pagina 131 il seguente articolo: *Extrait d'une lettre de M. Kronecker a M. Brioschi*. L'articolo, col titolo *Sur la théorie des substitutions-Extrait d'une lettre de M. Kronecker a M. Brioschi* è inserito pure in *Leopold Kronecker's Werke*, cit. in nt. 1, lett. 2, Vierter Band, 1829, pp. 49-52.

[409] *Sur l'abaissement de l'équation modulare du huitième degré (Extrait d'une Lettre adressée à M. Brioschi)*, già citato nella nt. 15, lett. 18.

[410] Cfr. nt. 10, lett. 1.

28
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 9 Aprile [1859]

Caris.mo Amico

Faà di Bruno[411] Cavaliere etc... mi ha assolutamente *voltato l'occhio*, ed io ho dovuto spendere l'ingente somma di franchi otto e mezzo per togliermi la curiosità di leggere il suo trattato sull'eliminazione[412]. Pazienza ancora avessi trovato davvero qualcosa a leggere; ma scorrendo una pagina dopo l'altra in cerca di essa mi sono trovato alla fine del libro accorgendomi di averlo già letto; e rammentandomi di aver letto anche altre cose sull'argomento.

I Tedeschi poi che hanno criticato il mio opuscolo sui determinanti[413] perché, come essi pretendono, alcune citazioni sono di seconda mano; che diranno di questo libro nel quale trovasi soltanto citata la Théorie des équations algébriques di Bezout[414] (della quale opera l'A.[utore] a torto fece pochissimo conto)?

Anche le dimostrazioni sono assai trascurate, basta il citarvi quella di un mio teorema (pag. 74) già dall'Aut.[or]e pubblicata nel giornale di Crelle[415], e la nota 5.a per me inintelligibile.

Voi vedete che io critico come un uomo che ha speso otto franchi; e che ebbe una delusione. Forse rileggendo questo libro avendo principalmente di mira lo scopo dell'Aut.[or]e di *popolarizzare la scienza* me ne troverò più soddisfatto. Quanto all'articolo bibliografico ditemi quel che vi pare convenga meglio di fare.

Spiacemi il sentirvi poco bene in salute, ed affetto da quei maledetti reumatismi i quali pur troppo ho per prova quanto abbattono. Anche la mia salute è poco buona, il che oltre a tutto il rimanente mi toglie ogni lena di studio.

---

[411] Cfr. nt. 9, lett. 1.

[412] Cfr. nt. 14, lett. 20.

[413] Si tratta del lavoro di Brioschi *La teorica dei determinanti ecc.*, si veda nt. 12, lett. 12, il quale ebbe pure una traduzione tedesca: *Theorie der Determinanten und ihre hauptsächlichen Anwendungen*, Berlin, Duncker & Humblot, 1856.

[414] Etienne Bézout (1730-1783). Il libro è: *Théorie générale des équations algébriques*, Paris, Imprimerie de Ph.- D. Pierres, 1779.

[415] A pagina 74 del suo trattato *Théorie générale de l'élimination*, Faà di Bruno ridimostra un "beau théorème" di Brioschi, contenuto nell'articolo di quest'ultimo, avente titolo *Sur une nouvelle proprieté du résultant de deux équations algébriques* «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 53 (1857), pp. 372-376, e aggiunge "mais on trouvera peut-être sa démonstration moins simple que celle-ci. (Voir le Journal de Crelle, tome LIII.)".

A quanto si dice pare che le probabilità del Congresso[416] vadano ogni giorno diminuendo; a che protrarre più in lungo una guerra impossibile ad evitarsi?

Salutatemi Chiò[417] e Colombo[418], scrivetemi presto, prima che non sorgano impedimenti,

l'aff.mo Amico Brioschi

29
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Torino, 29 Giugno [1859?]

Amico Carissimo

Chiò[419] mi disse jeri che voi foste a cercarmi all'Albergo difficilmente mi potrete trovare in casa. Desidererei vedervi; se non vi disturba passare al Ministero mi troverete sempre in libertà dalle 7 alle 11 anti.e.

Credetemi

vostro Aff.mo Brioschi

30
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, il 22 Luglio [18]59

Caris.mo Amico

Il dispaccio elettrico [*sic*, ma leggasi telegramma] contenente i preliminarj della pace[420] mi ha trovato incredulo. Nap.[oleon]e ci aveva abituati a

[416] Brioschi sembra riferirsi alla proposta, avanzata dalla Russia, di indire un congresso, tra grandi potenze europee, per discutere la questione italiana. La proposta ebbe, tra l'altro, l'effetto di mandare a vuoto i tentativi di mediazione inglesi volti ad evitare la guerra, che scoppierà il successivo 29 Aprile, tra Regno di Sardegna e Francia, da una parte, e Austria dall'altra.

[417] Cfr. nt. 10, lett. 1.

[418] Cfr. nt. 11, lett. 1.

[419] Cfr. nt. 10, lett. 1.

[420] È la pace di Villafranca che concluse la Seconda guerra d'indipendenza italiana. Essa seguì all'armistizio, offerto da Napoleone III (1808-1873), imperatore dei francesi, all'imperatore Francesco Giuseppe I (1830-1916) d'Asburgo-Lorena, imperatore d'Austria, per iniziare preliminari di pace, dopo le sconfitte da quest'ultimo subite ad opera degli eserciti francese e piemontese con l'aggiunta di volontari provenienti da ogni parte d'Italia. Con la pace di Villafranca si stabilì che l'Austria avrebbe ceduto la Lombardia a Napoleone III, il quale avrebbe

considerare questa quistione sotto un punto di vista tanto alto e tanto nuovo politicamente parlando; che il far ritorno ad una politica scaltra ma ordinaria è cosa penosa. Eppure noi abbiamo oggi più che mai d'uopo della sua alleanza, e credo che di ciò siasi più persuasi al di qua del Ticino che al di là, dirò meglio a Milano che a Torino. Io spero che il nuovo Ministero non vorrà dar troppo ascolto alle lusinghe che ora darà certamente l'Inghilterra.

Parmi che il nuovo Ministero sia alquanto scolorito; non so se la nomina o la proposiz.[ion]e di Casati[421] abbia per iscopo di introdurre nel Ministero l'elemento lombardo; saremmo assai male rappresentati; tanto più che il nuovo Ministero dovrà promuovere riforme interne a meno che muoja appena firmata la pace.

Io sono a Pavia da 20 giorni, quindi non ho più notizie dirette sulle intenzioni del governo di Milano; credo però per cosa certa che sarà nominata quanto prima una commissione pel riordinamento degli Studj nella Lombardia. Questo potrà essere utile trattandosi di cosa urgente; ma credo che composto il nuovo regno dell'Italia superiore si dovranno iniziare larghe riforme nell'istruzione in generale, e principalmente nella superiore. Varie volte mi scriveste di commissioni incaricate di studiare queste riforme, ma non so se i loro rapporti vennero pubblicati; fatemi il favore di scrivermi in quale stato si trovi questo affare.

Ebbi la vostra ultima lettera direttami a Milano ma non ricevetti la nota di Lebesgue[422] e neppure il fascicolo degli Exercices[423].

Aveva incominciato a studiare un po', ma ora sono nuovamente tutto sossopra e non m'occupo che della lettura di giornali politici.

Non so come il Tortolini[424] dica di non aver ricevuto mie lettere mentre gli scrissi varie volte, ma fra le altre unitamente al vostro articolo bibliografico[425].

Non so se Chiò[426] abbia scritto al Gover.[nator]e Vigliani[427]; io non mi sono presentato. A ciò ha contribuito l'abitudine presa durante il Gov. Aus.[triac]o di non visitare alcun funzionario; ma la ragione principale si è che egli si è

---

potuto, a sua volta, cederla a Vittorio Emanuele II (per il quale si veda nt. 6, lett. 32), cosa che effettivamente avvenne.

[421] Gabrio Casati (1798-1873). Ministro della Pubblica Istruzione dal 24 Luglio 1859 al 15 Gennaio 1860.

[422] Per Lebesgue cfr. nt. 2, lett. 16. L'articolo di Lebesgue è probabilmente quello indicato nella nt. 9, lett. 23.

[423] Si tratta evidentemente di un fascicolo dell'opera del Lebesgue dal titolo: *Exercices d'analyse numérique, extraits, commentaires, et recherches relatifs à l'analyse indéterminée et à la théorie des nombres*, Paris, Leiber et Faraguet, 1859.

[424] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[425] Trattasi probabilmente dell'articolo di Genocchi, *Théorie générale de l'élimination par le Chevalier François Faà de Bruno*, che verrà citato nella nt. 8, lett. 32.

[426] Cfr. nt. 10, lett. 1.

[427] Paolo Onorato Vigliani (1814-1900). L'8 Giugno 1859 viene nominato Luogotenente generale del Re per l'amministrazione della Lombardia. Resta in carica fino al successivo 30 Novembre.

allontanato o mostrò tendenza ad allontanarsi dal partito liberale per avvicinarsi agli uomini della fusione.

Mi spiace sapervi poco bene in salute. Non potrebbe essere opportuna una cura di bagni? Scrivetemi presto

il Vostro Aff.mo Brioschi

Le notizie datemi da Chiò sull'intendente Alasia[428] erano non solo esagerate ma erronee. Io non lo conosco, ma sento qui da tutti farne molti elogi.

31
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 2 Agosto [18]59

Amico Caris.mo

Vi ringrazio d'avermi mandato la prima parte del progetto di legge del 1854[429], e se non vi dispiace dovreste mandarmi anche il rimanente facendomi conoscere le spese che avrete dovuto incontrare. Vedrei ben volentieri anche questo progetto di riorganizzazione degli studj Matematici, ma parmi sarà difficile averlo se non è stampato. Il governo di Milano è intenzionato di nominare una commissione per introdurre riforme negli studj in Lombardia, credo che io rappresenterò in questa commissione la facoltà Matematica, perciò desidero allargare le mie cognizioni sulle riforme o sui tentativi di riforme fatti sin qui in Piemonte. Io credo converrà per ora riformare alcune cose più urgenti e spingere il Ministro[430] per una organizzazione completa. Non so quali intenzioni abbia il nuovo Ministro; abbiamo avuto avviso che egli manda qui a visitare la nostra Università in qualità di Commissario Ministeriale il Prof. Melegari[431]. A quale scopo?

---

[428] Giuseppe Alasia (1820-?). Segretario della Pubblica Istruzione dal 6 Febbraio 1860 al 26 Marzo 1861.

[429] Si tratta del progetto di legge presentato, nel 1854, da Luigi Cibrario (1802-1870), politico e storico del Piemonte sabaudo, in qualità di Ministro della Pubblica Istruzione del Regno di Sardegna dal novembre del 1852 al maggio del 1855 (governo Cavour), al Parlamento sardo. Pur non essendo stato varato come legge, il progetto Cibrario sarà accolto in parte nella legge Casati del 1859 della quale si parlerà qui alla nt. 7, lett. 35.

[430] Si tratta di Gabrio Casati, per il quale cfr. nt. 2, lett. 30.

[431] Probabilmente Luigi Amedeo Melegari (1805-1881).

Tardy[432] ha inoltrato il ricorso per la Cattedra di Calcolo a Genova, mi disse che il suo competitore è Marsano[433], spero che il Ministro non dubiterà sulla scelta.

Ho scritto al Tortolini[434] che io credo inutile il pubblicare un secondo articolo sul libro di Faà di Bruno[435]. Fu l'autore contento del primo?

Se avete notizie che si tratti di far rivivere questo piano di studj Matematici e di applicarlo a tutte le Università del nuovo regno fatemelo conoscere; giacché io farei una corsa a Torino per concretare con voi, Gherardi[436], Chiò[437] una opposizione. Io spero che riusciremo a rompere la camarilla.

Scrivetemi presto e ditemi che uomo è Melegari.

Spero la vostra salute migliori

il Vostro aff.mo Amico
Brioschi

32
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 7 Agosto [1859][438]

Amico Carissimo

Sarà bene mi inviate il restante del progetto 54[439] a Milano, giacché mi recherò in questa città Mercoledì o Giovedì. L'altro jeri ebbimo la prima seduta della commissione, ma a quello che mi si disse a Milano pare che il ministro[440] voglia sostituire a questa commissione una commissione di Piemontesi e Lombardi allargandone il mandato. Credo che nella settimana si conosceranno le intenzioni del Ministero. Mi si dice che il Fava[441] vorrebbe far rivivere il progetto del 54 a cui egli prese parte.

Parmi che in Piemonte la libertà in fatto d'istruzione sia considerata come una utopia; come spiegare altrimenti i decreti (e sono molti) della forza

---

[432] Cfr. nt. 4, lett. 14.
[433] Giambattista Marsano (1824-11892). Dal 1854 era professore di Geometria descrittiva all'Università di Genova.
[434] Cfr. nt. 2, lett. 1.
[435] Per Faà di Bruno cfr. nt. 9, lett. 1. Il libro a cui Brioschi fa riferimento è quello indicato nella nt. 14, lett. 20.
[436] Cfr. nt. 2, lett. 24.
[437] Cfr. nt. 10, lett. 1.
[438] La data si evince dal fatto che il re, Vittorio Emanuele II, il 7 Agosto del 1859 fece visita alla città di Milano, capoluogo della Lombardia, da poco annessa al regno di Sardegna.
[439] A riguardo si veda la nt. 1, lett. 31.
[440] Si tratta di G. Casati, per il quale cfr. nt. 2, lett. 30.
[441] Angelo Fava, Segretario del Ministro alla Pubblica Istruzione Gabrio Casati.

dell'ultimo dell'ex ministro Cadorna[442]. Saprà far meglio il segretario Fava? Giacché credo che Casati non farà che apporre la firma.

Oggi contasi a Milano ricevere il Re[443] con grandissimo entusiasmo. Nella settimana i liberali di Milano daranno un pranzo e qualche altro divertimento a molti Deputati del Parlamento; non è difficile che anch'io arrivi in tempo a farne parte.

Il fascicolo 3° del nostro giornale[444] è pubblicato, esso contiene il vostro articolo sul libro di Faà di Bruno[445]; ma siccome voi m'avete scritto che Tortolini[446] aveva preparato un articolo sul medes.[im]o libro, sapendo che Tortolini fa grazia rade volta dei suoi articoli, ho pensato bene di suggerirgli di non stampare altro articolo bibliografico su quel libro.

Nella prima vostra lettera ditemi che intendete fare nei mesi venturi di vacanza, perché non è improbabile ch'io faccia una corsa a Torino per avere notizie dettagliate su questo famoso piano degli studj Matematici.

Vi auguro miglior salute. Addio

l'aff.mo Amico Brioschi

Fu qui Menabrea[447] il giorno (Venerdì) che io mi trovava a Milano per la prima seduta della Commissione; seppi però che egli non si occupò che di cose militari.

33
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[T0RINO]

Pavia, 14 Dicembre [18]59

Caris.mo Amico

Vi ho spedito questa mattina esemplari del programma delle lezioni che intendo dare quest'anno all'Università. Credo che il Cremona[448] o Menabrea[449]

---

[442] Carlo Cadorna (1809-1891). Ministro della Pubblica Istruzione, dal 16 Dicembre 1848 al 27 Marzo 1849 e, di nuovo, dal 18 Ottobre 1858 al 19 Luglio 1859.

[443] Vittorio Emanuele II di Savoia (1820-1878), Re del Regno di Sardegna, sarà Re d'Italia dal 17 Marzo del 1861.

[444] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[445] Angelo Genocchi, *Théorie générale de l'élimination par le Chevalier François Faà de Bruno*, «Annali di Matematica pura ed applicata-Rivista bibliografica», serie II, t. II (1859), pp. 197-199. Si fa notare che il presente articolo è firmato con la sigla *F. G.* Il libro di Faà di Bruno è citato nella nt. 14, lett. 20.

[446] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[447] Cfr. nt. 15, lett. 3.

[448] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[449] Cfr. nt. 15, lett. 3.

vi avranno detto lo scopo della mia ultima gita a Torino; per quest'anno sono quindi Prof. d'Analisi Superiore[450], e voglio sperare vi resterò.

Forse saprete come la debolezza e la immoralità del Ministero mi abbiano tirato addosso una guerra accanita da parte di quei Professori minacciati di dimissione e da altri loro ottimi colleghi. Le mene di questi tristi m'avevano dapprincipio messo di mal'umore, talché con Sella[451] e Menabrea aveva espresso il desiderio di essere traslocato costì; ma essendo riusciti con bassezze d'ogni specie a farsi accogliere piuttosto favorevolmente dagli studenti (checché l'Unione dica del trionfo di Codazza)[452], stimarono giunto il momento opportuno incominciare l'offesa, sempre però nascostamente e con mezzi subdoli.

Da oggi ho deciso di accettare il guanto, a ciò mi spinge anche quanto vi ha di meglio in fatto di liberali in Pavia. Ho accettato di farmi promotore di un circolo liberale elettorale, di appartenere ad un comitato per l'emigrazione, alla redazione di un giornale etc., cose tutte alle quali ripugnavo per meglio attendere agli studj. State certo che fra poco la verità verrà a galla; se accadrà qualche scandalo la colpa deve ricadere sul Ministero.

Ho mandato al Tortolini[453] un capitolo della Monografia[454], una breve nota sulle linee di curvatura della superficie delle onde[455], insieme ad una del Combescure[456], ed un articolo bibliografico sulle equazioni isoperimetriche[457] in occasione di una lettera diretta dal Dirichlet[458] all'Hermite[459]. Per ora non v'è altro materiale pel fasc.o V°, quindi se potete mandate voi pure qualche lavoro.

Non conosco il Prof. Gobbi profondamente, ma mi venne detto molto bene di lui. Egli ebbe a lamentarsi un po' per la nomina dello Schiaparelli[460], ma a me pare a torto. La nostra scuola è in così cattivo stato che rendevasi necessaria la nomina di uno straniero e di uno che avesse avuto agio di vedere i migliori

---

[450] Brioschi ottenne, nel 1859, la cattedra di Analisi Superiore all'Università di Pavia, cattedra che mantenne fino al 1861.

[451] Quintino Sella (1827-1884). Ministro della Pubblica Istruzione dal 18 Maggio al 5 Agosto 1872.

[452] Giovanni Codazza (1816-1877).

[453] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[454] Cfr. nt. 18, lett. 18.

[455] F. Brioschi, *Sulle linee di curvatura della superficie delle onde*, «Annali di matematica pura ed applicata-Rivista bibliografica», serie I, t. II (1859), pp. 135-136, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. II, pp. 215-16.

[456] Per Combescure cfr. nt. 14, lett. 8. Il lavoro è *Sur les lignes de courbure de la surface des ondes*, «Annali di matematica pura ed applicata», serie I, t. II (1859), pp. 278-285.

[457] F. Brioschi, *Sulla riduzione delle equazioni isoperimetriche alla forma canonica*. «Annali di matematica pura ed applicata-Rivista bibliografica», serie I, t. II (1859), pp. 333-335, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. II, pp. 25-28.

[458] Cfr. nt. 8, lett. 4.

[459] Cfr. nt. 10, lett. 2.

[460] Giovanni Virgilio Schiaparelli (1835-1910).

Geometrj d'Europa. Io non saprei a chi meglio raccomandarlo che al Sella tanto più ora che appartiene al Consiglio Superiore; potreste anche parlargliene voi.

Salutatemi Chiò[461] e credetemi

l'Aff.mo Brioschi

Troverete una scusa dell'aver tardato a rispondervi sulle occupazioni estranee alla scienza.

34
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 3 Aprile [18]60

Caris.mo Amico

Ho ricevuto tutti i calcoli vostri e del Riemann[462] e parmi che il risultato esatto sia il vostro; oltreché preferisco la via che voi seguite sebbene apparentemente più lunga, giacché la determinazione delle costanti non mi sembra cosa tanto ovvia.

Non ho potuto rispondervi prima in causa della morte dell'ottimo Bordoni[463]; sebbene da qualche tempo fossi preparato a questa disgrazia, pure ne provai grandissimo dispiacere – ora poi sono occupato a rivedere i suoi manoscritti affidatimi dalla famiglia. Rinvenni tre memorie di Matematica applicata una sull'equilibrio delle volte, una seconda sulle svolte delle strade ed una terza sulle tegole le quali farò presto pubblicare essendo quasi pronte per la stampa. Le farò precedere da una dettagliata notizia sulla vita e sulle opere dell'illustre autore[464].

A proposito di pubblicazioni voglio comunicarvi un progetto che da alcuni giorni mi occupa. Parmi che ora converrebbe trasportare il luogo di pubblicazione del nostro giornale[465] da Roma in una delle città del nuovo Regno: Non v'ha dubbio che i collaboratori che abbiamo avuti fino ad ora o sono stranieri od appartengono al nuovo Regno; a quale scopo dunque

[461] Cfr. nt. 10, lett. 1.
[462] Cfr. nt. 10, lett. 22.
[463] Cfr. nt. 12, lett. 18.
[464] Le memorie, qui citate, che Brioschi si incarica di pubblicare sono le seguenti: A. Bordoni, *Sull'equilibrio astratto delle volte*, «Memorie dell'Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti», t. IX (1862), pp. 125-142; *Considerazioni sulle svolte delle strade*, «Memorie dell'Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti», t. IX (1862), pp. 143-153; *Sulle tegole ordinarie*, « Il Politecnico. Repertorio mensile di studi applicati alla prosperità e cultura sociale», serie IV, t. I (1866), pp. 138-173.
[465] Cfr. nt. 2, lett. 1.

continuare la pubblicazione a Roma collo svantaggio di ingenti spese postali? Oltre di che io avrei fiducia di poter ottenere dal governo almeno una diminuzione di spese postali, vantaggio di cui gode il giornale di Borchardt[466] in Prussia, anzi ora in tutta la Germania.

Per effettuare questo progetto con buon esito basta secondo me la nostra buona volontà e la scelta del momento opportuno. Da parte vostra non dubito della prima, che ne pensate intorno all'opportunità?

Io farò probabilmente una corsa a Torino verso la fine della settimana ventura dopo Pasqua; voleva venir prima ma aspetto che il Ministero decida intorno alla nomina del successore al Bordoni. Salutatemi gli amici Chiò[467], Gherardi[468] e conservatevi sano.

Credetemi

l'aff.mo Vostro Brioschi

35
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Pavia, 17 Giugno 1860

Cariss.mo Amico

Il prof. Gherardi[469] vi avrà forse detto di come io lo pregassi di aggiungere le mie calde raccomandazioni alle vostre presso il Ministro[470] per ottenere la nomina del Cremona all'Università di Bologna.[471] Con mio grande contento la cosa è riuscita e l'Università di Bologna ha acquistato un eccellente professore, fu fatta una volta almeno giustizia al merito. Ringraziate Gherardi a mio nome.

Vi aveva promesso di scrivervi presto, ma nuove ed imprevedute occupazioni mi impedirono di farlo. Saprete che ora dò anche le lezioni di alta Geodesia in luogo di Contratti[472], al quale vanno [*sic*] affidata la cattedra di fisica vacante per la morte di Belli[473]. Ho creduto opportuno di offrirmi per

---

[466] Cfr. nt. 6, lett. 2.
[467] Cfr. nt. 10, lett. 1.
[468] Cfr. nt. 2, lett. 24.
[469] Cfr. nt. 2, lett. 24.
[470] Terenzio Mamiani della Rovere (1799-1885). Tenne il Ministero della Pubblica Istruzione del Regno di Sardegna dal 20 Gennaio 1860 al 22 Marzo 1861.
[471] Per Cremona cfr. nt. 2, lett. 1. Cremona fu nominato professore di Geometria Superiore dell'Università di Bologna. Su tale punto si vedano pure, in *L'epistolario Cremona-Genocchi (1860-1886)*, a cura di L. Carbone, R. Gatto, F. Palladino, Firenze, Olschki2,001, la lettera 7, di Cremona a Genocchi, e la lettera IV di Genocchi a Cremona.
[472] Luigi Contratti (1819-1867).
[473] Giuseppe Belli (1791-1860).

questo insegnamento sia per tagliare la strada ad alcuni indegni pretendenti al posto di Belli, sia per utilizzare meglio il Contratti. Ho pensato di dare in questo mese e mezzo che rimane a compiere l'anno scolastico la teorica delle carte geografiche colle applicazioni ai principali sistemi di projezione[474]. È un argomento un po' spinoso ma spero di uscirne vincitore.

Le notizie che mi giungono da costì sono alquanto rattristanti riguardo alla pubblica istruzione; pare che si intenda mettere di nuovo tutto in discussione; e sospendere l'applicazione della legge Casati[475], la quale a mio credere contiene errori madornali ma è un passo avanti. Io spero che i Deputati penseranno che votando la sospensione di quella Legge ci lasciano nel caos; ma se il Ministro sostiene il resto della legge, come l'art.o riguardante l'Università di Sassari, non credo difficile l'arrivare a questo deplorevole risultato.

Ebbi una nuova e lunga lettera di Bellavitis[476] alla quale risposi tosto, parmi che egli abbia bisogno del conforto della nostra corrispondenza. La sua lettera conteneva quella che acchiudo per voi.

Anche in mezzo a tante occupazioni scolastiche, lezioni ed esami così detti rigorosi, proseguo i miei studj, ora sono intorno alla monografia[477] che vorrei veder presto finita.

Betti[478] mi scrive esponendomi il suo desiderio che potessimo trovarci assieme queste vacanze qualche giorno per fare qualche nuova combinazione pel giornale[479]; come già vi dissi anch'io credo opportuno questo ritrovo, e sono pronto a recarmi dove meglio v'aggrada.

Ieri ho ricevuto da Mamiani la notizia della mia aggregazione alla Società italiana[480]; spero che quanto prima anche voi ne farete parte, anche Bellavitis

---

[474] Brioschi, ancora professore all'Università di Pavia, si offre a tenere il corso di Geodesia per le ragioni qui esposte. Egli dà comunicazione di questa sua decisione anche a Placido Tardy, in una lettera spedita da Pavia il 12 Giugno del 1860 (Biblioteca dell'Università di Genova, Cassetta Loria).

[475] Per Casati cfr. nt. 2, lett. 30. La Legge Casati del 13 Novembre 1859, che verrà estesa a tutto il Regno d'Italia il 15 Luglio 1877, regolava il rapporto tra l'amministrazione centrale e l'amministrazione locale della scuola e introduceva a livello universitario numerose modifiche. In particolare, la legge prevedeva per Milano l'istituzione della Facoltà di Lettere e Filosofia (Accademia scientifico-letteraria) e dell'Istituto Tecnico Superiore (il futuro Politecnico).

[476] Cfr. nt. 2, lett. 18.

[477] Cfr. nt. 18, lett. 18.

[478] Cfr. nt. 1, lett. 1.

[479] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[480] Si tratta della Società Italiana delle Scienze, detta anche Società dei XL, fondata nel 1785 a Verona da Anton Maria Lorgna (1735-1796). Questa ebbe dapprima sede a Verona, poi, per volere di Napoleone, a Modena, per passare, dal 1807, di nuovo a Verona. Con l'unità d'Italia, fu stabilito che la sede sarebbe stata quella del Presidente, per cui passò successivamente a Pisa, Milano, Napoli e Roma. Nel 1949 essa cambiò il suo nome in quello di Accademia Nazionale dei XL. Sulla sua storia si può consultare G. Penso, *Scienziati italiani e unità d'Italia. Storia dell'Accademia Nazionale dei Quaranta*, Roma, Bardi, 1978.

me ne scrive in proposito. È forse l'unica Accademia Italiana che ha qualche nome in Europa, non sarebbe bene il conservarglielo?

Scrivetemi presto, datemi notizie della vostra salute e dei vostri studj. Salutatemi Chiò[481], Gherardi, e credetemi

l'Aff.mo Amico Brioschi

36*
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[?]

[Torino?,] 21 Marzo [1862?]

Cariss.mo Amico

M'avete scritto in un momento di cattivo umore e ad esso attribuisco il modo ingiusto col quale mi giudicate.

Io non accetto la vostra raccomandazione pel Bruno[482], giacché, come vi dissi Domenica, dal momento che voi non avete difficoltà ad accettare quel posto, non v'ha per me altra nomina possibile.

Quanto poi alla vostra ipotesi che io abbia cangiato avviso nel valutare le mie relazioni col Ministro[483], mi permetterete dirvi che non mi offendo perché assurda. È però doloroso che dagli amici si formino consimili giudizi. Spero vi convincerete presto che avete torto. Un saluto

aff.mo Brioschi

[481] Cfr. nt. 10, lett. 1.

* Carta intestata: *Ministero della Istruzione Pubblica.*

[482] Probabilmente Giuseppe Bruno (1828-1893), dal 1863 professore straordinario di Geometria descrittiva all'Università di Torino. Divenne ordinario nel 1878.

[483] Pasquale Stanislao Mancini (1817-1888). Dal 3 al 31 Marzo 1862 fu Ministro della Pubblica Istruzione.

37
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

[Torino ?,] 28 Maggio [1862][484]

Caris.mo Amico

Domani S. M.[485] firmerà il decreto che vi nomina Prof. di Introduz.[ione] al calcolo in questa Università. La nomina avrà effetto pel venturo anno scolastico.

State sano e credetemi

aff.mo Brioschi

38
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Lunedì sera [1862][486]

Caris.mo Amico

Fui assente e non risposi prima per ciò. Io non so che dica il Rettore e per qual ragione egli ripete uno sproposito dopo che gli feci conoscere essere in errore.

Epperò voi potete benissimo fare una rimostranza al Ministero – probabilmente io non vi sarò più ma gli antecedenti sono in vostro favore ed io li richiamerò a chi deve trattare questo affare.

State sano e credetemi

aff.mo Brioschi

---

[484] La data si evince dal fatto che Genocchi nel 1862 viene nominato, presso l'Università di Torino, reggente la cattedra di "Introduzione al Calcolo" ovvero la cattedra di Algebra complementare e geometria analitica. Si veda a riguardo la lettera XI di Genocchi a Cremona in *L'epistolario Cremona-Genocchi (1860-1886)*, cit. in nt. 3, lett. 35.

[485] Cfr. nt. 6, lett. 32.

[486] La data si evince confrontando il contenuto di questa lettera con la successiva, ovvero quella del 12 Dicembre 1862.

39
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

12 Dice.[mbre] [1862][487]

Cariss.mo Amico

Avete tutte le ragioni e scrivo al Rettore per trovar modo di rimediare al mal fatto. Fra pochi dì cesserò d'essere Segret.[ario] Generale e spero ritornare agli studj.

State sano e credetemi

aff.mo Brioschi

Decr. 21 Luglio 1861[488]

art. 1 (6) A ciascun insegnamento non gratuito, dato ufficialmente da Professori ordinari e straordinari, pel quale il numero degl'iscritti (esclusi gli esonerati da tasse) è inferiore a detta media, si attribuirà ecc.

art. 3 l'importo di essa (*tassa della iscrizione*), al chiudersi d'ogni semestre sarà ripartito per cura del Rettore in concorso coi Presidi delle Facoltà.

40
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Milano, 1° Luglio [1864][489]

Caris.mo Amico

Vi presento con questo mio il D.r Hirst[490] collaboratore del nostro giornale[491] che desidera conoscervi.

---

[487] La data si giustifica con la cessazione di Brioschi dall'incarico di Segretario generale della Pubblica Istruzione avvenuta il 31 Dicembre del 1862. Brioschi aveva assunto tale compito il 7 Giugno del 1861, sostituendo Quintino Sella (per il quale cfr. nt. 4, lett. 33).

[488] Allegato a questa lettera del 12 Dicembre vi è un foglio con su scritto, con diversa grafia, quanto qui riportato.

[489] La data del 1864 è stata determinata in base alla notizia, contenuta nella lettera, della presenza di Hirst in Italia; si veda in *L'epistolario Cremona-Genocchi (1860-1886)*, cit. in nt. 3, lett. 35, la lettera 26 di Cremona a Genocchi dove è scritto: "Si trova qui e si fermerà per qualche tempo l'Hirst, egregio geometra come sapete, e professore nell'università di Londra".

[490] Thomas Archer Hirst (1830-1892).

[491] Cfr. nt. 2, lett. 1.

Mi spiacque non avervi potuto salutare prima della mia partenza da costì, ma quella sera non mi fu possibile essere libero per l'ora che mi avevate stabilito.

Spero che la vostra salute sarà migliore. Salutatemi Chiò[492] e credetemi

l'aff.mo Brioschi

41
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO?]

[Milano ?,] 13 Gennajo [1865][493]

Caris.mo Amico

Io non ho alcuna diretta relazione col ministro della pubblica istruzione[494] per cui non potrei fare a lui la vostra raccomandazione. Però conosco il Segretario Bianchi[495] e parlerò con lui al più presto.

Quanto alla proposta del Cremona[496] non potrei farla per ora giacché fu invitato ad insegnare per quest'anno la meccanica razionale in luogo del Chelini[497] ed ha accettato.

Se sapessi dove abitate sarei venuto a trovarvi. State sano e credetemi

aff.mo Vostro

F. Brioschi

42
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO?]

Milano, 10 Luglio [18]65

Caris.mo Amico

Rispondo subito alla vostra lettera sebbene per ora non possa darvi esatte notizie sulla prima domanda. Il concorso non si chiude che alla fine del mese

[492] Cfr. nt. 10, lett. 1.

[493] La data si giustifica in base al riferimento al "Segretario Bianchi".

[494] Giuseppe Natoli (1815-1867). Ministro della Pubblica Istruzione dal 23 Settembre 1864 al 31 Dicembre 1865.

[495] Nicomede Bianchi (1818-1886), fu Segretario generale del Ministero della Pubblica Istruzione dal 1° Novembre 1864 al 6 Gennaio 1866.

[496] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[497] Nel 1864, Domenico Chelini (sul quale cfr. nt. 17, lett. 8) fu destituito da professore dell'Università di Bologna, dove era straordinario di Meccanica razionale (si veda *L'epistolario Cremona-Genocchi*, cit. in nt. 3, lett. 35, in particolare le lettere 18, 192,72,8 di Cremona a Genocchi e la lettera X di Genocchi a Cremona) per essersi rifiutato di prestare giuramento al nuovo Stato italiano.

per cui la commissione non è nominata, ed io assai probabilmente non ne farò parte avendo espressa la mia disapprovazione al Ministro[498] per avere aperti tanti concorsi a cattedre. Io so di alcuni concorrenti di non molta importanza, ma potrebbe darsi concorresse il Codazzi[499] attualmente professore ad un liceo di Pavia, lo stesso che ottenne una parte di un premio dall'Accademia delle Scienze[500], ed a mio giudizio se concorre dovrebbe avere probabilità di successo.

Se più tardi avrò altre notizie ve le comunicherò, ma anche all'Università di Pavia non se ne sa di più giacché parlai stamani con Casorati[501].

La nota di Jacobi sulla risolvente del sesto grado[502] mi è sfuggita mentre scriveva quel lavoro sulla risolvente del Malfatti[503] benché la conoscessi ed altre volte mi avesse occupato. È questa una delle conseguenze della vita che meno dopo il 63, l'aver cioè perduto in parte la memoria delle cose lette da qualche tempo.

L'operazione del Terquem[504] si riferisce ad un posteriore lavoro del Sylvester pubblicato nel Philosophical Magazine del Novembre 1858 – Note on the equation in numbers of the first degree...[505], ma non so se possa fare al caso citato nella vostra lettera.

Conosco varie pubblicazioni del Sylvester sul teorema di Newton[506]; cioè – A Trilogy – o tre note pubblicate nella Transactions Philosophical della Società Reale[507]; (non so se il volume sia pubblicato, io le ho a parte mandatemi

---

[498] Cfr. nt. 2, lett. 41.

[499] Cfr. nt. 14, lett. 11.

[500] Brioschi si riferisce al premio che Codazzi ottenne nel 1859 dall'Académie des Sciences de Paris per il lavoro dal titolo *Mémoire relatif à l'application des surfaces les unes sur les autres* (pubblicato però solo nel 1883).

[501] Felice Casorati (1835-1890).

[502] Si tratta, molto probabilmente, delle *Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», Bd. 13 (1835), pp. 340-352. In particolare si veda il paragrafo: *Observatio de aequatione sexti gradus, ad quam aequationes quinti gradus revocari possunt*. In *C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke*, cit. in nt. 6, lett. 1, t. III, pp. 269-284.

[503] F. Brioschi, *Sulla risolvente di Malfatti per le equazioni del quinto grado*, «Memorie dell'Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti », t. IX (1863), pp. 215-231, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. II, pp. 39-56.

[504] Cfr. nt. 13, lett. 2.

[505] Per Sylvester cfr. nt. 3, lett. 1. Il titolo completo del lavoro è *Note on the equation in numbers of the first degree between any number of variables with positive coefficients*, cit. in nt. 12, lett. 23.

[506] Per l'enunciato del *Teorema di Newton* si veda nt. 2, lett. 5.

[507] Probabilmente J. J. Sylvester, *Algebraical researches, containing a disquisition on Newton's rule for the discovery of imaginary roots, and an allied rule applicable to a particular class of equations, together with a complete invariantive determination of the character of the roots of the general equation of the fifth degree*, «Philosophical Transactions of the Royal Society of London», t. CLIV (1864), pp. 579-666. Tale lavoro è diviso in tre parti: I. *On Newton's Rule for the Discovery of Imaginary Roots*; II. *On the limit to the number of real roots in equations of the form* $\sum(ax+b)^n$; III. *On the Nature of the Roots of the General Equation of the Fifth Degree*. In

dall'autore), un Syllabus of Lecture delivered at King's College On an elementary proof and generalization of Sir Isaac Newton ...[508]; infine vari articoli nei Comptes Rendus, fra i quali il più concludente mi sembra il più recente letto nella seduta del 19 Giugno 1865 intitolato Sur les limites du nombre des racines réelles des equations algébriques[509];

Pur troppo le occupazioni della mia scuola mi tolgono la possibilità di lavorare come desidererei negli studj di matematica pura; in questi ultimi due anni ho dovuto dedicarmi con lena alle applicazioni, ho dovuto digerire una nuova biblioteca, di letture certamente più facili di quelle alle quali non siamo abituati, ma che però richiede un certo tempo. Oltre che il personale dell'Istituto[510] essendo un po' ristretto devo fare molte lezioni; dal Novembre al Maggio feci nove ore di lezione per settimana sulle costruzioni e sull'idraulica. Ciò vi spieghi come lavorando come forse non mai in vita mia, pure non arrivo a pubblicare, giacché se giungo anche a qualche risultato non trovo il tempo per renderlo presentabile al pubblico. Vi aggiungo anche che varj risultati sulle equazioni del quinto grado che avrei in pronto non li pubblicai prima, perché mi ero fisso di voler pubblicare un libro su questo argomento, cioè una completa monografia sulla risoluzione delle equazioni algebriche del quinto grado.

Non so se e quando potrò effettuare questo progetto; se mi vedeste qui circondato da tabelle ove sto calcolando le varie parti del nuovo porto di Piacenza per esercizio dei miei allievi, dubitereste anche voi; ma io spero sempre di rifarmi matematico.

Conservatemi la vostra amicizia e credetemi

aff.mo vostro
F. Brioschi

The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester (cit. in nt. 12, lett. 23) vol. II, pp. 376-479. Sembra che le tre parti siano state anche pubblicate nel volume *On the real and imaginary roots of algebraical equations: a trilogy* del 1865.

[508] Brioschi avrà ricevuto in dono dallo stesso Sylvester un opuscolo a stampa, di 14 pp., sul cui frontespizio è specificato: *Syllabus of lecture delivered at King's College, London, June 28, 1865*, non recante alcuna nota editoriale, contenente la conferenza di Sylvester dal titolo: *On an elementary proof and generalization of Sir Isaac Newton's hitherto undemonstrated rule for the discovery of imaginary roots by J. J. Sylvester*. Tale lavoro fu pubblicato tra il 1865 e il 1866 su «Proceedings of the London Mathematical Society», t. I, pp. 1-16. In *The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester* (cit. in nt. 12, lett. 23) vol. II, pp. 498-513.

[509] J. J. Sylvester, *Sur les limites du nombre des racines réelles des équations algébriques*, «Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences», t. LX (1865), pp. 1261-1263. In *The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester* (cit. in nt. 12, lett. 23) vol. II, pp. 489-490.

[510] È l'Istituto Tecnico Superiore, poi Politecnico, di Milano.

Ho studiato il vostro interessante lavoro sulle equazioni differenziali dai Fundamenta Nova[511]; appena avrò un momento di quiete vi manderò alcune osservazioni in proposito.

43
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO?]

[Milano,] 21 Sett.[embre] 1865

Caris.mo Amico

Sapeva già della vostra nomina a membro della Commissione pel concorso alla cattedra di Pavia, e sono ben contento di ciò giacché in questi ultimi tempi si ebbero in fatto di concorsi dei brutti scandali. Non v'ha dubbio che pei lavori presentati dai concorrenti il Codazzi[512] è superiore agli altri; quanto mi scrivete del Sacchi[513] è vero, è però anche vero che né lui né il Contratti[514] che pur nominato alla cattedra da lui avuta altre volte come professore supplente, sanno di Geodesia. Potrebbero di più fare della topografia ma non hanno pratica nell'uso degli stromenti ed è perciò che al Sacchi io preferii un ingegnere di Milano. Io lo proposi alla cattedra di Geometria Descrittiva sebbene anche per questa difettosa dal lato del disegno, ma non fu nominato per la ragione che il Ministro[515] non credette aprire qui una sezione che doveva servire come scuola normale pei futuri professori di scienze applicate.

In questo momento sono occupato di matematiche, ma benché lavori molto temo che il tempo concessomi dalle altre occupazioni non basti allo scopo che ho di mira. L'argomento è sempre la risoluzione delle equazioni del quinto grado, e precisamente la *effettiva risoluzione*. Voi sapete che l'Hermite[516] diede questa risoluzione supponendo l'equazione del quinto grado trasformata

---

[511] I *Fundamenta Nova* rappresentano un noto lavoro di Jacobi (sul quale cfr. nt. 6, lett. 1): *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum* auctore D. Carolo Gustavo Jacobo Jacobi, Regiomonti [cioè Königsberg, poi Kaliningrad], sumptibus fratrum Bornträger, 1829. In *C. G. J. Jacobi's gesammelte Werke*, cit. nt. 6, lett. 1, t. I, pp. 49-239. Purtroppo non è stato possibile individuare una pubblicazione di Genocchi che richiamerebbe esplicitamente il lavoro a cui Brioschi qui accenna.
[512] Cfr. nt. 14, lett. 11.
[513] Giuseppe Sacchi (1804-1891).
[514] Cfr. nt. 4, lett. 35.
[515] Cfr. nt. 2, lett. 41.
[516] Cfr. nt. 10, lett. 2.

secondo Jerrard[517]; il Kronecker[518] propose un altro metodo, superiore al primo perché diretto, ma nel quale la soluzione è piuttosto indicata che effettuata; io allegai quest'ultimo metodo nella prima memoria del 58[519], poi accennai alla soluzione effettiva nella memoria sulla risolvente di Malfatti[520]; ed ora sono occupato ad eseguire i calcoli dietro quel concetto. Ottenuta quella soluzione è aperta la via a molte ricerche interessanti.

Fra i risultati ottenuti vi sono alcune equazioni differenziali legate a quelle del vostro lavoro sulle quali vorrei intrattenervi. Vi accennerò per ora una parte della quistione. Jacobi[521] ha mostrato che il moltiplicatore soddisfa ad una equazione differenziale del terzo ordine rispetto a k, nella quale equazione entra il modulo trasformato λ; è ciò qualunque sia l'ordine di trasformazione. Ora siccome esiste una relazione fra n, k, λ, è naturale si domandi come si modifichi quella equazione eliminando il λ. Io non ho mai eseguito questo calcolo nemmanco per le trasformazioni di ordine inferiore; ma per un'altra via sono giunto ad un risultato che mi pare dovrebbe coincidere con quello che si otterrebbe col metodo suddetto. Il risultato è il seguente: il moltiplicatore per una trasformazione d'ordine n primo soddisfa ad una equazione differenziale d'ordine $\frac{n+1}{2}$. Per esempio nella trasformazione di terzo ordine posto: $x=\frac{1}{n}$ si avrebbe:

$$3k'^2\frac{d^2\sqrt{x}}{dk^2}+\frac{1-5k^2}{k}\frac{d\sqrt{z}}{dk}+\sqrt{z}=0$$

così ponendo $z=\frac{\lambda}{k}x$ si avrebbe:

$$3k^2k'^2\frac{d^2\sqrt{z}}{dk^2}+k(4+13k'^2)\frac{d\sqrt{z}}{dk}+\sqrt{z}=0$$

ed altret.[tanto].

---

[517] C. Hermite espone, come si è detto nell'Introduzione, tale metodo nel suo lavoro *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré*, «Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences», t. XLVI (1858), pp. 508-515, in *Oeuvres de Charles Hermite*, cit. in nt. 10, lett. 2, t. II, 1908, pp. 5-12. Si ricorda che, nel 1786, Erland Samuel Bring (1736-1798) aveva ricondotto una generica equazione algebrica di quinto grado ad un'equazione algebrica di quinto grado mancante dei termini in x^4, in x^3 e in x^2. Successivamente, George Birch Jerrard (1804-1863) aveva generalizzato tale metodo per rimuovere i termini in x^{n-1}, in x^{n-2} e in x^{n-3} da una generica equazione algebrica di grado n. Su questo fatto si veda pure l'Introduzione.

[518] Per Kronecker cfr. nt. 7, lett. 1.

[519] F. Brioschi, *Sul metodo di Kronecker per la risoluzione delle equazioni di quinto grado*, «Atti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere», t. I (1858), pp. 275-282, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. III, pp. 177-188.

[520] Cfr. nt. 6, lett. 42.

[521] Cfr. nt. 6, lett. 1.

Spero che durante il concorso di Pavia farete una corsa a Milano e mi verrete a trovare. State sano e credetemi

aff.mo Vostro
F. Brioschi

44
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO?]

Milano2,8 [Dicem]bre [1865?][522]

Caris.mo Amico

Mandate pure le pubblicazioni per l'Istituto Veneto dirette a me, ed io le manderò a Venezia colle pubblicazioni dell'Istituto Lombardo.

La espressione di $\sqrt{x}$ ha molta importanza e dà luogo ad alcuni interessanti risultati nella trasformazione. Mi sono fermato un po' sulle trasformazioni del quinto ordine perché legate alla risoluzione delle equazioni del quinto grado ed ho trovato qualche nuovo punto. Se appena trovo alcune ore libere scriverò già alcune delle cose fatte e le manderò all'Accademia di Napoli per la pubblicazione.

Il vostro metodo per la risoluzione razionale dell'equazione quadratica[523] è buono, ma di difficile applicazione e inapplicabile nel caso mio speciale, non mi ricordo ora per quale ragione ma probabilmente per qualche quantità che si annulla o diventa infinita.

Avete veduto il nuovo lavoro di Hermite[524]? è molto interessante, è una nuova via per la trasformata di Jerrard, ma la condizione è sempre lunga e difficile, talché l'autore si arrestò al primo termine.

---

[522] L'accenno ad un "nuovo lavoro" di Hermite fa pensare che l'anno sia, molto probabilmente, il 1865. È questo infatti l'anno in cui Hermite pubblica *Sur l'équation du cinquième degré*, «Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences», t. LXI (1865), pp. 877-882, 965-972, 1073-1081, in *Oeuvres de Charles Hermite*, cit. in nt. 10, lett. 2, t. II, pp. 347-424, che riprende in particolare il suo lavoro *Sur la résolution de l'équation du cinquième degré* pubblicato nel 1858, per il quale si veda nt. 6, lett. 43.

[523] Probabilmente Brioschi si riferisce al metodo esposto da Genocchi nel suo lavoro *Solution générale de la question pour trouver des nombres rationnels satisfaisant aux deux équations* $x^2+y^2-1=z^2$, $x^2-y^2-1=u^2$, t. X, serie I, pp. 80-85, pubblicato nel 1851 su «Nouvelles Annales de Mathématiques».

[524] Per Hermite cfr. nt. 10, lett. 2. Per quanto riguarda il lavoro qui citato, si veda la nt. 1 di questa lettera.

Una prima ricerca del programma di Geodesia fu senza risultato; perciò non ve lo mandai; ma se lo trovo fra le mie carte adempirò in altro modo alla promessa.

State sano, vi auguro buon anno

aff.mo Vostro
F. Brioschi

45
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO?]

Milano, 7 Sett.[embr]e [1868] [525]

Caris.mo Amico

Capisco perfettamente che vi debba dolere dei ritardi nell'invio dei volumi, o degli esemplari a parte; del minor numero di questi rispetto al vostro diritto etc. ma forse ad alcuno di questi disordini sarebbesi ovviato se m'aveste scritto direttamente.

In ogni modo credo saremo prossimi alla fine; questa tripla ubicazione della Società[526] è impossibile; ed intendo che pel prossimo anno debba cessare. Appena sia prossima a scadere per me la Presidenza dell'Istituto Lombardo, vale a dire sul finire di quest'anno intendo occuparmi seriamente della Società Italiana; farò allora alcune proposte ai miei Colleghi per dare ad essa maggior vita e tentare fors'anco una riunione.

Scrivetemi intanto dove ed in qual modo devo farvi tenere i volumi della Società che non avete ancora ricevuto.

Credetemi con stima ed affezione

vostro
F. Brioschi

[525] Probabilmente l'anno è il 1868, in cui Brioschi assume l'incarico di Presidente della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL, per la quale si veda nt. 12, lett. 35.

[526] È la Società Italiana delle Scienze.

46*
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO?]

Milano, 27 Nov.[embre] [1868][527]

Preg.mo Collega

La Società Italiana[528] vi ha nominato a far parte della Commissione che deve scegliere lo Scienziato Italiano al quale conferire nel corrente anno il premio di Matematiche fondato dal Governo[529]. Come sapete per l'Art. 21 dello Statuto ciascun Commissario non deve conoscere i nomi degli altri tre e giudicare isolatamente. A me questo sistema è sempre parso inapplicabile e l'esperienza dello scorso anno lo ha dimostrato; intendo quindi proporre una modificazione dello Statuto su questo punto; ma intanto, vista l'urgenza, mi assumo fin d'ora, deviando dal disposto di quell'articolo, di farvi conoscere i nomi dei Colleghi, i prof. Betti[530] e lo scrivente; affinché possiate nel più breve tempo porvi d'accordo con essi.

Aggradiate le attenzioni della mia alta stima

aff.mo Vostro
F. Brioschi

P.S.: Se non ho risposto pel Levi[531] ho sperato – era necessario anzitutto che Cremona[532] distruggesse almeno in parte l'oggetto del suo rapporto, stabilendo limiti più precisi agli appunti fatti.

Per non perdere tempo vi faccio anche conoscere quale sarebbe il mio candidato pel premio suddetto; io premierei il Casorati[533] pel suo libro sulle

---

* Carta intestata: *Società Italiana dei XL - Presidenza.*

[527] La lettera è dell'anno 1868 o successiva di uno o due anni.

[528] Cfr. nt. 12, lett. 35.

[529] Per i premi assegnati dalla Società Italiana delle Scienze si veda diffusamente nt. 4, lett. 49.

[530] Cfr. nt. 1, lett. 1.

[531] Donato Levi (1834-1885). Sull' "affare" Levi di cui si fa cenno anche nella successiva lettera, si può vedere *L'epistolario Cremona-Genocchi*, cit. in nt. 3, lett. 35, in particolare ivi nt. 2, lett. 40.

[532] Cfr. nt. 7, lett. 14.

[533] Per Casorati cfr. nt. 4, lett. 42, mentre per il premio attribuitogli cfr. nt. 4, lett. 49.

funzioni complesse[534]. Però se dissentite scrivetemi e vedremo di porci d'accordo. State sano

aff.mo Vostro

F. B.

47
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO?]

Milano, 11 Dicembre [1868] [535]

Cariss.mo Amico

Spero non darete seguito al proposito di una pubblicazione qualsiasi relativa all'affare del Levi[536]. Ne sarei molto dolente, sia perché il Cremona[537] non potrebbe fare che cattiva figura, sia perché non gioverebbe a nessuno. Se come voi dite il Cremona ha battezzato di birbonata la destituzione del Levi, ciò non può essere che considerato relativamente agli altri insegnanti d'Aritmetica; ma non mai in modo assoluto, giacché, vi ripeto, il suo rapporto al Ministero, (e non qualche frase staccata) è favorevolissimo al Levi, e l'atto ministeriale da questo punto di vista è inappuntabile. Or bene, quale sarebbe il risultato pratico della vostra pubblicazione; di mostrare che altri due insegnanti dovevano essere destituiti! ed avete giovato in questo modo al Levi? Fate a mio modo, non occupatevi più di questo affare se non per mio mezzo; e ditemi coscienziosamente ha il Levi continuato a studiare in questi anni? ha qualche lavoro incominciato? potrebbe finirlo presto con qualche nostro ajuto?

Ecco la via che dobbiamo seguire, e seguendola sono sempre rimasto vincitore.

State sano ed amate

l'aff.mo Vostro

[534] F. Casorati, *Teorica delle funzioni di variabili complesse*, Pavia, tipografia Fratelli Fusi, 1868.
[535] Il riferimento, all'interno della lettera, "all'affare del Levi", fa pensare che l'anno sia il 1868.
[536] Cfr. nt. 5, lett. 46.
[537] Cfr. nt. 2, lett. 1.

48
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO?]

Firenze, 27 [Gennaio 1869][538]

Caris.mo Amico

La vostra lettera mi giunse qui e domani parlerò al Ministro[539]. Mi dispiace non aver veduto il lavoro del Levi sulle superfici rigate[540], ma il vostro giudizio mi basta e farò quanto mi chiedete con molto calore.

Appena saprò qualche cosa vi scriverò.

Addio di fretta

aff.mo Vostro
F. Brioschi

49
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO?]

Milano, 16 Luglio [1869][541]

Cariss.mo Amico

La vostra lettera mi ha trovato fortunatamente in Milano e rispondo tosto. È verissimo che mi sono dimenticato di presentare i vostri tre opuscoli all'Istituto[542], ma li ho qui sul tavolo ed oggi rimedierò alla dimenticanza. Rispetto alla soscrizione pel monumento a Cattaneo[543], la colpa non è mia, rammentandomi avere ordinato all'impiegato che raccoglieva le firme che aggiungesse il vostro nome per lire 10 – vedrò oggi come sia nato l'equivoco.

---

[538] La lettera è databile al 1869 tenendo conto, in prima instanza, che la città di Firenze da cui la lettera fu spedita, fu capitale del Regno d'Italia dal 1865 al 1870, e poi del riferimento, per quanto molto vago, a Donato Levi intorno al quale si veda *L'epistolario Cremona-Genocchi*, cit. in nt. 3, lett. 35, in particolare le lettere numero 58 di Cremona a Genocchi e numero XXXII di Genocchi a Cremona. Inoltre, potrebbe essere il 27 del mese di Gennaio. Brioschi avrebbe scritto solo 27, come 27° giorno del nuovo anno.

[539] Probabilmente trattasi di Emilio Broglio, Ministro della Pubblica Istruzione dal 7 Ottobre 1867 al 13 Maggio 1869.

[540] Per Donato Levi cfr. nt. 5, lett. 46. Il lavoro è: *Di alcune proprieta delle superficie rigate: dissertazione e tesi presentate da Levi Donato[...] pel concorso ad un posto di dottore aggregato nella r. Università di Torino il 3 dicembre 1866*, Torino, Tip. italiana, 1866.

[541] Il contenuto della lettera lascia intendere che l'anno sia il 1869.

[542] Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.

[543] Si tratta della sottoscrizione aperta per un monumento in onore di Carlo Cattaneo (1801-1869). A riguardo si veda pure la lettera di Cremona a Genocchi del 18 Giugno 1869 che si trova in *L'epistolario Cremona-Genocchi*, cit. in nt. 3, lett. 35.

Vengo infine agli appunti che mi fate relativamente ai rapporti pei premi[544]. È verissimo che le firme apposte a quei rapporti è in contraddizione con un articolo dello Statuto; ma io ho dichiarato a voi come agli altri commissari che quell'articolo lo credeva inapplicabile, e che in ogni modo io non intendeva di apporre la mia firma a rapporti non scritti da me come aveva fatto il Matteucci nello scorso anno. Io intendo quindi che per lo innanzi, (ed in una prossima circolare lo proporrò ai Colleghi), i rapporti siano formulati dalle Commissioni alle quali la Società affida l'incarico della scelta dello scienziato italiano o straniero a premiarsi, e che i rapporti stessi siano fatti conoscere ai premiati.

Scrissi sopra al *propongono* del secondo rapporto che non vale la pena di fermarvisi; ma rispetto al rapporto pel premio Matteucci io credo che le vostre osservazioni siano ancora benigne limitandosi alla forma. V'assicuro che al ricevere quella relazione mi sentii cascare le braccia, pensando che il più

---

[544] Con Regio Decreto del 13 Ottobre 1863 erano stati istituiti due premi, consistenti ciascuno in una medaglia al valore, dell'importo di lire 400, da assegnare annualmente agli autori delle migliori memorie italiane, l'una riguardante le matematiche, l'altra le scienze fisiche e naturali. A conferire detti premi era stata incaricata la Società Italiana delle Scienze. A questi premi veniva ad aggiungersi un altro per la fisica, istituito da Carlo Matteucci (1811-1868) con una sua donazione e disciplinato dal Regio Decreto del 10 Luglio 1870, pur esso assegnato ad opera della Società Italiana delle Scienze. In relazione al contenuto di questa lettera di Brioschi (Presidente della Società) si può vedere che alla relazione stilata dal Segretario della Società, Pietro Domenico Marianini (pubblicata nelle *Memorie della Società Italiana delle Scienze*, serie III, vol. II (1864-1876), pp. XIII-XVIII), vengono allegati, trascritti, i rapporti delle commissioni nominate per l'assegnazione dei premi. I rapporti risultano elaborati collettivamente e si chiudono con la frase *seguono le firme* raccolta tra parentesi tonde. Nel 1869 il premio per la matematica fu assegnato a Felice Casorati per il suo volume *Teorica delle funzioni di variabile complessa* (cfr. nt. 8, lett. 46). Sul rapporto della commissione per il premio di fisica, che si andava a conferire, si concentrano particolarmente le critiche di Genocchi. In effetti la commissione dichiara di assegnare il premio a E. Helmholtz (dove la E. sta sicuramente per l'iniziale del nome Ermanno, traduzione italiana di Hermann) e non utilizza quindi la più corretta forma Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894). Per comprendere meglio le osservazioni di Genocchi vale la pena di riportare, inoltre, la parte rimanente del rapporto:

"La ragione di tale proposta è nei lavori sull'acustica fatti in questi ultimi tempi da quell'eminente scienziato; lavori che grandemente migliorano quella parte della fisica, nella parte teorica, nella parte sperimentale, e nelle sue relazioni con la fisiologia, e con quella parte della musica alla quale si riferisce quell'insieme di regole, generalmente empiriche, di cui ora si compone ordinariamente un trattato di armonia.

La Commissione crede altresì che la nostra Società debba prendere questa occasione, del conferimento di quella medaglia, per onorare in quel celebre fisico alemanno anche l'autore di non pochi pregevolissimi lavori; tra i quali è specialmente da rammentarsi quello che già può dirsi classico, *sulla conservazione delle forze*, e che certamente ebbe una grande influenza sullo sviluppo di quelle moderne teorie, a cui ora è affidato il progresso della fisica, e nelle quali già da molti anni primeggia la teoria dinamica del calore.

La Commissione ha fiducia di avere con le sue proposte ben soddisfatto all'incarico che dalla nostra Società gli fu affidato".

Più o meno queste stesse lamentele Genocchi le presenta a Cremona in una lettera spedita da Torino il 15 Luglio 1869 e per la quale si veda *L'epistolario Cremona-Genocchi*, cit. in nt. 3, lett. 35, lettera XXXII.

distinto fisico d'Italia non aveva saputo trovare niente di meglio a dire intorno ai lavori colossali dell'Helmholtz. Ciò che posso però dirvi è che la lettera per l'autore non è partita col nome male scritto e cogli errori da voi accennati; e se ciò avvenne pel rapporto comunicato ai soci, vi fu perché ne affidai la cura al Segretario supponendo che egli, figlio di un illustre fisico, avrebbe almeno modificato il primo.

Voi avete tutte le ragioni di punzecchiare me dovendo io esser responsabile; ma se sapeste quante lettere mi hanno costato quei tre meschini rapporti giunti sì tardi, forse trovereste che da mia parte non ho trascurato quanto devo alla Società.

Confermatemi la vostra amicizia e credetemi sempre

aff.mo Vostro
F. Brioschi

50
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO?]

Milano, 11 Nov.[embre] [1869][545]

Cariss.mo Amico

Ho scritto di nuovo per i volumi della Società Italiana[546]; spero con migliore risultato. In breve però tutto questo disordine sarà finito.

Fate come credete meglio rispetto alle citazioni di cui mi parlate. Ora io sono ritornato alla teoria delle equazioni e lavoro intorno quelle del settimo grado. Ma avrei bisogno di quiete e di poter dedicarvi maggior tempo. Ho trovato un teorema sulle sostituzioni corrispondenti ad un numero primo di lettere[547], che mi pare abbia una certa importanza. Indicando con n il numero di lettere (n numero primo), si può sempre formare una funzione ciclica della medesima per la quale il numero dei valori è:

$$N = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \cdot (n-2)}{\frac{n+1}{2}}$$

[545] Il riferimento, contenuto nella lettera, all'articolo *Des substitutions* pubblicato nel 1870, lascia pensare che la lettera sia del 1869.

[546] Cfr. nt. 12, lett. 35 e il testo della lettera 45.

[547] F. Brioschi, *Des substitutions de la forme* $\Theta(r) \equiv \varepsilon (r^{n-2} + a\, r^{\frac{n-3}{2}})$ *pur un nombre n premier de lettres*, «Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zü Göttingen», 1869, pp. 491-499; «Mathematische Annalen», t. II (1870), pp. 467-470, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. V, pp. 193-197.

Per $n=7$ sarebbe $N=30$ o la funzione del Kronecker[548].

La dimostrazione è finora un po' complicata, se la semplifico manderò forse il breve lavoro all'Hermite[549].

Amerei avere tempo per discutere con voi rispetto all'insegnamento della Geometria nei Licei. Da quanto mi scrivete della vostra corrispondenza coll'Hoüel[550] parmi non siete d'accordo con me, benché non sia esatto che le opinioni dell'Hoüel abbiano influito sopra di me. La mia convinzione sulla convenienza, oserei dire necessità di ritornare al metodo Euclideo nelle scuole classiche è antica; col Cremona[551], col Betti[552], se ne discusse molte volte. Se fosse stato in mio potere, io avrei però condotta la cosa in altro modo. Avrei fatta una edizione di Euclide col mio nome, e con quello dei matematici Italiani che sono d'accordo con me, ma avrei lasciato di imporre il metodo coi programmi[553].

Sgraziatamente mentre nel 1867 mi trovava a Parigi, il Betti dava vita a quel mio divisamento, mentre si pubblicavano i nuovi programmi, ed il Cremona convinto della bontà del metodo credeva convenisse meglio dichiararli in modo ufficiale. È una quistione grossa e che difficilmente può trattarsi per lettera. Sopratutto è necessario porre bene la quistione, e domandarsi quale scopo intendiamo raggiungere coll'insegnamento delle matematiche *nelle scuole*

---

[548] Cfr. nt. 7, lett. 1.

[549] Cfr. nt. 10, lett. 2.

[550] Guillaume Jules Hoüel (1823-1886).

[551] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[552] Cfr. nt. 1, lett. 1.

[553] Quando fu raggiunta l'unità d'Italia e venne costituita la nuova nazione, sorse la necessità di uniformare e armonizzare tra loro le varie strutture amministrative presenti nei precedenti Stati che avevano contribuito alla formazione del nuovo Stato unitario. In particolare, fu stabilito che i programmi per le scuole fossero elaborati da apposite commissioni. A far parte della Commissione che doveva formulare i programmi di matematica fu chiamato anche Luigi Cremona, il quale propose che nei licei-ginnasi fosse introdotto, per la geometria, lo studio diretto degli *Elementi* di Euclide. Precisamente gli allievi dovevano studiare i primi sei libri degli *Elementi* e poi l'undicesimo e il dodicesimo. In una lettera di Cremona a Genocchi del 9 Settembre 1867, cfr. *L'epistolario Cremona-Genocchi 1860-1886*, cit. in nt. 3, lett. 35, Cremona scrive: "Io sono tanto convinto dell'importanza e della necessità di tornare ad Euclide, abbandonando il Legendre ed i suoi imitatori, che nel programma che recentemente ho fatto per i *licei*, ho posto in vece dei vari argomenti della geometria, l'Euclide libri I°, II°, III°, IV°, V°, VI°, XI°, XII°, seguito dai teoremi di Archimede. Ed ho spinto Betti a realizzare un progetto ch'egli aveva già imaginato con Brioschi, di metter fuori una nuova edizione dell'Euclide, ciò che ora sta facendo Lemonnier". Il progetto di cui parla Cremona fu realizzato ed esso portò alla composizione un corso di geometria conosciuto ufficialmente come opera di Betti e Brioschi: *Gli Elementi di Euclide con note aggiunte ed esercizi ad uso de' Ginnasi e de' Licei*, Firenze, Le Monnier, 1867-1868. È da tener presente che tra gli autori non compare il nome di Luigi Cremona il quale, invece, fu uno dei principali artefici dell'opera. I nuovi programmi vennero emanati nel 1867 ("Decreto Coppino" del 10 Ottobre) pubblicati nel *Supplemento alla Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia*, Firenze 24 Ottobre 1867: *Istruzioni e programmi per l'insegnamento della matematica nei ginnasi e nei licei.*

classiche. Quando saremo d'accordo su questo punto, forse saremo arrivati ad una conciliazione rispetto ai mezzi.

State sano ed amate

l'aff.mo Vostro
F. Brioschi

51
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO?]

Milano, 17 Gennajo [1870][554]

Cariss.mo Amico

Ho ricevuto gli esemplari della vostra memoria e li ho distribuiti secondo le vostre indicazioni.

Siamo perfettamente d'accordo sulla povera figura fatta dal Bertrand[555], ed io sono d'opinione che bisogna rispondere agli spropositi da lui detti rispetto alla Geometria immaginaria. Sarà la seconda edizione della figura fatta coll'Helmoltz[556] due anni orsono.

Il postulato d'Euclide ha irritato nuovamente i vostri nervi, e vi scagliate nuovamente contro quei poveri programmi[557] ed il loro Autore, e tutto ciò a proposito di una lettura del Sylvester[558], che io non conosco, ma che sarà senza alcun dubbio la cosa più matta del mondo. Io mi persuade ogni giorno più, credo avervelo già scritto, che le quistioni di pubblico insegnamento sono fra le più delicate e per risolvere le quali non v'è altra via che la sperimentale. Ora il metodo sperimentale esige molte cautele, cure infinite, lavoro lento etc. etc., tutte cose che non stanno assieme con tanta fretta come quella del Sylvester. Vi ho, parmi, scritto altre volte, che io discuterei volentieri con voi questo soggetto; il quale è vasto e non pare essere compreso nella formula Euclide o Legendre[559] come alcuni credono. Ma passiamo ad altro.

---

[554] Il riferimento, contenuto nella lettera, alla bisezione delle funzioni iperellittiche e quindi all'articolo di Brioschi *Sulla bisezione delle funzioni iperellittiche di prima specie, e sul problema geometrico corrispondente*, apparso negli «Atti della R. Accademia dei Lincei», t. XXIV annata 1870-71, pp. 47-48 (in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. III, pp. 339-340), lascia pensare che questa lettera sia stata scritta all'incirca nel 1870.

[555] Cfr. nt. 8, lett. 14.

[556] Cfr. nt. 4, lett. 49.

[557] Cfr. nt. 9, lett. 50.

[558] Cfr. nt. 3, lett. 1.

[559] Si ricorda che Legendre (cfr. nt. 6, lett. 8) fu autore degli *Éléments de géométrie*, Paris, Firmin Didot, 1794, trattato che ha rappresentato per oltre cento anni il testo di geometria adottato dalla maggior parte delle scuole di vari paesi d'Europa. Fu più volte tradotto e ristampato in italiano. In

Ho trovato in questi giorni un teorema sulle funzioni iperellittiche che ha un interesse evidente in molte questioni geometriche. Eccolo.

È noto che la divisione delle funzioni iperellittiche di classe p, conduce ad una equazione del grado n^{2p}. Per la bissezione si ha quindi una equazione del grado 2^{2p}. Ora questa può abbassarsi a ridursi ad una del grado p. Il Cremona ha già fatto interessanti applicazioni di questo teorema, che pubblicheremo in breve[560].

Ho dato una lettura, di fretta finora, al vostro lavoro, ma vi ritornerò sopra e se mi sovviene qualche osservazione ve ne scriverò tosto.

Credetemi con sincera stima

aff.mo Vostro
F. Brioschi

52
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO?]

Milano, 14 Febbrajo [1870][561]

Cariss.mo Amico

Mi rammento benissimo che l'amico al quale alludeva il Mainardi[562] nelle sue note era il Tardy[563], ma non mi pare avere avuto conoscenza della sua dimostrazione.

In questi giorni fui occupato assai ed anche assente da Milano, sicché non ho potuto occuparmi di quanto mi avete chiesto rispetto al vostro lavoro; e prevedo che non potrò farlo se non negli ultimi giorni del carnevale, se sarò ancora in tempo.

Desidero, anche a costo di sentirmi ripetere che io non conosco la Geometria di Euclide, di fissare chiaramente la parte che io n'ebbi nella riforma[564] da voi

---

esso, l'autore tratta molte questioni facendo uso dell'algebra. Ciò apparve agli occhi di numerosi geometri una via niente affatto ortodossa per l'insegnamento della geometria.

[560] Per quanto riguarda Cremona si veda nt. 2, lett. 1. Intorno a questo argomento e più o meno alla data indicata nella lettera, risulta, pubblicato da Cremona, il seguente lavoro: *Sulla trasformazione delle curve iperellittiche*, «Rendiconti del R. Istituto Lombardo», serie II, vol. II (1869), pp. 566-571 (in *Opere matematiche* di Luigi Cremona, cit. in nt. 7, lett. 14, vol. III, pp. 123-127).

[561] Il riferimento, contenuto nella lettera, alla nota *Des substitutions ecc.*, cfr. nt. 3, lett. 50, scritta da Brioschi e pubblicata negli Atti dell'Accademia di Gottinga, induce a pensare che la lettera sia del 1870.

[562] Per Mainardi cfr. nt. 21, lett. 3.

[563] Cfr. nt. 4, lett. 14.

[564] Riforma che fu attuata con il "Decreto Coppino", per il quale si veda nt. 9, lett. 50.

con tanto accanimento combattuta. Io sono convinto, convintissimo che nella Scuola Classica la Geometria deve essere insegnata col metodo Euclideo; questa convinzione non è nuova in me; ma si è fatta poi gigante vedendo su qual via era condotto l'insegnamento geometrico in quella scuola pei molti libri pubblicati in Italia ed anche oltre monte.

Quanto vi dissi o scrissi rispetto al modo col quale si introdusse la Geometria di Euclide nei Licei, e della mia lontananza dall'Italia in quel momento, è tutta quistione di forma; la sostanza è che quella Geometria formi la base dell'insegnamento geometrico dei Licei. Del resto voi avete deriso l'Euclide riveduto dal Cremona[565]; eppure io credo che vi è quanto abbiamo di meglio a fare.

Su questo punto dunque noi siamo e saremo in perfetto disaccordo; con questa differenza che io non dubito che voi conosciate l'Euclide, il Legendre[566] e tutta la serie dei libri di geometria stampati in questi anni specialmente in queste provincie; ma dubito abbiate indagato molto sulle infinite quistioni che si presentano in un ordinamento scolastico; mentre voi dichiarandomi ignorante in fatto di Geometria Elementare, credete concludere che io giudichi a priori o per imitazione. Ormai però mi sono formato una reputazione di tenacità, alla quale non voglio rinunciare in questa circostanza. Io non ho consigliato o sconsigliato il Ministero dall'adottare l'Euclide come libro di testo, quindi di questo fatto non sono responsabile; però consiglio ora come consiglierò in seguito i professori dei Licei di approssimarsi quanto più ponno nel loro insegnamento al metodo Euclideo.

Mi spiace che la mia nota pubblicata negli Atti dell'Accademia di Gottinga[567] è così male stampata da renderne difficile la lettura. Quest'anno faccio alcune lezioni sopra questo argomento considerando le sostituzioni per un numero n primo di lettere, e per un numero n+1. Mi pare d'essere giunto a penetrare e portare un po' di luce in questo difficile argomento; intorno al quale può dirsi che c'è tutto da fare. Ed il Jordan[568] se la cava con poche pagine; non spende neppure una riga pel caso di n+1, e fa un libro grosso considerando sostituzioni che forse non si incontreranno mai!

L'Hermite[569] mi ha scritto che quel mio lavoro segna il passo più importante fatto in queste ricerche, ma anche lui ora è distratto da troppe cose, e non può lavorare.

Oltre a queste ricerche di carattere generale, intorno le quali feci qualche passo più in là, dopo le note di Gottinga, che esposi nella seconda e nella terza

---

[565] È pensabile che Brioschi intenda riferirsi agli *Elementi* di Euclide da lui editi insieme a Betti (si veda nt. 9, lett. 50) e furono rivisti da Cremona.
[566] Cfr. nt. 6, lett. 51.
[567] Forse si riferisce alla nota *Des substitutions* per la quale si veda nt. 3, lett. 50.
[568] Quasi certamente Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922), *Traité des substitutions algébriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1870.
[569] Cfr. nt. 10, lett. 2.

delle mie lezioni; gli sforzi maggiori naturalmente sono sull'equazione del 7° grado. Ecco il gran problema, anzi i due grandi problemi: Stabilire i criteri di risolubilità per funzioni ellittiche di un'equazione del settimo grado. Come si risolve in generale una equaz.[ione] del settimo grado, da quali trascendenti dipende la sua soluzione.

Credetemi con sincera stima

aff.mo Vostro
F. Brioschi

53*
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO?]

[Roma,] 16 Genn.[ai]o [1875][570]

Caro Amico

La vostra lettera mi giunse qui e rispondo tosto.

Io ignorava completamente la vostra disgrazia, e me ne duole assai.

Vi ringrazio di cuore di quanto mi scrivete rispetto ad un accusa dello Scacchi[571] per quanto sciocca ed assurda. Giunsi alla Pres.[idenz]a della Società Italiana[572] dopo una lunga ripetuta del Matteucci[573] trovai una quantità di pasticci, promesse etc. ... Ho pagato tutto l'arretrato poi non riscossi più molto sembrandomi veramente inutile quella somma ad una Società che per il mio modo di vedere aveva vissuto ma non aveva più ragione d'essere. Il Donati[574] che era l'amministratore e che doveva avere i conti era anche morto nel frattempo; salvo donazioni che per alcune medaglie ed altre spese che ora non ricordo non mi fu possibile documentare il tutto. Ma non avrei mai dubitato che qualche mia resa di conti potesse lasciare dubbi. Ritornando a Milano vedrò questo volume e ne scriverò allo Scacchi come si deve.

---

* Carta intestata: *Senato del Regno.*

[570] La data si deduce dal fatto che Brioschi cede ad Arcangelo Scacchi l'incarico di Presidente della Società Italiana, nel 1875.

[571] Arcangelo Scacchi (1810-1893), Presidente della Società Italiana delle Scienze dopo Brioschi dal 1875 al 1893. Per quanto riguarda la questione delle accuse mosse contro Brioschi, per le sue cattive operazioni di bilancio, si vedano in *L'epistolario Cremona-Genocchi (1860-1886)*, cit. in nt. 3, lett. 35, la lettera 59 di Cremona a Genocchi e la lettera XXXIV di Genocchi a Cremona.

[572] Brioschi era stato Presidente della Società Italiana delle Scienze, per la quale si veda nt. 12, lett. 35, dal 1868 al 1874.

[573] Carlo Matteucci, cit in nt. 4, lett. 49, fu Presidente della Società Italiana dal 1866 al 1868.

[574] Giovanni Battista Donati (1826-1873).

Mi rammento che fino d'allora oltre le noje che ebbi pel mio progetto di fusione nei Lincei[575], dovetti subire molte domande che dirò almeno indiscrete da farsi dallo Scacchi, ma a me pareva troppo facile il comprendere che io mi assumeva la responsabilità anche di atti non miei e ha quindi un interesse comune trovare una forma che salvasse tutto.

La mia abitudine di non pensare mai male degli altri, ha fatto sì che io non mi sono più occupato di questa faccenda, tanto più vedendo lo Scacchi qui alcune volte di sovente così cortese e così deferente verso di me.

Del resto approvata la cosa, il mio partito è preso.

Io preparerò voi ed un altro collega che voi designerete a prendere notizia di quel resoconto; e verserò alla cassa della Società quel tanto che indicate, ben inteso però non imputando a mio carico quelle somme che sono rimaste nelle casse dello Stato e che devono essere almeno due terze parti.

Vi ringrazio ancora, e vi auguro di guarire presto

aff.mo Vostro
F. Brioschi

54*
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO?]

[Roma,] 20 Ottobre [1875][576]

Caro Amico

Sono venuto qui ad assistere a due sedute interne dell'Accademia dei Lincei per tentare di oppormi alla realizzazione dei progetti del presidente[577] rispetto alle nomine dei Soci Nazionali e Corrispondenti. Intanto ho ottenuto che pel momento non si parli di altre nomine.

---

[575] Brioschi propose la costituzione a Roma di un Istituto nazionale che avrebbe compreso l'Accademia dei Lincei e la Società Italiana delle Scienze. Riuscì verso la fine del 1874 ad ottenere il parere favorevole del Ministro della Pubblica Istruzione, Ruggero Bonghi, elaborò uno Statuto ma la proposta fu respinta dai membri della Società Italiana. In particolare, Betti, Menabrea, Cremona, Beltrami e Sella votarono a favore della fusione, mentre Genocchi, Tardy, Chelini, Schiaparelli, Bellavitis, Secchi furono contrari.

* Carta intestata: *Senato del Regno*.

[576] Il contenuto di questa lettera, rapportato con quello della lettera precedente, porta a pensare che l'anno sia il 1875.

[577] Trattasi di Quintino Sella (per il quale cfr. nt. 4, lett. 33), Presidente dell'Accademia dei Lincei dal 1874 al 1884.

Rispetto agli Stranieri il Dini[578], il Battaglini[579], il Cremona[580] ed io, presenti della nostra Sezione abbiamo proposto in prima linea ex-equo Fuchs[581], Hermite[582], Kronecker[583], Schläfli [584], Sylvester[585], Tchebischef[586], Weierstrass[587] poi Jordan[588], Klein[589], Lie[590]. Queste proposte vi verranno inviate dalla Presidenza per la votazione. Nominati questi dieci non rimarrà più che un posto vacante; ma se si esclude lo Schwarz[591] non parmi si possano trovare altri matematici che li valgano.

Non vi ho più scritto rispetto al doloroso incidente dell'Acc.demia dei quaranta[592] perché non poteva accettare il vostro suggerimento e fare altro atto al di là di quanto ho già fatto. Una qualsivoglia aggiunta che accennasse a rimborso equivarrebbe ad ammettere da parte mia che io ho fatto uso dei denari della Società e sarebbe quindi contro il vero. Io ho potuto recare danno alla Società avendo per più anni lasciato nelle casse dello stato la sua dotazione. Danno materiale, per avere trascurato la stampa etc. ... – danno morale; al primo rimedio in parte coll'abbandonare per vari anni (spero molti) quanto mi spetta- al secondo tenterei rimediare quando fossi come voi convinto della utilità attuale della sua esistenza, nella forma e nella costituzione che ha.

Datemi nuove della vostra salute che desidero migliore, ed abbiatemi sempre per

aff.mo Vostro

F. Brioschi

---

[578] Ulisse Dini (1845-1918).
[579] Cfr. nt. 7, lett. 18.
[580] Cfr. nt. 2, lett. 1.
[581] Lazarus Immanuel Fuchs (1833-1902).
[582] Cfr. nt. 10, lett. 2.
[583] Cfr. nt. 7, lett. 1.
[584] Cfr. nt. 5, lett. 1.
[585] Cfr. nt. 3, lett. 1.
[586] Cfr. nt. 12, lett. 2.
[587] Cfr. nt. 8, lett. 10.
[588] Cfr. nt. 8, lett. 52.
[589] Felix Christian Klein (1849-1925).
[590] Marius Sophus Lie (1842-1899).
[591] Hermann Amandus Schwarz (1843-1921).
[592] Per l'Accademia delle Scienze, detta dei XL cfr. nt. 12, lett. 35, per quanto riguarda le accuse rivolte a Brioschi cfr. nt. 2, lett. 53.

55*
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO?]

Milano, 10 Dicembre 1880

Mille grazie, caro Amico, della vostra letterina. Mi spiace assai la notizia che mi date dei vostri occhi, il rimedio essendo per voi come sarebbe per me quasi di impossibile attuazione. Nel caso voleste ora od in seguito altri consigli da Quaglino[593] o desideraste fargli dire qualche cosa, scrivete a me che me ne incarico.

Credetemi sempre con molta stima ed amicizia

aff.mo Vostro
F. Brioschi

56
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Milano, 6 Marzo 1881

Caro Amico

Vi ringrazio del lavoro che mi avete mandato – Sulle funzioni interpolari[594] – che ho già letto con moltissimo piacere. Ricordatevi qualche volta anche degli Annali[595] e ve ne sarò grato.

Avete voi informazioni abbastanza precise sulle disposizioni della vostra Facoltà rispetto alla prossima nomina del Consiglio Superiore? Io ebbi da varie Università o meglio Scuole di Ingegneri la proposta di candidatura, e siccome naturale reazione di certe esclusioni sistematiche che si volevano imporre, ho accettato. Alcuno mi disse che costì non si vogliono Senatori e Deputati, mi parrebbe davvero strana questa idea e pericolosa nel caso attuale, giacché il corpo insegnante lascerebbe così al Ministro[596], e che Ministro, campo

---

* Carta intestata: *R. Istituto Tecnico Superiore.*

[593] Probabilmente è un medico.

[594] Alla data segnalata in questa lettera risultano pubblicati da Genocchi due articoli sulle funzioni interpolari. Il primo è *Intorno alle funzioni interpolari*, «Atti della R. Accademia di Scienze di Torino», t. XIII (1878), pp. 716-730; il secondo è *Sopra una proprietà delle funzioni interpolari*, «Atti della R. Accademia di Scienze di Torino», t. XVI (1881), pp. 269-275.

[595] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[596] Guido Baccelli (1842-1916), fu varie volte Ministro della Pubblica Istruzione, in particolare nel periodo dal 2 Gennaio 1881 al 29 Marzo 1884.

completamente libero a nominare uomini politici in larga misura. Dato che mi sono messo in ballo contro le mie prime idee vorrei ora riuscire; credete che anche nella vostra Facoltà la mia candidatura possa trovare qualche appoggio?

Credetemi con sincera stima

aff.mo Vostro
F. Brioschi

57*
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO?]

[Milano,] Addì6, Ottobre 1881

Caro Amico

Scrivo subito al Comm. Bertina[597] raccomandando il giovane Ingegnere Chiò[598] ed appena avrò risposta ve la farò conoscere. Da lungo tempo non rividi Tardy[599] e sarò ben lieto della sua visita a Milano. Però voglio essere pel dieci al Consiglio Superiore e verificare così cogli atti alla mano se tutto quanto si dice rispetto al Baccelli[600] sia esatto. Conservatevi sano e credetemi con molta stima ed amicizia

aff.mo Vostro
F. Brioschi

58
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Milano, 13 Luglio 1882

Caro Amico

Vi ringrazio della vostra lettera e delle notizie che mi date. Quella lettera all'*Opinione*[601] fu da me scritta il mattino appena giunto in Roma, dove era

* Carta intestata: *R. Istituto Tecnico Superiore. Milano – 4, Piazza Cavour.*

[597] Callisto Bertina.

[598] Forse un figlio di Felice Chiò. Per quest'ultimo si veda nt. 10, lett. 1.

[599] Cfr. nt. 4, lett. 14.

[600] Cfr. nt. 3, lett. 56.

[601] *L'Opinione*, giornale liberale fondato nel 1848 da G. B. Bottero, F. Govean e A. Borella.

andato per combattere il progetto di legge se veniva portato in discussione. Non rammentava quanto mi scrivete, perciò scambiai il Liouville[602] col Legendre[603], perché ricordava le osservazioni del Liouville al tentativo di Lamé[604].

Quanto al Gorini[605] ecco come stanno le cose. Nell'Agosto del 1880 venne da me dicendomi aver dimostrato nella sua generalità il teorema. Io mi schermii di essere giudice come egli voleva, avendo coltivato pochissimo questa parte della matematica, e mi ricordo avergli suggerito il vostro nome come il solo giudice competente in Italia.

Ma avendo egli insistito dovetti associarmi. La lettura del suo lavoro fatta con lui mi fece cattiva impressione, e mi parve tosto che l'errore si trovasse in un teorema aritmetico da lui ammesso per vero ed applicato più volte. Comunque sia gli chiesi mi lasciasse un'estratto del suo lungo manoscritto e così fece; ma dopo tre giorni o poco più, mi scrisse aver trovato nella sua dimostrazione un grossolano errore (senza dirmi quale) e che pel momento non pensassi più alla sua dimostrazione. Siccome il Gorini moriva nei primi del 1881 e da quella lettera in poi non mi diede altra notizia, così io mi tengo autorizzato a dire che la dimostrazione vantata dai suoi imprudenti correligionari politici non esiste; e credo sia bene per la memoria sua lo abbia detto lui stesso piuttosto che altri debba dichiararlo.

Sono dolente di sentire che lo stato dei vostri occhi peggiora; il povero Quaglino[606] è decaduto a mal partito.

So da Piuma[607] che Tardy[608] trovasi a S.to Marcello.

Se nelle vacanze passate da Milano avvertitemene desiderando vedervi. Credetemi sempre

aff.mo Vostro
F. Brioschi

[602] Cfr. nt. 14, lett. 8.
[603] Cfr. nt. 6, lett. 8.
[604] Cfr. nt. 9, lett. 3.
[605] Paolo Gorini (1813-1881).
[606] Cfr. nt. 1, lett. 55.
[607] Carlo Maria Piuma (1837-1912).
[608] Cfr. nt. 4, lett. 14.

59*
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO?]

[Milano,] 3 Giugno [1883][609]

Caro Amico

Da vari mesi non ho vostre nuove dirette -vi spero in salute migliore. La morte del nostro collega Minich[610] mi ha offerto il modo, che a me pare il migliore, per compensare la Società Italiana[611] dei danni materiali che io avessi potuto arrecarle. Sono divenuto uno tra i tre più anziani e quindi pensionato; scrissi tosto al Presidente[612] protestando contro le parole da voi segnalatemi dichiarandole offensive ed ingiuste da ogni punto di vista; ed aggiungendo che devolveva la pensione di lire 300 annue per tutta la mia vita a beneficio della Società. Ho 58 anni e salute buonissima, spero quindi ne fruirà per un pezzo.

Ciò non toglie che sono altamente indignato della condotta dello Scacchi[613] e *manutengoli*.

Credetemi con molta stima

aff.mo Vostro
F. Brioschi

60*
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO?]

[Milano,] 5 Giugno [18]83

Caro Amico

Dalla vostra lettera in data di jeri debbo arguire vi sia un equivoco tra noi. Non è possibile che vi scrivessi nel Gennaio esser mio intendimento di mandarvi il resoconto della mia gestione, non avendo più nota alcuna che la riguardano. Chi faceva le spese, chi veramente amministrava era il povero Donati[614], e se io non potei mandare tutte *les piecès justificatives*, fu appunto per

---

* Carta intestata: [*R. Istituto Tecnico Superiore*] 4, *Piazza Cavour – Milano*.

[609] L'anno, 1883, è deducibile dall'affermazione di Brioschi, posta all'interno di questa lettera, secondo cui egli dichiara di avere 58 anni.

[610] Cfr. nt. 7, lett. 19.

[611] Cfr. nt. 12, lett. 35.

[612] Brioschi si riferisce a Scacchi per il quale si veda nt. 2, lett. 53.

[613] Cfr. nt. 2, lett. 53.

* Carta intestata: [*R. Istituto Tecnico Superiore*] *4, Piazza Cavour – Milano*.

[614] Cfr. nt. 5, lett. 53.

la sua morte quasi improvvisa. Il Felici[615] ne rinvenne alcune e con poche altre che avevo io le mandai allo Scacchi[616], completando il resto colla reminiscenza. Trattavasi anche di alcuni debiti lasciati dal Matteucci[617] che non riguardavano quindi la mia gestione direttamente, ma che mi sarei ben guardato di trattare come lo Scacchi trattò me. Se voi non mi avvisavate del fatto, e ve ne ringrazio di cuore, forse sarei ancora oggi al bujo ed ho sempre trattato amichevolmente lo Scacchi per questa mia ignoranza. Ma ora sono indignato con lui e con coloro che gli tennero mano in odio alla mia proposta, discutibile, discutibilissima, sono il primo a dirlo, ma che non avrei mai pensato potesse condurre ad un atto così sleale. La fortuna mia si è che l'atto stesso è sciocco trattandosi di un uomo che ha amministrato dei milioni ed amministra ancora oggi ben altra azienda. Io intendeva di chiamarvi arbitro, che voi prendeste da Scacchi e compagni le note che essi debbono avere e determinaste quale somma debba rimborsare perché la morte del Donati ed altre circostanze non mi permisero di avere documenti giustificativi.

Ma questo sistema aveva un difetto di rimettere quasi da parte mia l'accusa- quello che ora ho addottato produce lo stesso effetto ma include nello stesso tempo il mio disprezzo per quei Signori[618].

Se avessi più tempo vi scriverei a lungo rispetto ai Lincei -ci troveremmo certamente d'accordo in vari punti.

Leggerò assai volentieri la vostra Memoria sulle funzioni *Gamma*[619]. Ho mandato oggi una breve Communicazione all'Accad. di Parigi sopra una forma binaria dell'ottavo ordine[620] che ha proprietà analoghe a quella del quarto, del sesto, del dodicesimo studiate da Schwarz[621], Klein[622] ed altri.

Addio caro Amico, curate la vostra salute. Domani devo partire per Roma

aff.mo Vostro
F. Brioschi

---

[615] Riccardo Felici (1819-1902).
[616] Cfr. nt. 2, lett. 53.
[617] Cfr. nt. 4, lett. 49.
[618] Per tale questione si vedano pure le lettere 53 e 54.
[619] Probabilmente, A. Genocchi, *Intorno alla funzione gamma e alla serie dello Stirling che ne esprime il logaritmo*, «Memorie della Società Italiana delle Scienze», t. VI (1884), pp. 1-24.
[620] F. Brioschi, *Sur quelques propriétés d'une forme binaire du huitième ordre*, «Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences», t. XCVI (1883), pp. 1689-1692, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. V, pp. 41-44.
[621] Cfr. nt. 16, lett. 54.
[622] Cfr. nt. 14, lett. 54.

61*
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

[Roma,] 7 Aprile [1884][623]

Caro Amico

Vi ringrazio assai degli auguri portatimi da Cossa[624] in vostro nome. Ho dovuto subire una opposizione inaspettata ed estranea alla scienza ed all'avvenire dell'Accademia. Municipalismo, politica, clericalismo, si erano legati contro di me. Il Cremona[625] è andato al di là d'ogni limite, comparendo jeri all'Accademia e votando per sé

62*
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

[Milano,] 10 Ott.[obre] [18]84

Caro Amico

Ho ricevuto la dichiarazione e sarà pubblicata sulla copertina del prossimo fascicolo degli Annali[626] secondo desiderate. Fui a Torino, chiesi di voi e mi dissero eravate assente. Sono lieto abbiate alquanto migliorato in salute. Io sto lavorando sulle funzioni iperellittiche del 1° ordine[627]. Se mi riesce dovrei mettere insieme un trattato elementare sulla materia – resa forse più difficile da vari autori di quanto essa sia.

Credetemi sempre con molta stima

aff.mo Vostro
F. Brioschi

---

* È un frammento di lettera scritta su carta intestata: *Senato del Regno.*

[623] L'anno, 1884, si deduce dal fatto, accennato in questa lettera, che si vota per nominare il nuovo Presidente dell'Accademia dei Lincei, alla morte del precedente, che era Quintino Sella (cfr. nt. 4, lett. 33).

[624] Alfredo Cossa (1833-1902).

[625] Cfr. nt. 2, lett. 1.

* Carta intestata: [*R. Istituto Tecnico Superiore*] *4, Piazza Cavour – Milano.*

[626] Cfr. nt. 2, lett. 1.

[627] F. Brioschi, *Sulla teorica delle funzioni iperellitiche di primo ordine*, «Annali di matematica pura ed applicata », serie II, t. XIV (1886), pp. 241-344, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. II, pp. 345-354.

63*
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

[Milano,] Addì, 10 Nove.[mbre] 1884

Caro Amico

Fui in Roma qualche tempo, e per questa ragione ritardai a rispondervi. La vostra domanda è chiara e se la procedura rimanesse costante la risposta dovrebbe esserlo del pari. In ogni modo eccovi l'opinione di un consigliere della pubblica istruzione moribondo. Il Piuma[628] deve essere un buon insegnante, ed ha anche qualche lavoro degno di nota. Ma l'articolo 69 non gli è applicabile e perciò deve correre le sorti del concorso per divenire Ordinario. Ma, vi ripeto, sia per non nuocergli, sia perché il passato ha esempi in contrario, questa è la mia opinione, od in altre parole quella che farei se dovessi essere giudice.

Devo però dire che i nostri amici vecchi o giovani vanno diventando ogni giorno più facili e compiacenti, perciò anche questa ragione mi impone delle riserve. In conclusione, la mia opinione la sapete, ma siccome ho pochi mesi di vita, potete anche non tenerne conto. Curate la salute ed abbiatemi sempre per

aff.mo Vostro
F. Brioschi

Comunico questa lettera al V. March. Piuma ringraziandolo di quella ch'egli mi ha scritta e facendogli tanti complimenti anche per la signora Marchesa.

Torino 11 Novembre 1884. Suo Dev.mo A. Genocchi[629].

---

* Carta intestata: *R. Istituto Tecnico Superiore Milano – 4, Piazza Cavour.*

[628] Cfr. nt. 7, lett. 58.

[629] Con la scrittura di Genocchi, sulla lettera vi è apposta la seguente annotazione.

64*
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Roma, 19 Maggio 1885

Ill.mo sig. Presidente[630]

Fu presentata a quest'Accademia[631] dal sig. Levi Simeone un'opera che porta il titolo "Vocabolario geroglifico", per concorrere al premio Reale di Filologia[632]. Mi si afferma ora che lo stesso Vocabolario sia, fino dall'anno 1881, stato altresì presentato a codesta R. Accademia[633] per altro scopo. La S.V. Ill.ma mi farebbe cosa grata, se si compiacesse di comunicarmi, in via confidenziale se sta il fatto quale giunse a mia cognizione, e quali deliberazioni prese l'Accademia, da Lei presieduta, in proposito.

Aggradisca le attestazioni della mia distinta stima

il Presidente
F. Brioschi

"Comunico al sig. Cav. Prof. Molinari[634] questa *confidenziale* del Presidente de' Lincei, e lo prego di far ricerca delle notizie che mi si chiedono, e di parteciparmi quanto avrà saputo.

Dev.mo Suo

A. Genocchi"[635]

---

* Carta intestata: *Reale Accademia de' Lincei.*

[630] Angelo Genocchi era Presidente dell'Accademia delle Scienze di Torino, carica che ricoprì dal 12 Aprile 1885 al 7 Marzo 1889.

[631] Trattasi dell'Accademia dei Lincei.

[632] Risulta che a Simeone Levi sia stato assegnato, dall'Accademia dei Lincei, per la classe delle Scienze morali, storiche e filologiche, il premio Reale per l'anno 1884, per il *Vocabolario geroglifico copto-ebraico*, Torino, Pietro Salussolia, 1887-1894, in 8 voll.

[633] Trattasi dell'Accademia delle Scienze di Torino.

[634] Forse Giuseppe Molinari.

[635] Sulla lettera vi è l'annotazione, a grafia di Genocchi, qui riportata.

65*
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

[Milano,] 28 Luglio [1886][636]

Carissimo Amico

Spero che queste mie righe vi raggiungeranno. Scriverò tosto a Roma per l'invio dei Rendiconti.

Io parto Domenica prossima per Heidelberg, pel 5° Centenario di quella Università. A quanto mi si scrive Hermite[637] verrà egli pure, ma il maggior numero dei nostri colleghi sono naturalmente tedeschi. Non rimarrò che cinque giorni e poi ritorno subito essendo occupato in tanti differenti modi. In questo momento sto lavorando intorno le equazioni differenziali per i periodi delle funzioni iperellittiche di prima e seconda specie a due variabili[638]. Pubblicherò un sunto del lavoro nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo.

Se fossimo meno lontani sarei lieto di potervi tenere un po' di compagnia. Scriverò ad alcuni degli amici che mi nominate in favore del Cesàro[639].

Vi auguro qualche momento di tregua.

Credetemi sempre

aff.mo Vostro
F. Brioschi

---

* Carta intestata: [*R. Istituto Tecnico Superiore*] *4, Piazza Cavour – Milano.*

[636] Il riferimento, all'interno della lettera, dei festeggiamenti del quinto centenario della fondazione dell'Università di Heidelberg (avvenuta nel 1386), permette la determinazione dell'anno.

[637] Cfr. nt. 10, lett. 2.

[638] Brioschi pubblicherà nel 1888 l'articolo *Le equazioni differenziali pei periodi delle funzioni iperellittiche a due variabili*, «Rendiconti dell'Accademia dei Lincei», serie IV, t. IV (1888), pp. 341-347 e 429-436, in *Operematematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. IV, pp. 53-69.

[639] Ernesto Cesàro (1859-1906). Si veda pure la lettera IV; per quanto riguarda le aspirazioni di Cesàro e, assieme, la sua travagliata giovinezza, si può consultare la parte I del volume: L. Carbone, R. Gatto, F. Palladino, *Una comunità e un caso di frontiera. L'epistolario Cremona-Cesàro e i materiali correlati*, Napoli, Liguori2,002.

66*
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

[Milano,] Addì, 26 Dicembre 188/[?]

Caris.mo Amico

Avrei la migliore buona volontà di trovarmi costì il 28 ma la rigida stagione mi tiene un po' indietro dovendo fare il viaggio di andata e ritorno nella stessa giornata. Dalla vostra lettera mi pare poco probabile la mia presenza possa giovare a Casorati[640] che trovasi il quarto in ordine di merito ed anche questa è ragione che mi trattiene piuttosto che eccitarmi.

Sono ancora indeciso sul da fare. Vi ringrazio assai della comunicazione e del vostro recente lavoro.

Credetemi sempre con molta stima ed amicizia

aff.mo Vostro
F. Brioschi

67
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[TORINO]

Genova, 19 Giugno

Caris.mo Amico

Vi scrivo due righe di fretta per annunciarvi che domani colla seconda corsa partirò di qui alla volta di Torino; non sapendo dove abitate verrò dalle 3 alle 3 ½ in cerca di voi all'Istituzione Agraria; se non potete fatemi il favore di fissarmi voi un altr'ora. Così risponderò a voce alle vostre domande; ed avrò il piacere di rimanere qualche ora in vostra compagnia

il Vostro Brioschi

---

* Carta intestata: *R. Istituto Tecnico Superiore. Milano – 4, Piazza Cavour.*

[640] Cfr. nt. 4, lett. 42.

68
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[?]

Firenze4, Genn.[aio]

Caro Amico

Desidererei ad essere d'accordo con voi che Blaserna[641] fosse il nostro candidato nelle elezioni di Domenica. Su questa fiducia vi prego di adoperarvi per lui.

Sono in viaggio per Milano. Buon anno

aff.mo Vostro
F. Brioschi

69
[LETTERA]

FRANCESCO BRIOSCHI AD ANGELO GENOCCHI
[?]

Caris.mo Amico

Parto questa sera. Vi mando alcuni fascicoli che mi avete prestato in varie epoche.

State sano, conservatemi la vostra amicizia e credetemi

aff.mo Brioschi

I
[LETTERA]

ANGELO GENOCCHI A FRANCESCO BRIOSCHI
[PAVIA]

Torino2,9 Agosto 1858

Carissimo Amico

Mi piace il pensiero di dare notizia dell'articolo di Hoppe[642] ricordando i lavori precedenti. Se ripasserete con attenzione i vostri calcoli, vi accorgerete che la conclusione va modificata. Voi supponete[643]

$$x_1-u>x_2-u>\ldots>x_m-u>r>x_{m+1}-u>x_{m+2}-u>\ldots>x_n-u$$

[641] Pietro Blaserna (1836-1918).
[642] Cfr. nt. 7, lett. 20.
[643] Per le argomentazioni di Brioschi si veda la lettera 20.

avendo riguardo al solo valor numerico o meglio al *modulo* analitico di questa quantità: quindi la radice x_n che è espressa dalla serie di Lagrange[644] non è già la minima in valore assoluto, ma *quella a cui corrisponde la differenza* x_n-u *del minimo modulo*. Questa medesima conclusione, analoga al teorema del Chiò ma tuttavia diversa, io aveva dedotta dal metodo del Parseval prima di conoscere il teorema del Frontera col quale poi mi parve identica.

Svolgendo $y=\psi' u \log(1-\frac{\varphi u}{t})$ per le potenze dipendenti di t, e deducendone $\frac{d^m y}{du^m}$, indi passando mediante il teorema di Taylor allo svolgimento della funzione $-t\psi'(u+t)\log[1-\frac{\varphi(u+t)}{t}]$, si vede che in questo svolgimento la parte indipendente da t forma la serie generale di Lagrange

$$\psi' u\, \varphi u+\frac{1}{1\cdot 2}\frac{d}{du}[\psi' u(\varphi u)^2]+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^2}{du^2}[\psi' u(\varphi u)^3]+ecc.$$

per un teorema di Cauchy la somma di questa serie sarà $-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[t\psi'(u+t)\log(1-\frac{\varphi(u+t)}{t})d\theta$. Supposto T il modulo e θ l'argomento di t, ossia $t=Te^{i\theta}$. Ma si ponga

$$x\text{-}u\text{-}\varphi x = k\,(x\text{-}\alpha)^p(x\text{-}\beta)^q(x\text{-}\gamma)^r\ldots,$$

e fra le differenze u-α, u-β, u-γ,... sia u-α quella che presenti il più piccolo modulo: si attribuisca a t un valore il cui modulo superi quello di u-α e sia inferiore a quella di tutte le altre differenze. Se si avrà $p=1$, fatto $x=u+t$, otterremo

$$\log(1-\frac{\varphi(u+t)}{t})=\log k+\log(1+\frac{u-\alpha}{t})+q\log(u-\beta+t)+r\log(u-\gamma+t)+ecc.$$

e il secondo membro sarà sviluppabile per le potenze di t: allora svolgendo $\psi'(u+t)$ troveremo che nella funzione $-t\psi'(u+t)\log[1-\frac{\varphi(u+t)}{t}]$ la parte indipendente da t è $\frac{\alpha-u}{1}\psi' u+\frac{(\alpha-u)^2}{1\cdot 2}\psi'' u+\frac{(\alpha-u)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\psi''' u+\ldots$ ossia $\psi\alpha$ – ψu. Completando dunque la serie di Lagrange col termine ψu, essa esprimerà $\psi\alpha$ e quindi α nell'ipotesi di $\psi x=x$.

Nel caso particolare di $u=0$ la radice α sarà quella del più piccolo modulo ossia la minima in valore assoluto. È singolare che al caso di $u=0$ non si applica la dimostrazione di Lagrange.

---

[644] Per la serie di Lagrange cfr. nt. 13, lett. 20. Sulla polemica intorno alla serie di Lagrange si veda la nt. 7, lett. 24.

I calcoli precedenti suppongono che il modulo di $\frac{\varphi(u+t)}{t}$ sia inferiore all'unità, ritenuto il modulo di t superiore a quello di $u-\alpha$ e inferiore a quelli di $u-\beta$, $u-\gamma$, ecc. la qual condizione collima con la vostra. Pertanto se α è una radice semplice, per cui la differenza $u-\alpha$ presenti un modulo inferiore a quelli di tutte le altre $u-\beta$, $u-\gamma$, ecc., e se sia soddisfatta la indicata condizione, la radice α (reale o immaginaria, non importa) sarà espressa dalla serie di Lagrange. E a questa conchiusione si giunge senza ricorrere ad integrali definiti, col solo uso del teorema di Taylor.

Quando la radice α sia immaginaria, l'equazione sarà immaginaria non dovendo ammettere la radice coniugata di α.

Il teorema del Frontera è il seguente. Se il modulo della quantità $\frac{\theta\varpi(z)}{z-\alpha_1}$ è inferiore ad 1 per tutti i punti d'un contorno in cui sia compreso il punto corrispondente a $z=\alpha_1$, la serie di Lagrange quando sia convergente approssimerà una radice dell'equazione $z-\alpha_1+\theta\varpi(z)=0$, e questa radice sarà la sola che si trovi compresa nell'accennato contorno. Sembra ch' egli non conoscesse il teorema del Chiò; egli crede che fuori dalle condizioni su riferite non si saprà che cosa rappresenti la serie di Lagrange.

Vidi nel giornale dell'Istituto Lombardo, Tomo V, pag. 466, che il Frisiani[645] cita varie sue ricerche intorno alla serie di Lagrange. In che consistono?

Occupandomi in altro tempo di quest'argomento aveva pure riconosciuto che nel caso d'una radice multipla la serie di Lagrange (tenuto conto del resto se non è convergente) esprime la somma delle radici uguali. Parmi che la stessa cosa si deduca dalla vostra analisi, e per radici uguali si potranno intendere tutte quelle di ugual modulo.

La nota del prof. Dorna[646] è realmente come dite voi, male scritta. Ignoro se nei *Comptes Rendus*[647] ne sia stata fatta menzione altrimenti che registrandola nel *Bulletin bibliograph.* All'Istituto Lombardo egli mandò anche la sua Memoria perché la vidi indicata nell'*Elenco* stampato alla fine della fasc. IX degli *Atti*. Nondimeno spero inviarvene una copia a Milano. Vi spedirò anche la *Tesi* del Frontera[648] se potrò riaverla in tempo dal prof. Chiò[649].

---

[645] Paolo Frisiani (I797-1880). Il lavoro di Frisiani, membro effettivo dell'Istituto, fu presentato il 20 Marzo 1851 e ha per titolo *Ricerche sopra alcune serie astronomiche*, «Giornale del I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti e Biblioteca Italiana», t. V (1853), pp. 446-490.

[646] A riguardo si vedano nt. 6 lett. 19 e nt. 1, lett. 20.

[647] Trattasi dei Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences de Paris.

[648] Cfr. nt. 2, lett. 21.

[649] Cfr. nt. 10, lett. 1.

Sapeva dell'opera del Faà sulla eliminazione[650]: riconosce egli stesso che è una semplice compilazione, e anche così, se sia ben fatta, potrà essere utile. Vi confesso che mi riconcilio con lui quando guardo a quest'altra gente tanto pettoruta e tronfia benché al suo confronto superlativamente ignorante. Egli mi ha parlato con ammirazione dei lavori del Betti[651].

Il Bellavitis[652] mi ha mandata una nuova filippica contro l'oscurità negli scritti matematici, ed io gli ho risposto con un'altra contro i neologismi e specialmente contro la sua *retroderivazione*. Tuttavia penso che forse egli non ha torto; e pocanzi leggendo l'articolo di Jacobi (Crelle tom. 2° p. 1)[653] andava fantasticando se non sarebbe bene che si lavorasse a quella maniera piena e larga, se non si farebbe cosa più gradita ai lettori ed eziandio più utile che con un piccolo sacrifizio di tempo per parte dell'autore procurerebbe un grande risparmio di tempo e di fatica ai lettori.

Dopo il 7 settembre potete scrivermi. Piacenza, dove intendo passare gran parte delle rimanenti vacanze quando avrò impetrata la necessaria licenza dal Ministro dell'istruzione pubblica,[654] poiché senza la permissione del Ministro non possono i professori uscire dallo Stato. Vedete quanta libertà! Pure nello Stato di Parma io non aveva questo vincolo, e quello era governo assoluto.

State sano

V^ro^ aff.mo
A. Genocchi

II
[LETTERA]

ANGELO GENOCCHI A FRANCESCO BRIOSCHI
[MILANO]

Torino2, Dicembre 1865

Cariss. amico

Credo d'avere presso a poco trovata la soluzione del vostro problema, ma richiede calcoli molto lunghi in guisa che non so se alla fine questo metodo applicato alla risoluzione delle equazioni di 5° grado sarebbe preferibile o no a quello di Jerrard[655]. Della qual cosa tuttavia voi solo potete giudicare.

---

[650] Per Faà di Bruno cfr. nt. 9, lett. 1. Per quanto riguarda il lavoro di cui si parla cfr. nt. 14, lett. 20.
[651] Cfr. nt. 1, lett. 1.
[652] Cfr. nt. 2, lett. 18.
[653] Cfr. nt. 9, lett. 20.
[654] Si tratta di G. Lanza, per il quale cfr. nt. 17, lett. 11.
[655] Cfr. nt. 6, lett. 43.

L'equazione $AX^2+BY^2+CZ^2+2DYZ+2EZX+2FXY=0$, fatto $\frac{X}{Z}=S$, $\frac{Y}{Z}=T$, e risoluta rispetto ad S, conduce a dover rendere un quadrato l'espressione

$$\left(\frac{E+FT}{A}\right)^2-\frac{BT^2+C+2DT}{A},$$

e ponendo $F^2-AB=A_1$, $A_1T+EF-AD=\frac{V}{U}$, $A_1^2(E^2-AC)-A_1(EF-AD)^2=B_1$, se ne deduce che dev'essere un quadrato l'altra espressione

$$A_1V^2+B_1U^2.$$

Siamo dunque condotti ad un'equazione

$$AV^2+BU^2=W^2$$

in cui A e B sono funzioni intere date di tre variabili e V, U, W sono funzioni intere da determinarsi delle stesse variabili. Può supporsi per maggiore generalità che si tratti d'una o più variabili in un numero qualsiasi. Ora possiamo ammettere che A e B non abbiano divisori quadrati, dal che si deduce che U dev'essere primo ad A, e V dev'essere primo a B: possiamo anche intendere che V e U siano primi tra loro.

Chiamate N e U_1 due funzioni intere da determinarsi, poniamo $W=NU-AU_1$ e otteniamo

$$\frac{N^2-B}{A}U^2-2NUU_1+AU_1^2=V^2,$$

quindi N^2-B divisibile per A. Contando il grado delle funzioni intere rispetto a ciascuna delle variabili separatamente e attribuendo ad una funzione il grado maggiore tra quelli che così si trovano, supporremo m il grado di A e non superiore quello di B, e cercheremo per N una funzione intera di grado $m-1$ tale che il quoziente $\frac{N^2-B}{A}=A_1$ sia intero:

A_1 sarà di grado $m-2$ al più, e si avrà

$$BU_1^2+A_1V^2=(A_1U-NU_1)^2$$

simile alla proposta ma con coefficienti di grado inferiore.

Trattando questa come la proposta e così di mano in mano si giungerà infine ad un'equazione

$$HX^2+KY^2=Z^2$$

in cui K sarà di grado zero ossia costante e che si risolverà ponendo $\frac{Z}{Y}=\sqrt{K}+\frac{X}{Y}R$, con R funzione razionale qualsiasi.

Ma restano a trattarsi le equazioni sussidiarie

$$W=NU-AU_1,\ N^2-B=AA_1$$

e le consimili. Più generalmente si può proporre l'equazione

$$AV^2-B=CU$$

dove A, B, C siano funzioni intere date d'una o più variabili, V ed U due funzioni intere da determinarsi delle stesse variabili, i un esponente intero positivo.

Si può supporre A primo a C.

Se si ha una sola variabile x e C sia di grado m, siano $x = x_1, x_2,\ldots, x_m$ le radici dell'equazione $C=0$: per mezzo della formola di interpolazione di Lagrange si potrà determinare una funzione intera V del grado $m-1$ la quale pei valori $x = x_1, x_2,\ldots, x_m$ prenda gli stessi valori della funzione $\sqrt[i]{\frac{B}{A}}$, e questa soddisfarà al quesito.

Se vi sono due variabili x e y, sia C di grado m rispetto ad x, e di grado n rispetto ad y, e fatto ad arbitrio $x=x_1$, siano $y_{1,1}, y_{1,2},\ldots, y_{1,n}$ le radici y dell'equazione $C=0$, fatto $x=x_2$ siano $y_{2,1}, y_{2,2},\ldots, y_{2,n}$ le radici della stessa equazione, e via via fino a un valore $x=x_m$ pel quale tali radici siano $y_{m,1}, y_{m,2},\ldots, y_{m,n}$. Si potrà formare una funzione intera V di grado $m-1$ rispetto ad x e di grado $n-1$ rispetto ad y che pei valori di x e y così determinati prenda valori uguali a quelli della funzione $\sqrt[i]{\frac{B}{A}}$. Fatto $AV^i-B=\varphi(x, y)$, $C=\psi(x, y)$, la funzione $\varphi(x_1, y)$ sarà divisibile per $\psi(x_1, y)$ poiché si annullerà per tutti i valori di y che sono radici dell'equazione $\psi(x_1, y)=0$; e similmente $\varphi(x_2,y)$ sarà divisibile per $\psi(x_2, y),\ldots$, e $\varphi(x_m, y)$ per $\psi(x_m, y)$. Ordinando rispetto ad x le funzioni $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ si divida la prima per la seconda, e sia Q il quoziente, R il resto di grado inferiore al grado m del divisore: converrà che sia $R=0$ per tutti i valori $x = x_1, x_2,\ldots, x_m$ e quindi R sarà identicamente nullo qualunque sia x. Sarà dunque $\frac{\varphi(x,y)}{\psi(x,y)}=Q$ funzione intera di x che si potrà prendere per V, quando Q non abbia un denominatore funzione intera del solo y. Supposto $Q=\frac{Q'}{f(y)}$, sarà $\varphi(x,y)=\frac{Q'\psi(x,y)}{f(y)}$ e quindi $\psi(x, y)$ ossia C sarà divisibile per $f(y)$: chiamate $y_1, y_2,\ldots, y_p$ le radici dell'equazione $f(y)=0$, si dovrà avere $V=\sqrt[i]{\frac{B}{A}}$ per ciascuno

di questi valori di x, qualunque sia x, talché per $y_1, y_2, \ldots, y_p$ la espressione $\sqrt{\frac{B}{A}}$ dovrà ridursi ad una funzione intera di x e se non si riduce il problema non sarà possibile, ecc. ecc.

Si procederà similmente nel caso di tre o più variabili. Ma credo che ciò basti per farvi conoscere il metodo e vi prego a pensarvi un momento e dirmi se lo giudicate idoneo al fine desiderato.

Terminando vi rammento la promessa di mandarmi il programma dello Schiaparelli[656] e mi ripeto

V^ro aff.mo
Angelo Genocchi

P. S.: Non mancate di intervenire all'adunanza del Con. Sup. d'istr. in cui si discuterà pel concorso alla cattedra d'Introduzione in Pavia.

III
[LETTERA]

ANGELO GENOCCHI A FRANCESCO BRIOSCHI
[MILANO]

Torino, 10 Novembre 1869

Cariss. amico

Ricordatevi di mandare due copie dell'ultimo volume della Società dei XL[657] al Commen. Angelo Sismonda[658], Direttore del Museo Mineralogico, ecc., Senatore del Regno, cioè due copie del tomo 1° parte II (serie terza), una per lui stesso e una per me.

In un articolo bibliografico pel *Bullettino* del principe Boncompagni[659], parlo del trascendente

$$W(u) = \int_0^K log(1 - k^2 sn^2 u\, sn^2 v)\, dv$$

e accenno ad alcune idee da voi indicatemi in una lettera del febbraio 1858[660].

---

[656] Cfr. nt. 13, lett. 33.
[657] Cfr. nt. 12, lett. 35.
[658] Angelo Sismonda (1807-1878).
[659] Trattasi del *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche* fondato e mantenuto in vita dal 1868 al 1887 dal principe Baldassarre Boncompagni Ludovisi (1821-1894). L'articolo bibliografico di Genocchi, quasi certamente è: *Rassegna d'alcuni scritti relativi all'addizione degl'integrali ellittici ed abeliani*, «Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche», t. III (1870), pp. 47-66.
[660] La lettera è quella del 5 Febbraio 1858, qui raccolta sotto il numero 10.

Dico presso a poco: "In quel tempo il prof. Brioschi mi osservò che dalle formole di trasformazione o moltiplicazione si possono dedurre alcune proprietà del trascendente $W(u)$, e che per esempio essendo $W(u+iK')=\int_0^u log(1-\frac{sn^2 v}{sn^2 u})dv$, se ne deduce $W(u+iK')-W(u)$, e se si pone $u=\omega=\frac{2mK+2m'iK'}{n}$ e si somma, si ottiene sotto il segno integrale la espressione $log\frac{sn(nv)}{n\cdot sn\, v}$, talché ne risulta $\Sigma[W(\omega)-W(\omega+iK')]=K\ log\ n$, e altre simili."

Se non vi piace d'esser nominato per questo soggetto, invece delle parole *il prof. Brioschi* metterò *un amico*.

Se non mi rispondete, riterrò che acconsentiate a lasciare quel fatto come sta.

Nello stesso articolo cito anche una estensione da voi fatta del teorema d'Abel sugl'integrali multipli (Giornale dell'Istituto Lombardo, 1856)[661].

Avete nulla da aggiungere a quella vostra Nota che mi permettiate di indicare nel mio articolo?

Farò un cenno eziandio d'una Nota del prof. Mainardi (st.o Giornale 1855)[662] in cui estende il teorema generale d'Abel ad un sistema di più equazioni a più incognite, ma confesso che non capisco la sua dimostrazione, anzi la credo assolutamente inammissibile.

Ho scambiato in queste vacanze due o tre lettere con Hoüel[663]. È un pover'uomo che non sa scrivere due righe senza contraddirsi. Stupisco che da lui vi abbiate lasciato imporre il programma di geometria pe' nostri licei.

Sento che la Facoltà matematica di Pavia ha appoggiato il Galilei Belardi. Vogliate favorirlo presso il Ministero.

State sano e credetemi

V^ro^ affezionat.o
Angelo Genocchi

---

[661] F. Brioschi, *Sopra un'estensione del teorema di Abel*, «Giornale dell'I.R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti e Biblioteca Italiana», t. VIII (1856), pp. 333-335, in *Opere matematiche*, cit. in nt. 11, lett. 3, t. III, pp. 143-145.

[662] G. Mainardi, *Intorno alla Memoria di Abel: "Sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes"*, «Giornale dell'I.R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti e Biblioteca Italiana », t. VII (1855), pp. 427-434.

[663] Cfr. nt. 6, lett. 50.

IV
[LETTERA]

ANGELO GENOCCHI A FRANCESCO BRIOSCHI
[MILANO]

Torino (Via di Po N° 38), 25 Luglio 1886

Carissimo Brioschi

Fa una caldo soffocante che mi obbliga a lasciar Torino e a cercar un po' di refrigerio nei monti o in riva al mare. Non ho ancora deciso dove andrò. Ma intanto mi preme di avvertirvi pregandovi a disporre perché gli atti dell'Accademia dei Lincei non mi siano più mandati direttamente ma siano invece indirizzati alla *R. Accademia delle Scienze di Torino* che me li trasferirà dove mi troverò oppure me li consegnerà al mio ritorno.

Hermite[664] mi scrive che vi aspettano a Parigi ma anche là fa molto caldo. Se vi andate, cercate di consolare quel povero Hermite che ha sempre qualcosa che gli dà fastidio.

Voi pubblicate spesso lavori importanti ed io me ne rallegro di cuore.

A me la vita è di peso: la difficoltà di muovermi e l'oscurarsi sempre più forte della vista mi rendono sempre più mal agevole il sopportarla.

Hermite e Catalan[665] mi hanno scritto in favore di *Ernesto Cesàro*[666] che ha fatto molte pubblicazioni e concorre a diverse cattedre. Egli abita a Torre Annunziata e si trova in gravi strettezze finanziarie, avendo da mantenere oltre sé stesso la moglie e tre figli: ha 27 anni. Tra le cattedre a cui aspira la più lucrosa sarebbe quella di Algebra nell'Università di Napoli. Battaglini[667] gli sarebbe favorevole ma non è nella Commissione: questa si compone di Betti[668], Beltrami[669], D'Ovidio[670], Tonelli[671], Caporali[672] (Povero Caporali!); supplenti sarebbero Ascoli[673], Arzelà[674], Mollame[675]. Potreste voi in qualche modo aiutare quel povero Cesàro?

Credetemi sempre

V^ro^ aff.mo
A. Genocchi

---

[664] Cfr. nt. 10, lett. 2.
[665] Eugène Charles Catalan (1814-1894).
[666] Cfr. nt. 4, lett. 65.
[667] Cfr. nt. 7, lett. 18.
[668] Cfr. nt. 1, lett. 1.
[669] Eugenio Beltrami (1835-1900).
[670] Enrico D'Ovidio (1843-1933).
[671] Alberto Tonelli (1849-1921).
[672] Ettore Caporali (1855-1886), morto suicida il 2 luglio precedente.
[673] Giulio Ascoli (1843-1896).
[674] Cesare Arzelà (1847-1912).
[675] Vincenzo Mollame (1848-1911).

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXXIII, (2006) pp. 387-402

A note on the nonlinear stability of laminar mhd flows in a porous medium in the presence of brinkman law

Nota di Salvatore Rionero [1] e Luigi Vergori[2]

Presentata dal Socio Prof. S. Rionero
(Adunanza del 3 novembre 2006)

Abstract - The stability of plane parallel shear flows in a horizontal porous layer, filled by an incompressible electrically conducting fluid embedded in a constant magnetic field, is studied assuming valid the Brinkman model for flows in a porous medium. In particular it is shown that, for two-dimensional perturbations in the plane spanned by the seepage velocity and the embedding magnetic fields, the linear theory and the energy method lead to identical results.

Riassunto - Si studia la stabilità dei moti piani paralleli di un fluido incompressibile elettroconduttore in uno strato poroso orizzontale sotto l'azione di un campo magnetico costante, assumendo valida la legge di Brinkman. In particolare si dimostra che, per perturbazioni bidimensionali c'è coincidenza tra i risultati della teoria lineare e quelli del metodo in energia.

1 Introduction

Let $(O, \mathbf{e}_i)(i = 1, 2, 3)$ be a cartesian frame of reference with $\mathbf{e}_3$ pointed vertically upward and let $\Omega_d = \mathbb{R}^2 \times (-d, d)$ $(d = const > 0)$ be the horizontal porous layer bounded by the planes $z = \pm d$, assumed both rigid, electrically non conducting

[1]Università di Napoli Federico II. Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli". Complesso Universitario Monte S. Angelo. Via Cinzia, 80126 Napoli - ITALIA. E-mail: rionero@unina.it

[2]Università degli Studi di Lecce. Dipartimento di Matematica "E. De Giorgi". Strada prov. per Arnesano, 73100 Lecce-ITALIA. E-mail: luigi.vergori@unile.it

and at rest or in motion parallel to the plane $z = 0$. As the fluid filling Ω_d is concerned we assume that it is homogeneous, electrically conducting, embedded in a constant magnetic field $\mathbf{H}_0 = H_0\mathbf{e}_3$ and submitted to a conservative force $\mathbf{F}$ with potential $\mathcal{U}$. As it is well known the non-relativistic MHD equations governing the motion are [1]:

$$\begin{cases} \frac{\rho_0}{\epsilon}\mathbf{v}_t = -\nabla p^* - \frac{\mu_1}{K}\mathbf{v} + \mu_2\Delta\mathbf{v} + \mu_e(H_0\mathbf{e}_3 + \mathbf{H})\cdot\nabla\mathbf{H} \\ \nabla\cdot\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{H} = 0 \\ \mathbf{H}_t + \nabla\times[(H_0\mathbf{e}_3 + \mathbf{H})\times\mathbf{v}] = \eta\Delta\mathbf{H} \end{cases} \tag{1}$$

with

$\mathbf{v} = (U, V, W)$ the seepage velocity, ρ_0 the density of the fluid,

$\mathbf{H}$ the induced magnetic field, μ_e the magnetic permeability of the fluid,

μ_i $(i = 1, 2)$ viscosity coefficients, η the magnetic viscosity of the fluid,

ϵ the porosity of the medium, K the permeability of the medium,

$p^* = p + \frac{\mu_e}{2}|H_0\mathbf{e}_3 + \mathbf{H}|^2 - \rho_0\mathcal{U}$ the generalized pressure.

To equations (1) we append the boundary conditions

$$\begin{cases} U(x,y,-d,t) = U_1(x,y,t), \quad U(x,y,d,t) = U_2(x,y,t) \\ V(x,y,-d,t) = V_1(x,y,t), \quad V(x,y,d,t) = V_2(x,y,t) \\ W(x,y,-d,t) = W(x,y,d,t) = 0 \\ \mathbf{H}(x,y,-d,t) = \mathbf{H}(x,y,d,t) = \mathbf{0} \end{cases} \tag{2}$$

with U_i, V_i $(i = 1, 2)$ assigned regular fields on $\mathbb{R}^2 \times [0. + \infty)$.

The stability of laminar MHD flows occurring in Ω_d has been studied in [2][3]. Precisely in [2] the fluid is assumed inviscid with a finite electrical conductivity and the validity of the Boussinesq approximation in evaluating the vertical component of the weight $\rho\mathbf{g}$ is requested. Then conditions guranteeing the linear and non-linear universal stability are found but the stability limits obtained from linear theory and energy analysis do not coincide. In the present paper, assuming valid the Brinkman model for flows in a porous medium, we study the linear and non-linear stability of the basic one-dimensional laminar solutions of (1) and show that, for two-dimensional disturbances in the plane spanned by the seepage velocity and the embedding magnetic fields, linear theory and energy method lead to identical results *for stability*. The plan of the paper is as follows.

[3]The stability of MHD laminar flows, in different situations, is also studied in [3, 4, 5].

We begin by considering some preliminaries and introducing the laminar MHD flow m_0 (Sect. 2), then, by using the normal mode tecnique ([6, 7]) and the energy method ([8, 9]), we study linear and non-linear stability (Sections 3 and 4). Then we show that m_0 is globally non-linearly exponentially stable with respect to laminar two-dimensional disturbaces normal to the embedding magnetic field. Finally we give an estimate of the critical Hartmann number below wich the flow m_0 is stable (Sect.5). In Appendix we prove that the functional introduced in Sect. 4 admits maximum by following the proof of a similar variational problem in [10].

2 Preliminaries and laminar flows

Setting

$$(x^*, y^*, z^*) = \mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{d}, \quad t^* = \frac{\mu_2}{\rho_0 d^2} t, \quad \mathbf{v}^* = \frac{\rho_0 d}{\mu_2}\mathbf{v},$$

$$\mathbf{H}^* = \frac{\mathbf{H}}{H_0}, \quad P^* = \frac{\left(p + \frac{\mu_e}{2}|H_0\mathbf{e}_3 + \mathbf{H}|^2 - \rho_0 \mathcal{U}\right) K\rho_0}{\mu_1\mu_2},$$

the dimensionless equations governing the motion (omitting the stars) are

$$\begin{cases} \gamma_a \mathbf{v}_t = -\nabla P - \mathbf{v} + \tilde{D}a\Delta\mathbf{v} + \tilde{D}aP_m(\mathbf{H}\cdot\nabla\mathbf{H} + \mathbf{H}_z) \\ \nabla\cdot\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{H} = 0 \\ \mathbf{H}_t + \nabla\times[(\mathbf{e}_3 + \mathbf{H})\times\mathbf{v}] = \frac{1}{R_m}\Delta\mathbf{H} \end{cases} \tag{3}$$

where

$$\tilde{D}a = \frac{K\mu_2}{d^2\mu_1}, \quad \gamma_a = \frac{\tilde{D}a}{\epsilon}, \quad P_m = \frac{\mu_e H_0^2 d^2 \rho_0}{\mu_2^2}, \quad R_m = \frac{\mu_2}{\eta\rho_0}, \quad M = \sqrt{P_m R_m} \tag{4}$$

are respectively the Darcy number, the non dimensional acceleration, the magnetic pressure, the magnetic Reynolds and the Hartmann numbers.

Looking for the one-dimensional laminar flows, we set

$$\begin{cases} \mathbf{v} = U(z)\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{H} = H(z)\mathbf{e}_1. \end{cases} \tag{5}$$

From (1), it turns out that (U, H) have to fulfil the system:

$$\begin{cases} \nabla P = \left(-U + \tilde{D}a\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}z^2} + \tilde{D}aP_m\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}z}\right)\mathbf{e}_1 \\ \frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}z^2} + R_m\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Setting

$$\tau = \sqrt{\frac{1+\tilde{D}aM^2}{\tilde{D}a}} \tag{7}$$

and denoting by A_i $(i=0,1,2)$, B_i $(i=1,2)$ and p_0 real constants, it is easily seen that

$$\begin{cases} U(z) = A_1 e^{\tau z} + A_2 e^{-\tau z} - \dfrac{A_0 + \tilde{D}aP_m B_1}{\tau^2 \tilde{D}a} \\ H(z) = -R_m \left[\dfrac{A_1 e^{\tau z} - A_2 e^{-\tau z}}{\tau} - \dfrac{A_0 z}{\tau^2 \tilde{D}a} \right] - \dfrac{B_1 z}{\tau^2 \tilde{D}a} + B_2 \\ P = A_0 x + p_0 \end{cases} \tag{8}$$

is the general solution of (6).

In view of $(2)_4$ it follows that

$$\begin{cases} B_1 = A_0 R_m - \tau \tilde{D}a R_m (A_1 + A_2) \sinh \tau \\ B_2 = \dfrac{R_m (A_1 - A_2) \cosh \tau}{\tau}, \end{cases}$$

hence

$$\begin{cases} U(z) = A_1 e^{\tau z} + A_2 e^{-\tau z} - A_0 + \dfrac{\tilde{D}aM^2 (A_1 + A_2) \sinh \tau}{\tau} \\ H(z) = \dfrac{R_m}{\tau} \big[-(A_1 e^{\tau z} - A_2 e^{-\tau z}) \\ \qquad + z(A_1 + A_2) \sinh \tau + (A_1 - A_2) \cosh \tau \big] \\ P = A_0 x + p_0. \end{cases} \tag{9}$$

We observe that, as special cases of (9), for

(i) $U(\pm 1) = 0$ and $A_0 \neq 0$, one obtains the Hartmann flow:

$$\begin{cases} U(z) = \dfrac{A_0 \tau \cosh \tau}{\tau \cosh \tau + \tilde{D}aM^2 \sinh \tau} \left[\dfrac{\cosh(\tau z)}{\cosh \tau} - 1 \right] \\ H(z) = \dfrac{R_m A_0 \sinh \tau}{\tau \cosh \tau + \tilde{D}aM^2 \sinh \tau} \left[z - \dfrac{\sinh(\tau z)}{\sinh \tau} \right] \\ P = A_0 x + p_0; \end{cases} \tag{10}$$

(ii) $A_0 = 0$, $U(-1) = -V$, $U(1) = V$ with $V = const$, the magnetic Couette flow is obtained:

$$\begin{cases} U(z) = \dfrac{V \sinh(\tau z)}{\sinh \tau} \\ H(z) = \dfrac{R_m V \coth \tau}{\tau} \left[1 - \dfrac{\cosh(\tau z)}{\cosh \tau} \right] \\ P = p_0. \end{cases} \tag{11}$$

Finally we remark that in the limit $M \to 0$, $(10)_1$ reduces to the well known hydrodynamic Poiseuille flow, while $(11)_1$ reduces to the ordinary Couette flow.

3 Linear stability

Let $m_0 = (\mathbf{v}, \mathbf{H}, P)$ be the basic motion given by (9) and denote by $(\mathbf{u}, \mathbf{h}, p_1)$ a perturation to m_0. It follows that in $\Omega_1 \times (0, +\infty)$, with $\Omega_1 = \mathbb{R}^2 \times (-1, 1)$, it turns out that:

$$\begin{cases} \gamma_a \mathbf{u}_t = -\nabla p_1 - \mathbf{u} + \tilde{D}a\Delta\mathbf{u} \\ \qquad +\tilde{D}aP_m\left[\mathbf{h}\cdot\nabla\mathbf{h} + H'(z)h_3\mathbf{e}_1 + H(z)\mathbf{h}_x + \mathbf{h}_z\right] \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = \nabla\cdot\mathbf{h} = 0 \\ \mathbf{h}_t = -\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{h} - H'(z)u_3\mathbf{e}_1 + \mathbf{h}\cdot\nabla\mathbf{u} + H(z)\mathbf{u}_x \\ \qquad +\mathbf{u}_z - U(z)\mathbf{h}_x + U'(z)h_3\mathbf{e}_1 + \frac{1}{R_m}\Delta\mathbf{h} \end{cases} \tag{12}$$

under the initial and boundary conditions:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{h}_0(\mathbf{x}) \tag{13}$$

$$\mathbf{u}(x, y, \pm 1, t) = \mathbf{h}(x, y, \pm 1, t) = \mathbf{0}, \tag{14}$$

with $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{h}_0$ assigned divergence free regular fields.

Linearizing we obtain the equations

$$\begin{cases} \gamma_a \mathbf{u}_t = -\nabla p_1 - \mathbf{u} + \tilde{D}a\Delta\mathbf{u} + \tilde{D}aP_m\left[H'(z)h_3\mathbf{e}_1 + H(z)\mathbf{h}_x + \mathbf{h}_z\right] \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = \nabla\cdot\mathbf{h} = 0 \\ \mathbf{h}_t = -H'(z)u_3\mathbf{e}_1 + H(z)\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z - U(z)\mathbf{h}_x + U'(z)h_3\mathbf{e}_1 + \frac{1}{R_m}\Delta\mathbf{h} \end{cases} \tag{15}$$

and look for periodic solutions in the x, y directions

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(x, y, z, t) = \hat{\mathbf{u}}(z)\exp[\mathrm{i}(a_x x + a_y y) + ct] \\ \mathbf{h}'(x, y, z, t) = \hat{\mathbf{h}}(z)\exp[\mathrm{i}(a_x x + a_y y) + ct] \\ p_1'(x, y, z, t) = \hat{p_1}(z)\exp[\mathrm{i}(a_x x + a_y y) + ct] \end{cases} \tag{16}$$

with $c = c_r + \mathrm{i}c_i$.

Setting $\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}, a^2 = a_x^2 + a_y^2$, from (16) we obtain the following system of ordinary differential equations:

$$\begin{cases} \gamma_a c\hat{u}_1 + \hat{u}_1 - \tilde{D}a(\mathrm{D}^2 - a^2)\hat{u}_1 - \tilde{D}aP_m(\mathrm{D}\hat{h}_1 + \mathrm{i}a_x H\hat{h}_1 + H'\hat{h}_3) = -\mathrm{i}a_x\hat{p}_1 \\ \gamma_a c\hat{u}_2 + \hat{u}_2 - \tilde{D}a(\mathrm{D}^2 - a^2)\hat{u}_2 - \tilde{D}aP_m(\mathrm{D}\hat{h}_2 + \mathrm{i}a_x H\hat{h}_2) = -\mathrm{i}a_y\hat{p}_1 \\ \gamma_a c\hat{u}_3 + \hat{u}_3 - \tilde{D}a(\mathrm{D}^2 - a^2)\hat{u}_3 - \tilde{D}aP_m(\mathrm{D}\hat{h}_3 + \mathrm{i}a_x H\hat{h}_3) = \mathrm{D}\hat{p}_1 \\ \mathrm{D}\hat{u}_3 = -\mathrm{i}a_x\hat{u}_1 - \mathrm{i}a_y\hat{u}_2 \\ \mathrm{D}\hat{h}_3 = -\mathrm{i}a_x\hat{h}_1 - \mathrm{i}a_y\hat{h}_2 \\ c\hat{h}_1 + \mathrm{i}a_x U\hat{h}_1 + H'\hat{u}_3 - U'\hat{h}_3 - \mathrm{D}\hat{u}_1 - \mathrm{i}a_x H\hat{u}_1 - R_m^{-1}(\mathrm{D}^2 - a^2)\hat{h}_1 = 0 \\ c\hat{h}_2 + \mathrm{i}a_x U\hat{h}_2 - \mathrm{D}\hat{u}_2 - \mathrm{i}a_x H\hat{u}_2 - R_m^{-1}(\mathrm{D}^2 - a^2)\hat{h}_2 = 0 \\ c\hat{h}_3 + \mathrm{i}a_x U\hat{h}_3 - \mathrm{D}\hat{u}_3 - \mathrm{i}a_x H\hat{u}_3 - R_m^{-1}(\mathrm{D}^2 - a^2)\hat{h}_3 = 0 \end{cases} \tag{17}$$

with $\mathbf{u}' = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3), \mathbf{h}' = (\hat{h}_1, \hat{h}_2, \hat{h}_3)$.

Introducing the Squire type transformations

$$\begin{cases} \tilde{u} = a_x\hat{u}_1 + a_y\hat{u}_2, \quad \tilde{w} = a\hat{u}_3, \\ \tilde{h} = a_x\hat{h}_1 + a_y\hat{h}_2, \quad \tilde{k} = a\hat{h}_3, \\ a_x U = a\tilde{U}, \quad a_x H = a\tilde{H}, \\ \tilde{p} = a\hat{p}_1, \end{cases} \tag{18}$$

the three-dimensional problem (17) is reduced to the equivalent two-dimensional one

$$\begin{cases} \left[\gamma_a c + 1 - \tilde{D}a\left(\mathrm{D}^2 - a^2\right)\right]\tilde{u} - \tilde{D}aP_m\left[\left(\mathrm{D} + \mathrm{i}a\tilde{H}\right)\tilde{h} + \tilde{H}'\tilde{k}\right] = -\mathrm{i}a\tilde{p} \\ \left[\gamma_a c + 1 - \tilde{D}a\left(\mathrm{D}^2 - a^2\right)\right]\tilde{w} - \tilde{D}aP_m\left(\mathrm{D} + \mathrm{i}a\tilde{H}\right)\tilde{k} = -\mathrm{D}\tilde{p} \\ \mathrm{D}\tilde{w} = -\mathrm{i}a\tilde{u} \\ \mathrm{D}\tilde{k} = -\mathrm{i}a\tilde{h} \\ \left[c + \mathrm{i}a\tilde{U} - R_m^{-1}\left(\mathrm{D}^2 - a^2\right)\right]\tilde{h} + \tilde{H}'\tilde{w} - \tilde{U}'\tilde{k} - \left(\mathrm{D} + \mathrm{i}a\tilde{H}\right)\tilde{u} = 0 \\ \left[c + \mathrm{i}a\tilde{U} - R_m^{-1}\left(\mathrm{D}^2 - a^2\right)\right]\tilde{k} - \left(\mathrm{D} + \mathrm{i}a\tilde{H}\right)\tilde{w} = 0 \end{cases} \tag{19}$$

with

$$\tilde{u} = \tilde{w} = \tilde{h} = \tilde{k} = 0 \quad \text{at} \quad z = \pm 1. \tag{20}$$

We observe that (19) have the same mathematical form of (17) with $a_y = u_2 = h_2 = 0$: once the solution of (19) has been obtained, one immediately

obtains the solution of (17) by means of (18). Therefore it is sufficient to consider only two-dimensional perturbations $\mathbf{u}' = (u_1', 0, u_3')$, $\mathbf{h}' = (h_1', 0, h_3')$ with

$$u_1' = \frac{\partial \psi_1}{\partial z}, \quad u_3' = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x},$$

$$h_1' = \frac{\partial \psi_2}{\partial z}, \quad h_3' = -\frac{\partial \psi_2}{\partial x}.$$

On setting

$$\begin{cases} \psi_1(x,z,t) = \phi_1(z)\exp(\mathrm{i}ax + ct) \\ \psi_2(x,z,t) = \phi_2(z)\exp(\mathrm{i}ax + ct) \end{cases}$$

then

$$\begin{cases} \tilde{u} = \mathrm{D}\phi_1, \quad \tilde{w} = -\mathrm{i}a\phi_1 \\ \tilde{h} = \mathrm{D}\phi_2, \quad \tilde{k} = -\mathrm{i}a\phi_2 \end{cases}$$

hence, substituting into (19), we have

$$\begin{cases} \left[\gamma_a c + 1 - \tilde{D}a(\mathrm{D}^2 - a^2)\right]\mathrm{D}\phi_1 - \tilde{D}aP_m\left(\mathrm{D} + \mathrm{i}a\tilde{H}\right)\mathrm{D}\phi_2 \\ \qquad + \tilde{D}aP_m\mathrm{i}a\tilde{H}'\phi_2 = -\mathrm{i}a\tilde{p} \\ -\mathrm{i}a\left[\gamma_a c + 1 - \tilde{D}a(\mathrm{D}^2 - a^2)\right]\phi_1 + \mathrm{i}a\tilde{D}aP_m(\mathrm{D} + \mathrm{i}a\tilde{H})\phi_2 = -\mathrm{D}\tilde{p} \\ \left[c + \mathrm{i}a\tilde{U} - R_m^{-1}(\mathrm{D}^2 - a^2)\right]\mathrm{D}\phi_2 - \mathrm{i}a\tilde{H}'\phi_1 \\ \qquad + \mathrm{i}a\tilde{U}'\phi_2 - \left(\mathrm{D} + \mathrm{i}a\tilde{H}\right)\mathrm{D}\phi_1 = 0 \\ \left[c + \mathrm{i}a\tilde{U} - R_m^{-1}\left(\mathrm{D}^2 - a^2\right)\right]\phi_2 - (\mathrm{D} + \mathrm{i}a\tilde{H})\phi_1 = 0 \end{cases} \tag{21}$$

under the boundary conditions

$$\phi_j(\pm 1) = \mathrm{D}\phi_j(\pm 1) = 0, \quad j = 1, 2. \tag{22}$$

Eliminating the pressure $\tilde{p}$ between equations $(21)_1$, $(21)_2$ and applying the operator $\mathrm{D}^2 - a^2$ to equation $(21)_4$, it easily follows

$$\begin{cases} \left[\gamma_a c + 1 - \tilde{D}a(\mathrm{D}^2 - a^2)\right](\mathrm{D}^2 - a^2)\phi_1 \\ \qquad = \tilde{D}aP_m\left[(\mathrm{D} + \mathrm{i}a\tilde{H})(\mathrm{D}^2 - a^2) - \mathrm{i}a\tilde{H}''\right]\phi_2 \\ \left\{\left[c - R_m^{-1}(\mathrm{D}^2 - a^2)\right](\mathrm{D}^2 - a^2) + \mathrm{i}a(\tilde{U}'' - a^2\tilde{U}) + 2\mathrm{i}a\tilde{U}'\mathrm{D} + \mathrm{i}a\tilde{U}\mathrm{D}^2\right\}\phi_2 \\ \qquad = \left[(\mathrm{D}^2 - a^2)\mathrm{D} + \mathrm{i}a(\tilde{H}'' - a^2\tilde{H}) + 2\mathrm{i}a\tilde{H}'\mathrm{D} + \mathrm{i}a\tilde{H}\mathrm{D}^2\right]\phi_1. \end{cases} \tag{23}$$

Denoting by ϕ_j^* the complex coniugate of ϕ_j $(j=1,2)$, multiplying $(21)_1$ by ϕ_1^*, $(21)_2$ by $\zeta P_m \phi_2^*$, summing and integrating over the interval $(-1,1)$ we obtain

$$\left[(\gamma_a c+1)(I_1^2+a^2I_0^2)+\tilde{D}a(I_2^2+2a^2I_1^2+a^4I_0^2)\right] \tag{24}$$
$$+\tilde{D}aP_m\left[c(J_1^2+a^2J_0^2)+R_m^{-1}(J_2^2+2a^2J_1^2+a^4J_0^2)\right]=\tilde{D}aP_m(Q+R),$$

with $(n=0,1,2)$

$$I_n=\int_{-1}^{1}|\mathrm{D}^n\phi_1|^2\mathrm{d}z, \quad J_n=\int_{-1}^{1}|\mathrm{D}^n\phi_2|^2\mathrm{d}z,$$

$$Q=-\int_{-1}^{1}\mathrm{D}^3\phi_2\phi_1^*\mathrm{d}z+a^2\int_{-1}^{1}\mathrm{D}\phi_2\phi_1^*\mathrm{d}z \tag{25}$$
$$-2\mathrm{i}a\int_{-1}^{1}\tilde{H}'\phi_2\mathrm{D}\phi_1^*\mathrm{d}z-\mathrm{i}a\int_{-1}^{1}\tilde{H}\phi_2\mathrm{D}^2\phi_1^*\mathrm{d}z+\mathrm{i}a^3\int_{-1}^{1}\tilde{H}\phi_2\phi_1^*\mathrm{d}z$$

and

$$R=\mathrm{i}a\int_{-1}^{1}\left(\tilde{U}''-a^2\tilde{U}\right)|\phi_2|^2\mathrm{d}z+2\mathrm{i}a\int_{-1}^{1}\tilde{U}'\mathrm{D}\phi_2\phi_2^*\mathrm{d}z \tag{26}$$
$$-\int_{-1}^{1}\mathrm{D}^3\phi_1\phi_2^*\mathrm{d}z+\mathrm{i}a\int_{-1}^{1}\tilde{U}\mathrm{D}^2\phi_2\phi_2^*\mathrm{d}z-\mathrm{i}a\int_{-1}^{1}\left(\tilde{H}''-a^2\tilde{H}\right)\phi_1\phi_2^*\mathrm{d}z$$
$$-2\mathrm{i}a\int_{-1}^{1}\tilde{H}'\mathrm{D}\phi_1\phi_2^*\mathrm{d}z+a^2\int_{-1}^{1}\mathrm{D}\phi_1\phi_2^*\mathrm{d}z-\mathrm{i}a\int_{-1}^{1}\tilde{H}\mathrm{D}^2\phi_1\phi_2^*\mathrm{d}z.$$

Therefore

$$c_r=\left\{\tilde{D}aP_m\mathrm{Re}(Q+R)-\left[(I_1^2+a^2I_0^2)+\tilde{D}a(I_2^2+2a^2I_1^2+a^4I_0^2)\right.\right. \tag{27}$$
$$\left.\left.+\frac{\tilde{D}aP_m}{R_m}(J_2^2+2a^2J_1^2+a^4J_0^2)\right]\right\}\left\{\gamma_a(I_1^2+a^2I_0^2)+\tilde{D}aP_m(J_1^2+a^2J_0^2)\right\}^{-1},$$

$$c_i=\frac{\tilde{D}aP_m\mathrm{Im}(Q+R)}{\gamma_a(I_1^2+a^2I_0^2)+\tilde{D}aP_m(J_1^2+a^2J_0^2)}, \tag{28}$$

with

$$\mathrm{Re}(Q+R)=\frac{\mathrm{i}a}{2}\int_{-1}^{1}\tilde{U}'(\mathrm{D}\phi_2\phi_2^*-\mathrm{D}\phi_2^*\phi_2)\mathrm{d}z \tag{29}$$
$$+\frac{\mathrm{i}a}{2}\int_{-1}^{1}\tilde{H}'(\mathrm{D}\phi_1\phi_2^*-\mathrm{D}\phi_1^*\phi_2)\mathrm{d}z+\frac{\mathrm{i}a}{2}\int_{-1}^{1}\tilde{H}'(\phi_1\mathrm{D}\phi_2^*-\phi_1^*\mathrm{D}\phi_2)\mathrm{d}z$$

and

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(Q+R) &= \int_{-1}^{1}(\phi_1 \mathrm{D}^3\phi_2^* - \phi_1^*\mathrm{D}^3\phi_2)\mathrm{d}z \qquad (30)\\
&-a^2\int_{-1}^{1}(\phi_1\mathrm{D}\phi_2^* - \phi_1^*\mathrm{D}\phi_2)\mathrm{d}z - \mathrm{i}a\int_{-1}^{1}H(\mathrm{D}\phi_1\phi_2^* + \mathrm{D}\phi_1^*\phi_2)\mathrm{d}z\\
&+\mathrm{i}a\int_{-1}^{1}H(\mathrm{D}\phi_1\mathrm{D}\phi_2^* + \mathrm{D}\phi_1^*\mathrm{D}\phi_2)\mathrm{d}z + \mathrm{i}a^3\int_{-1}^{1}H(\phi_1\phi_2^* + \phi_1^*\phi_2)\mathrm{d}z\\
&+\mathrm{i}a\int_{-1}^{1}(U'' - a^2U)|\phi_2|^2\mathrm{d}z - \mathrm{i}a\int_{-1}^{1}U|\mathrm{D}\phi_2|^2\mathrm{d}z\\
&+\frac{\mathrm{i}a}{2}\int_{-1}^{1}U'(\mathrm{D}\phi_2\phi_2^* + \mathrm{D}\phi_2^*\phi_2)\mathrm{d}z + \frac{\mathrm{i}a}{2}\int_{-1}^{1}H'(\phi_1\mathrm{D}\phi_2^* + \phi_1^*\mathrm{D}\phi_2)\mathrm{d}z\\
&+\frac{\mathrm{i}a}{2}\int_{-1}^{1}H'(\mathrm{D}\phi_1\phi_2^* + \mathrm{D}\phi_1^*\phi_2)\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Setting

$$\begin{cases}
\mathcal{I} = \tilde{D}a\mathrm{Re}(Q+R)\\
\mathcal{D} = R_m(I_1^2 + a^2I_0^2) + R_m\tilde{D}a(I_2^2 + 2a^2I_1^2 + a^4I_0^2) \qquad (31)\\
\qquad +\tilde{D}aP_m(J_2^2 + 2a^2J_1^2 + a^4J_0^2)
\end{cases}$$

and introducing the space of kinetically admissible fields

$$\mathscr{H} = \left\{(\phi_1,\phi_2) \in \mathrm{H}^2(-1,1)/\phi_i(\pm1) = \mathrm{D}\phi_i(\pm1) = 0 \quad \forall i = 1,2\right\},$$

from (27) we can state the following theorem.

Theorem 1 *If*

$$M < M_c,$$

with

$$\frac{1}{M_c^2} = \max_{\mathscr{H}}\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{D}}, \qquad (32)$$

then the basic laminar motion m_0 is linearly stable.

The Euler-Lagrange equations corresponding to the variational problem (32) are:

$$\begin{cases}
R_m\left[-1 + \tilde{D}a(\mathrm{D}^2 - a^2)\right](\mathrm{D}^2 - a^2)\phi_1 + \mathrm{i}a\sigma\tilde{H}''\phi_2 = 0\\
\tilde{D}aP_m(\mathrm{D}^2 - a^2)^2\phi_2 + \mathrm{i}a\sigma\left(-\tilde{H}''\phi_1 + 2\tilde{U}'\mathrm{D}\phi_2 + \tilde{U}''\phi_2\right) = 0
\end{cases} \qquad (33)$$

with $\phi_j(\pm 1) = \mathrm{D}\phi_j(\pm 1) = 0$ $(j = 1, 2)$, and hence M_c^2 is the least positive eigenvalue for the characteristic value problem (33)[4].

4 Coincidence between linear and non-linear stability with repect to two-dimensional perturbations in the xz plane

We introduce the Liapunov function:

$$E(t) = \frac{1}{2}(\gamma_a \|\mathbf{u}\|^2 + \tilde{D}aP_m\|\mathbf{h}\|^2)$$

where $\|\cdot\|$ denotes the $\mathrm{L}^2(\Omega)$ norm and $\Omega = \left[0, \frac{2\pi}{a_x}\right] \times \left[0, \frac{2\pi}{a_y}\right] \times [-1, 1]$ is the periodicity cell. Taking into account the periodicity and the boundary conditions, we find along the solutions of (12)

$$\dot{E}(t) = \frac{1}{R_m}\left[M^2\frac{\mathscr{I}(\mathbf{u},\mathbf{h})}{\mathscr{D}(\mathbf{u},\mathbf{h})} - 1\right]\mathscr{D}(\mathbf{u},\mathbf{h}), \tag{34}$$

where

$$\begin{cases} \mathscr{I}(\mathbf{u},\mathbf{h}) = \tilde{D}a\left[\int_\Omega U'(z)h_1h_3\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega H'(z)(h_3u_1 - h_1u_3)\mathrm{d}\Omega\right] \\ \mathscr{D}(\mathbf{u},\mathbf{h}) = R_m\left(\|\mathbf{u}\|^2 + \tilde{D}a\|\nabla\mathbf{u}\|^2\right) + \tilde{D}aP_m\|\nabla\mathbf{h}\|^2, \end{cases} \tag{35}$$

with $(\mathbf{u}, \mathbf{h}) \in \mathscr{W}$,

$$\mathscr{W} = \{(\mathbf{u},\mathbf{h}) \in (\mathrm{H}^1(\Omega))^6 / \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \nabla\cdot\mathbf{h} = 0, \mathbf{u}(x,y,\pm 1) = \mathbf{h}(x,y,\pm 1) = 0\}$$

represents the kinematically admissible fields.

The following theorem holds.

Theorem 2 *The functional* $\frac{\mathscr{I}}{\mathscr{D}}$ *admits maximum in* $\mathscr{W}$ *:*

$$\exists \max_{\mathscr{W}} \frac{\mathscr{I}}{\mathscr{D}} = \frac{1}{M_E^2}. \tag{36}$$

Proof. (See Appendix)

By assuming

$$M < M_E, \tag{37}$$

[4]Observe that the eigenvalues are real. The existence of M_c^2 will be a consequence of theorems 2 and 4.

from (34) and the inequality

$$\mathscr{D}(\mathbf{u},\mathbf{h}) \geq R_m \left(1+\tilde{D}a\pi_0^2\right)\|\mathbf{u}\|^2 + \tilde{D}aP_m\pi_0^2\|\mathbf{h}\|^2,$$

we obtain the energy inequality

$$\dot{E}(t) \leq \frac{1}{R_m}\left(\frac{M^2}{M_E^2}-1\right)\nu_0 E(t), \tag{38}$$

where

$$\nu_0 = 2\min\left\{\frac{R_m(1+\tilde{D}a\pi_0^2)}{\gamma_a}, \pi_0^2\right\}.$$

Integrating (38) we have unconditional non-linear exponential stability of the basic motion according to the following theorem.

Theorem 3 *If $M < M_E$ then the basic laminar motion m_0 is globally non-linearly exponentially stable:*

$$E(t) \leq E(0)\exp\left[\frac{1}{R_m}\left(\frac{M^2}{M_E^2}-1\right)\nu_0 t\right]. \tag{39}$$

The Euler-Lagrange equations corresponding to the variational problem (36) are

$$\begin{cases} \tilde{D}a\,[H'(z)h_3\mathbf{e}_1 - H'(z)h_1\mathbf{e}_3] + \lambda^{-1}R_m(\mathbf{u}-\tilde{D}a\Delta\mathbf{u}) = -\nabla p' \\ H'(z)u_1\mathbf{e}_3 - H'(z)u_3\mathbf{e}_1 + U'(z)h_3\mathbf{e}_1 + U'(z)h_1\mathbf{e}_3 - \lambda^{-1}P_m\Delta\mathbf{h} = -\nabla\chi \end{cases} \tag{40}$$

where p', χ are Lagrange multipliers associated with the divergence constraints. This system must be solved subject to the boundary conditions (14) and M_E^2 is then obtained as the least eigenvalue λ of this eigenvalue problem.

Let us consider now the set of two-dimensional disturbances in the xz-plane

$$\mathscr{V} = \left\{(\mathbf{u},\mathbf{h}) \in \mathscr{W} \Big/ \mathbf{u} = \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\mathbf{e}_1 - \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\mathbf{e}_3, \mathbf{h} = \frac{\partial\psi_2}{\partial z}\mathbf{e}_1 - \frac{\partial\psi_2}{\partial x}\mathbf{e}_3\right\}.$$

Since $\mathscr{V}$ is a closed subset of $\mathscr{W}$, by means of theorem 2

$$\exists \max_{\mathscr{V}} \frac{\mathscr{I}}{\mathscr{D}} = \frac{1}{M_E'^2} \leq \frac{1}{M_E^2}.$$

Therefore $M_E \leq M_E'$ and from theorem 3 we deduce that the two-dimensional disturbances in the xz-plane are more stable than three-dimensional ones.

Theorem 4 *For the perturbations* $(\mathbf{u}, \mathbf{h}) \in \mathcal{V}$ *there is coincidence between the conditions of linear and global non-linear stability.*

Proof. For the disturbances $(\mathbf{u}, \mathbf{h}) \in \mathcal{V}$ the Euler-Lagrange equations (40) reduce to

$$\begin{cases} R_m\left(-\Delta\psi_1 + \tilde{D}a\Delta^2\psi_1\right) + \lambda\tilde{D}aH''\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x} = 0 \\ P_m\Delta^2\psi_2 + \lambda\left(-H''\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x} + 2U'\dfrac{\partial^2\psi_2}{\partial x\partial z} + U''\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x}\right) = 0 \end{cases} \tag{41}$$

whose normal mode form is identical with equations (33). Then

$$M_c^2 = M_E'^2 \tag{42}$$

and hence the proof is completed. □

4.1 Remark

If the Brinkman law is assumed not valid the diffusive term in $(1)_1$ can be neglected and then the only laminar motion is the rest state

$$\begin{cases} U = 0 \\ H = 0 \\ P = p_0 \end{cases}$$

wich is non linearly stable as one can easily deduce from (34) and (35).

4.2 Remark

Let $\mathcal{S}$ be the set of the two-dimensional perturbations $(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ such that

$$\begin{cases} \mathbf{u}(z,t) = u_1(z,t)\mathbf{e}_1 + u_2(z,t)\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{h}(z,t) = h_1(z,t)\mathbf{e}_1 + h_2(z,t)\mathbf{e}_2. \end{cases} \tag{43}$$

Setting

$$G(t) = \frac{\gamma_a}{2}\int_{-1}^{1}|\mathbf{u}(z,t)|^2\mathrm{d}z + \frac{\tilde{D}aP_m}{2}\int_{-1}^{1}|\mathbf{h}(z,t)|^2\mathrm{d}z,$$

it is easy to check that the energy inequality (38) becomes

$$\dot{G}(t) \leq -\frac{\nu}{R_m}G(t), \tag{44}$$

where

$$\nu = \frac{1}{2}\min\left\{\frac{R_m\left(4+\pi^2\tilde{D}a\right)}{\gamma_a}, \pi^2\right\}.$$

Integrating (44) one can prove that m_0 is globally non-linearly exponentially stable with respect to laminar disturbances (43) for all Hartmann numbers according to

$$G(t) \leq G(0) \exp\left(-\frac{\nu}{R_m} t\right). \tag{45}$$

5 An estimate of M_c

In this section we give an estimate of $M_c = M'_E$. At first we prove the following

Lemma 1 *Let c be any eigenvalue of eigenvalue problem (33) with boundary conditions $\phi_j(\pm 1) = \mathrm{D}\phi_j(\pm 1) = 0 \quad (j = 1, 2)$. Then*

$$c_r \leq \max\left\{ \frac{\tilde{D}aP_m q - 1 - \tilde{D}a\left(\frac{\pi^2}{4} + a^2\right)}{\gamma_a}, p + q - \frac{1}{R_m}\left(\frac{\pi^2}{4} + a^2\right) \right\}$$

where $2p = \max_{z\in[-1,1]} |U'(z)|$, $2q = \max_{z\in[-1,1]} |H'(z)|$.

Proof. In view of

$$|\mathrm{Re}(Q+R)| \leq a\int_{-1}^{1} |U'||\mathrm{D}\phi_2||\phi_2|\mathrm{d}z + a\int_{-1}^{1} |H'||\mathrm{D}\phi_1||\phi_2|\mathrm{d}z + a\int_{-1}^{1} |H'||\phi_1||\mathrm{D}\phi_2|\mathrm{d}z,$$

by Schwartz and Cauchy inequalities it follows that

$$|\mathrm{Re}(Q+R)| \leq q(I_1^2 + a^2 I_0^2) + (p+q)(J_1^2 + a^2 J_0^2).$$

But

$$I_k^2 \geq \frac{\pi^2}{4} I_{k-1}^2, \quad J_k^2 \geq \frac{\pi^2}{4} J_{k-1}^2 \quad \forall k = 1, 2;$$

then

$$\begin{aligned} c_r \leq & \left\{ \left[\tilde{D}aP_m q - 1 - \tilde{D}a\left(\frac{\pi^2}{4} + a^2\right)\right](I_1^2 + a^2 I_0^2) \right. \\ & \left. + \tilde{D}aP_m \left[p + q - \frac{1}{R_m}\left(\frac{\pi^2}{4} + a^2\right)\right](J_1^2 + a^2 J_0^2) \right\} \cdot \\ & \cdot \left\{ \gamma_a (I_1^2 + a^2 I_0^2) + \tilde{D}aP_m (J_1^2 + a^2 J_0^2) \right\}^{-1} \\ \leq & \max\left\{ \frac{\tilde{D}aP_m q - 1 - \tilde{D}a\left(\frac{\pi^2}{4} + a^2\right)}{\gamma_a}, p + q - \frac{1}{R_m}\left(\frac{\pi^2}{4} + a^2\right) \right\}. \end{aligned} \tag{46}$$

□

It immediately follows that

Theorem 5 *Let*

$$\begin{cases} P_m q < \dfrac{4+\tilde{D}a\pi^2}{4\tilde{D}a} \\ R_m(p+q) < \dfrac{\pi^2}{4} \end{cases} \tag{47}$$

then the basic laminar motion m_0 is linearly stable.

Now it is easy to show that the conditions (47) are equivalent to the following one

$$M < \frac{1}{2}\sqrt{\min\left\{\frac{R_m(4+\tilde{D}a\pi^2)}{q\tilde{D}a}, \frac{P_m\pi^2}{p+q}\right\}}. \tag{48}$$

Appendix

In this Appendix, following the proof given in [10] to a similar variational problem, we prove theorem 2.

Proof of theorem 2. We set

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left[U'(z)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + U'(z)\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1\right],$$

$$\pi_0^2 = \frac{1}{4}\min\{a_x^2, a_y^2, \pi^2\},$$

observe that

$$\mathscr{I}(\mathbf{u},\mathbf{h}) = \tilde{D}a\left(\int_\Omega \mathbf{h}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{h}d\Omega + \int_\Omega (\nabla\times\mathbf{H})\cdot(\mathbf{h}\times\mathbf{u})\,d\Omega\right)$$

and deduce that the functional $\frac{\mathscr{I}}{\mathscr{D}}$ is bounded from above in $\mathscr{W}$ since, by the Cauchy and the Poincarè inequalities, we get

$$\begin{aligned}\frac{\mathscr{I}(\mathbf{u},\mathbf{h})}{\mathscr{D}(\mathbf{u},\mathbf{h})} &\le \tilde{D}a\frac{q\|\mathbf{u}\|^2 + (p+q)\|\mathbf{h}\|^2}{R_m(1+\tilde{D}a\pi_0^2)\|\mathbf{u}\|^2 + \tilde{D}aP_m\pi_0^2\|\mathbf{h}\|^2} \\ &\le \max\left\{\frac{q\tilde{D}a}{R_m(1+\tilde{D}a\pi_0^2)}, \frac{p+q}{P_m\pi_0^2}\right\}.\end{aligned}$$

In $\mathscr{W}$ we define the following norm

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{h})\|_{\mathscr{W}}^2 = \mathscr{D}(\mathbf{u},\mathbf{h}),$$

equivalent to the norm in $\mathscr{W}$ induced by $(\mathrm{H}^1(\Omega))^6$ norm

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{h})\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{h}\|^2 + \|\nabla\mathbf{h}\|^2.$$

We set

$$\frac{1}{M_E^2} = \sup_{\mathscr{W}} \frac{\mathscr{I}}{\mathscr{D}},$$

and let

$$\{(\mathbf{u}_n,\mathbf{h}_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{W}, \quad \|(\mathbf{u}_n,\mathbf{h}_n)\|_{\mathscr{W}} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

be a maximizing sequence:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathscr{I}(\mathbf{u}_n,\mathbf{h}_n) = \frac{1}{M_E^2}.$$

Since $\mathscr{W}$ is a weakly closed subspace of the weakly compact space $(\mathrm{H}^1(\Omega))^6$ and by Rellich-Kondrachov compact embedding theorem, there exists $(\mathbf{u}_*,\mathbf{h}_*) \in \mathscr{W}$, $\|(\mathbf{u}_*,\mathbf{h}_*)\|_{\mathscr{W}} = 1$, such that, except for subsequences,

$$(\mathbf{u}_n,\mathbf{h}_n) \rightharpoonup (\mathbf{u}_*,\mathbf{h}_*) \quad \text{in} \quad (\mathrm{H}^1(\Omega))^6$$

and

$$(\mathbf{u}_n,\mathbf{h}_n) \to (\mathbf{u}_*,\mathbf{h}_*) \quad \text{in} \quad (\mathrm{L}^2(\Omega))^6.$$

Then

$$\mathscr{D}(\mathbf{u}_*,\mathbf{h}_*) = 1$$

and

$$\frac{1}{M_E^2} = \lim_{n\to+\infty} \mathscr{I}(\mathbf{u}_n,\mathbf{h}_n) = \mathscr{I}(\mathbf{u}_*,\mathbf{h}_*).$$

Thus the theorem is proved. □

Acknowledgements

This work has been performed under the auspices of the G.N.F.M. of I.N.D.A.M. and M.I.U.R. (P.R.I.N.): "Non Linear Propagation and Stability in Thermodynamical Processes of Continuous Media". L. Vergori thanks Prof. Carlo Bortone for having followed him in this research.

References

[1] D.A. Nield, A. Bejan: *Convection in Porous Media*.Springer-Verlag; Berlin Heidelberg New York, 1999.

[2] N.Rudraiah, B.V. Mariyappa: *Universal stability of hydromagnetic flows in a porous medium*. Journal of Mathematical and Physical Sciences; **7**: 17-36, 1973.

[3] M. Maiellaro, L. Palese: *Sui moti M.H.D. stazionari di una miscela binaria in uno strato obliquo poroso in presenza di effetto Hall e sulla loro stabilità*. Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli; 471-480, 1980.

[4] S. Rionero, M. Maiellaro: *On the stability of Couette-Poiseuille flows in the anisotropic MHD via the Liapunov direct method*. Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli; Vol. LXII: 315-332, 1995.

[5] M. Maiellaro: *On the non linear stability of the anisotropic MHD Couette-Poiseuille flows*. Rend. Circ. Mat. Palermo; Serie II, Suppl. 57: 303-308, 1998.

[6] P.G. Drazin, W.H. Ried: *Hydrodymamic Stability*. Cambridge University Press; Cambridge, 1981.

[7] S. Chandrasekhar : *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford, Clarendon Press, 1968.

[8] J. Flavin, S. Rionero: *Qualitative estimates for Partial Differential Equations. An Introduction*. CRC Press: Boca Raton, FL 1996.

[9] B. Straughan: *The Energy Method, Stability and Non-linear Convection*. Series in Applied Mathematical Science vol. 91, Springer, New York, 1992.

[10] S. Rionero: *Metodi variazionali per la stabilità asintotica in media in magnetoidrodinamica*. Annali di Matematica pura ed applicata; **78**: 339-364, 1968.

[11] S. Lombardo,G. Mulone: *Non linear stability and convection for laminar flows in a porous medium with Brinkman law*. Mathematical methods in the Applied Sciences; **26**:453-462, 2003.

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXXIII, (2006) pp. 403-417

Durabilità del calcestruzzo concrete durability

Nota di Riccardo Sersale

(Adunanza del dì 3 Novembre 2006).

Riassunto – Vengono analizzate le più ricorrenti cause esterne ed interne che determinano i processi di degrado dei calcestruzzi.
Si prendono in esame i degradi: per attacco da parte di agenti atmosferici, per attacco solfatico, per formazione di ettringite ritardata o di thaumasite, per alcali-reazione, per carbonatazione, gelo-disgelo e lisciviazione.
Vengono approfonditi i meccanismi di ciascun attacco e proposti i rimedi idonei ad assicurare durabilità alle strutture.

Parole chiave: Calcestruzzo, Degrado. Durabilità.

Summary – Current external and internal factors involved in concrete degradation are analysed. Degradation owing to: atmospheric pollution, sulphate attack, delayed ettringite or thaumasite formation, alkali-silica reaction, carbonation, leaching, freezing and thawing are considered. Mechanisms of attack are investigated and remedies effective in providing durability suggested.

Key words: Concrete. Degradation. Durability.

La durabilità di un materiale configura l'attitudine a resistere alle condizioni ambientali alle quali viene esposto. Sotto tale aspetto il calcestruzzo presenta notevoli vantaggi rispetto ad altri materiali da costruzione: acciaio e legno.

La durabilità a lungo termine di un calcestruzzo è influenzata da una pluralità di fattori.

I più frequenti problemi riguardanti la sua durabilità possono sorgere per cause esterne dovute all'ambiente con cui viene messo in contatto, per cause interne dovute alla composizione, per errori progettuali, di preparazione, di lavorabilità e messa in opera della mescola, per insufficiente compattazione, sovradosaggio di acqua d'impasto, sottodosaggio di cemento, scelta inappro-

priata del tipo di legante in relazione alla vita in servizio dell'opera e, nel caso di calcestruzzo armato, scarso spessore del copriferro.

Le cause esterne nascono dall'ambiente nel quale la costruzione sorge: effetti del clima, attacchi chimici, lisciviazione, carbonatazione, gelo-disgelo.

Le cause interne riguardano la struttura del materiale in se stesso ed i suoi costituenti.

Esempi illuminanti ne sono: la reazione alcali-silice e la formazione di ettringite ritardata.

Il calcestruzzo è anche molto sensibile agli attacchi degli acidi, con conseguente rimozione della pasta di cemento. I più frequenti attacchi sono prodotti da vapori acidi o fumi provenienti dalle industrie manifatturiere e principalmente da quelle alimentari.

L'allarme suonò nel 1970 nei Paesi dell'Europa Occidentale, dove le piogge acide attaccarono edifici e monumenti storici.

Nei secoli diciannovesimo e nei primi cinquant'anni del ventesimo, il danno prodotto da tale attacco è stato relativamente modesto. In seguito, con il crescere delle attività antropiche, è divenuto più sentito.

Un esempio illuminante di come il clima possa influenzare il degrado dei materiali è rappresentato dall'attacco che ha subito l'obelisco di granito raffigurante Cleopatra. Dopo aver resistito per 3500 anni al clima secco dell'Egitto, per effetto dell'esposizione all'aria umida e carica di agenti inquinanti della città di New York, in meno di 75 anni sono state completamente cancellate le iscrizioni geroglifiche che arricchivano il monumento commemorativo. L'idratazione dei sali intrappolati nella struttura, il successivo passaggio in soluzione e la loro cristallizzazione dopo evaporazione dell'acqua, è stata la presumibile causa di un degrado eminentemente fisico, perchè dovuto ad un fenomeno di espansione (1).

Gli ultimi quarant'anni hanno anche causato corrosione dei tesori d'arte dell'Acropoli, superando i danni prodotti nei 2400 anni precedenti.

Gli agenti atmosferici e l'attacco del calcestruzzo

L'attacco del calcestruzzo da parte di agenti atmosferici che si caricano di contaminanti dannosi, costituisce un processo che può dar vita a nuove fasi relativamente più stabili, con asportazione dei componenti più solubili ed addizione simultanea di specie gassose, particolarmente di CO_2.

Il degrado dipende da come ed in che misura il calcestruzzo interagisce con l'ambiente circostante.

I tre principali inquinanti dell'aria, naturali o prodotti dall'uomo, sono: solfato, nitrato ed ozono.

Il solfato, che proviene dalla combustione dei combustibili fossili, petrolio e gas combustibili, costituisce il più importante agente corrosivo per molti calcestruzzi.

L'acido nitrico, pur essendo un acido forte, risulta meno dannoso, per effetto della maggiore reattività dell'acido solforico e dei solfati verso il calcestruzzo. Normalmente tali inquinanti si presentano come piogge acide.

Proprietà chimiche, fisiche e microstrutturali delle paste di cemento indurite influenzano in maniera determinante il degrado delle strutture. Ai fini della durabilità, la permeabilità del calcestruzzo gioca un ruolo fondamentale ed è strettamente legata alla quantità di acqua d'impasto. Porosità e struttura dei pori delle paste di cemento sono infatti responsabili dell'ingresso di specie chimiche dannose nel conglomerato.

I processi di degrado

Possono esser suddivisi in due categorie: degrado chimico, che determina la trasformazione dei componenti in specie chimiche differenti e degrado fisico, che provoca sbriciolamento del conglomerato. Il più delle volte, le due categorie si uniscono.

L'attitudine del calcestruzzo a resistere alle varie aggressioni dipende essenzialmente dalla qualità dei costituenti: matrice cementizia ed aggregato. Inoltre, la riduzione del rapporto acqua/cemento, una compattazione spinta del calcestruzzo fresco, l'addizione di aggiunte minerali, riducendo la permeabilità, contribuiscono a confinare l'attacco soltanto allo strato esterno.

Se poi il calcestruzzo è armato, anche la protezione dell'armatura è negativamente influenzata dalla permeabilità, che facilita l'ingresso dell'acqua attraverso pori e capillari e consente l'ingresso di agenti dall'esterno, quali solfati e cloruri. Essi, neutralizzando la calce idrata contenuta nella soluzione dei pori, determinano una riduzione del pH, pari a quella prodotta dall'ingresso di CO_2, e la successiva distruzione del film di ossido di ferro che normalmente induce passivazione.

Le cause più frequenti

Possono così riassumersi: attacco solfatico, alcali-reazione, penetrazione di sali, carbonatazione, lisciviazione, gelo-disgelo.

Di ognuna di esse viene posto in luce il meccanismo e suggerite le vie più idonee a minimizzarle.

Attacco solfatico

È prodotto per azione delle acque solfatiche o selenitose, acque che contengono disciolte discrete quantità di solfati, come anche l'acqua marina ed alcune acque dolci che sono venute a contatto con giacimenti di gesso. Gli ioni Ca^{+2} ed SO_4^{-2} presenti nell'acqua, reagiscono con gli alluminati idrati della pasta di cemento già indurita, con formazione di ettringite ($3CaO{\cdot}Al_2O_3{\cdot}3CaSO_4{\cdot}31H_2O$), che occupa un volume notevolmente maggiore dell'alluminato idrato, con conseguente degradazione della struttura.

Può essere anche dovuto alla presenza nel suolo, nei terreni e nell'ambiente marino, di solfati misti ed è un fenomeno ben noto. La limitata solubilità del solfato di calcio in acqua a temperatura ordinaria (1400 mg/l SO_4), fa sì che le più alte concentrazioni di ioni solfato nelle acque del sottosuolo siano dovute alla presenza di solfati di sodio e di magnesio.

È stato osservato (2) che l'espressione "attacco solfatico" dovrebbe esser riservata alla sola indicazione di conseguenze dovute a reazioni chimiche sul calcestruzzo e non esser usata per semplice decorso della reazione. Danni prodotti dal solfato o da altri sali, quando la loro azione è puramente fisica,dovrebbero prendere il nome di "attacco fisico". Ne è esempio illuminante l'attacco subito dal calcestruzzo ad opera del solfato sodico, dovuto ad idratazione del sale.

La cristallizzazione del solfato sodico idrato da soluzioni saline determina un'espansione a seguito della conversione del solfato sodico anidro (thenardite), nel decaidrato (mirabilite), che occupa un volume superiore circa quattro volte a quello della thenardite. Non è coinvolta nessuna reazione di ioni solfato (3). Sali solubili presenti in acque superficiali (solfati, cloruri), o in suoli umidi, penetrano nel calcestruzzo attraverso i pori ed i capillari. Al di sopra del livello del terreno, l'umidità evapora lasciando cristallizzare i sali nei pori. I sali cristallizzati, avendo un volume maggiore rispetto alla soluzione che li conteneva, esercitano una pressione nel calcestruzzo, causando piccole fenditure che sviluppano la rottura e provocano distacco di frammenti (4).

L'attacco solfatico del calcestruzzo è un processo complesso. Molti fattori, quali: il tipo di cemento, il tipo di catione solfatico, la concentrazione del solfato, il periodo di esposizione, ne influenzano la resistenza (2). Gli ioni solfato reagiscono con l'alluminato tricalcico e con l'idrossido di calcio, per produrre un degrado addebitabile ad espansione e ad indebolimento della struttura.

Un calcestruzzo a basso rapporto acqua/cemento, denso, ben compattato ed appropriatamente stagionato, è essenziale ai fini della resistenza all'attacco solfatico.

In ambiente marino l'attacco solfatico origina ettringite espansiva, gesso e brucite. Talvolta è associato alla formazione di calcite (5).

La resistenza ai solfati può esser migliorata e l'attacco minimizzato passando dal cemento tipo I ASTM, che contiene fra 8 e 12% di alluminato tricalcico, al tipo II che ne contiene meno dell'8%, od al tipo V che ne contiene meno del 5%.

Nel tardo XIX secolo Candlot e Le Chatelier identificarono infatti l'ettringite in calcestruzzi deteriorati e tale identificazione ha portato allo sviluppo di cementi solfato-resistenti, contenenti un basso tenore di alluminato tricalcico. Più recentemente, la normale pratica di contrastare l'attacco solfatico con l'impiego di un cemento a basso tenore di alluminato, è stata sostituita con la preparazione di un calcestruzzo a bassa permeabilità ed a basso contenuto di $Ca(OH)_2$.

Una rassegna, rivolta ad esaminare la durabilità del calcestruzzo in ambiente marino (6), ha portato alla conclusione che anche cementi ad alto contenuto di alluminato tricalcico possono manifestare eccellente resistenza ai solfati, a patto che la permeabilità sia sufficientemente bassa. Ai fini della resistenza a soluzioni aggressive, maggiore importanza viene infatti attribuita alla distribuzione delle dimensioni dei pori nella matrice, piuttosto che alla composizione chimica del cemento. Viene anche raccomandata un'appropriata stagionatura.

L'aumento del contenuto di C_3S, una caratteristica dei cementi moderni, comportando un aumento dell'idrossido di calcio nel calcestruzzo idratato ed indurito, lo rende più sensibile all'attacco solfatico, generando rammollimento (7).

L'introduzione di aggiunte minerali ad attività "pozzolanica" alla miscela generatrice del calcestruzzo, comporta la reazione della silice reattiva con la calce libera prodotta per idratazione del cemento, producendo una quantità addizionale di C-S-H legante, con contestuale riduzione dell'idrossido di calcio, disponibile a reagire con gli ioni SO_4^{-2} e produrre espansione anche per formazione di gesso. L'introduzione di aggiunte attive gioca inoltre un ruolo determinante sulla minimizzazione della reazione espansiva prodotta dalla presenza dell'alluminato tricalcico e significativamente contribuisce ad incrementare la compattezza della matrice cementizia.

La scelta di un cemento a basso rapporto C_3S/C_2S è inoltre un fattore sostanzialmente positivo per l'impiego di un cemento con buona resistenza ai solfati.

A seconda delle circostanze, i solfati solubili possono reagire con alcuni componenti del cemento idratato e provocare espansione distruttiva, perdita di resistenza e disintegrazione. Si forma infatti ettringite ($3CaO \cdot Al_2O_3 \cdot 3CaSO_4 \cdot 31H_2O$), la cui espansione viene attribuita ad adsorbimento d'acqua.

È buona pratica costruttiva prosciugare il terreno intorno alle fondazioni dell'opera in via di realizzazione, in quanto sali secchi non attaccano il calcestruzzo.

I solfati solubili possono anche reagire con il C-S-H, benchè si ritenga che esso reagisca principalmente con $MgSO_4$.

Addizione di gesso al clinker

È noto da lungo tempo che al cemento si aggiunge una modesta quantità di $CaSO_4 \cdot 2H_2O$.

Ad esso è affidato il ruolo di rallentare e regolare la presa. Reagendo con l'alluminato tricalcico forma ettringite, che precipita sui granelli di alluminato e ne rallenta l'ulteriore idratazione. Tale ettringite viene prodotta entro pochi minuti dall'addizione dell'acqua. Il solfato di calcio reagisce con l'alluminato tricalcico o i suoi idrati e quando l'intera quantità si è combinata come ettringite, l'eccesso di alluminato tricalcico reagisce con essa per produrre monosolfato ($C_3A \cdot CaSO_4 \cdot 12H_2O$). Tali reazioni non sono dannose, poiché avvengono in un sistema che non ancora ha assunto una determinata forma e può liberamente espandersi.

La quantità di gesso addizionata è andata via via aumentando nel corso degli anni, determinando una usuale presenza di ettringite nei calcestruzzi stagionati. Viene in tal modo abbassata la probabilità di attacco solfatico, grazie al più basso contenuto di alluminati di calcio idrati e di monosolfato, disponibili a formare ettringite espansiva a seguito di ingresso di solfati nel calcestruzzo. Aumenta naturalmente la possibile formazione di ettringite ritardata (8). Da notare che il passaggio del monosolfato ad ettringite comporta un aumento di volume pari al 77%.

A proposito dell'influenza del contenuto di gesso sulla stabilità di volume, è stato posto in luce che per il cemento d'alto forno esiste un contenuto di gesso ottimale, nel cui rispetto l'espansione non ha luogo (9).

La valutazione della resistenza a compressione appare una pratica affidabile per la determinazione dell'entità dell'attacco solfatico, anche se la valutazione di quella a flessione sembra più sensibile.

Attacco solfatico "benefico"

L'attacco solfatico interno può anche risultare voluto e benefico (8) in quelle formulazioni sviluppate per la produzione di calcestruzzi a ritiro

compensato, impiegati, in assenza di giunti, per la realizzazione di solette. Il cemento normalmente consta in parte di ettringite anidra ed in parte di un componente addizionale solfatico. Lo sviluppo di ettringite continua dopo indurimento, ma cessa prima che avvenga la rottura per espansione.

Formazione di ettringite ritardata

La durabilità di un calcestruzzo può anche esser compromessa da formazione di ettringite ritardata o secondaria (10). L'interpretazione più generalmente accettata del fenomeno, concerne la distruzione o l'impedita formazione dell'ettringite normalmente presente nelle paste di cemento, per effetto di un trattamento generalmente superiore a 60°C (11), conseguente ad un stagionatura a caldo, ad uno sviluppo di calore generato da una gettata massiva, o, nei climi caldi, da esposizione al sole.

Allorché esposto all'azione dell'acqua, l'ettringite si riforma nel calcestruzzo già indurito, provocando espansione e crettatura della struttura, spesso evidenziata dalla fuoruscita di un gelo, identico in apparenza a quello prodotto nella reazione alcali-silice (10).

È stato anche posto in luce che clinkers ad alto contenuto di solfato, per effetto dell'impiego di combustibili ad alto tenore di zolfo, possono originare ettringite ritardata anche se il calcestruzzo non viene esposto a temperatura (8).

È stato anche rilevato (12) che ioni solfato ed alluminato vengono incorporati nel C-S-H dopo stagionatura a caldo. Nelle malte andate soggette ad espansione, all'inizio della stessa il rilevamento della microstruttura ha posto in luce la rigenerazione di ettringite all'interno del gelo di C-S-H.

È stata proposta una metodologia rivolta a determinare il limite di temperatura al di sotto della quale il rischio di formazione di ettringite ritardata risulta minimo ed accettabile (13).

Il C-S-H è attaccato non soltanto da soluzioni di $MgSO_4$, ma anche da quelle di Na_2SO_4, benché in minor misura (14). Espansione e rottura sono probabilmente causate da formazione di ettringite, mentre rammollimento e disintegrazione si originano dalla distruzione di C-S-H e sono importanti quanto espansione e rottura.

La tobermorite è molto instabile in una soluzione concentrata di cloruro di magnesio e si decompone con formazione di C-S-H amorfo e cloruro di magnesio basico. Il C-S-H amorfo va soggetto ad un graduale processo di decalcificazione, per cui i componenti finali sono: cloruro di magnesio basico, cloruro di calcio basico, silicato di magnesio idrato ed acido silicico (15).

Formazione di thaumasite

L'attacco solfatico può anche provocare formazione di thaumasite ($CaSiO_3 \cdot CaCO_3 \cdot 3CaSO_4 \cdot 15H_2O$). Questa forma di attacco solfatico si diversifica da quello classico nel quale viene prodotta ettringite, perché non già gli alluminati di calcio, bensì i silicati di calcio idrati (C-S-H) nel cemento indurito sono i responsabili della reazione.

Questo attacco ha luogo nei calcestruzzi e nelle malte realizzate con cemento Portland ordinario o con cemento resistente ai solfati, che contengano calcare di differente provenienza o filler aggiunto al cemento, allorché soggette ad ambiente solfatico umido. L'attacco risulta tanto più veloce, quanto più alto è il tenore di C_3A (16).

Principale meccanismo di deterioramento appare la disgregazione delle fasi di silicato di calcio idrato nelle paste di cemento indurite, in presenza di ioni solfato e carbonato, seguito da formazione di thaumasite, che non sempre è il dominante prodotto di reazione.

Una ricerca di laboratorio (16) ha posto in luce che calcestruzzi realizzati con cemento Portland, sostituito per il 70-80% con scoria d'alto forno granulata, non sono andati soggetti ad attacco solfatico per formazione di thaumasite, dopo tre anni di esposizione a soluzioni fredde di solfato. Temperature fra 5 e 15°C risultano favorevoli per l'attacco.

Mitigazione dell'attacco solfatico

Benché i meccanismi chimici dell'attacco solfatico siano stati compiutamente studiati da molti ricercatori,esistono tuttora considerevoli divergenze di opinione sulla meccanica dei processi di espansione e rottura.

I fattori che sembrano avere maggiore influenza sulla velocità di espansione dei manufatti sono: le condizioni ambientali, quali: il pH della soluzione e la concentrazione di solfato; il contenuto di C_3A del cemento (17).

La cinetica del degrado risulta molto sensibile alla microstruttura del conglomerato.

Per costruzioni in ambiente solfatico vengono raccomandate: la riduzione del rapporto acqua/cemento e l'impiego di aggiunte attive, che modificando la microstruttura delle paste di cemento, riducono la diffusibilità e considerevolmente migliorano la resistenza alla lisciviazione del calcio.

È stato sostenuto (18) che l'attacco solfatico può esser impedito da uno dei tre fattori: basso rapporto acqua/cemento, basso contenuto d'idrossido di calcio, basso contenuto di C_3A, affermazione che però non sembra valida in tutte le circostanze (2). È stato anche avanzata l'ipotesi (19) che la riduzione del

rapporto acqua/cemento abbia talvolta un effetto negativo sulla resistenza all'attacco da parte del solfato di magnesio di un calcestruzzo confezionato con cemento tipo V ASTM, poiché verrebbe limitato lo spazio per accomodare nei pori i prodotti di reazione: silicato di magnesio idrato, che non ha proprietà leganti e gesso.

Prove di resistenza ai solfati in condizioni realistiche (8°C, 1500 mg SO_2^{-2}/l), hanno mostrato che il danno strutturale è causato dalla formazione di thaumasite ed ettringite. Malte con bassa porosità capillare e basso tenore d'idrossido di calcio, hanno rivelato una particolare resistenza (20).

Alcali-reazione

Espansione e fessurazione sono dovute al rigonfiamento del gelo che si forma per reazione degli alcali, presenti nei prodotti cementizi, con la silice reattiva degli aggregati, in presenza d'acqua (10). Il rigonfiamento genera sollecitazioni di trazione che di traducono appunto in espansione e fessurazione. L'espansione è direttamente correlata all'alcalinità della soluzione interstiziale.

Il processo è attivato dalla presenza di ossidrilioni contenuti nella fase acquosa che riempie i pori della pasta di cemento ed il prodotto di reazione è un gelo alcali-silice che può assumere acqua da una fonte esterna, rigonfiarsi con aumento di volume ed esercitare pressione nella struttura.

In molti casi, la pressione dovuta al rigonfiamento è sufficiente a produrre microfessure distruttive, che pian piano diventano macrofessure e si estendono per tutto il calcestruzzo. Il gelo risultante può venir fuori dalle fessure, esser accompagnato da scheggiature e frantumazione e risultare chiaramente osservabile sulla superficie dell'opera per il suo colore bianco. Le fessure permettono all'umidità ed all'ossigeno di penetrare nel calcestruzzo e, se armato, favorire anche la corrosione dell'armatura (4). Poiché l'impiego di un cemento a basso tenore di alcali non sempre è possibile, l'addizione di ceneri volanti di classe F, scoria d'alto forno, fumo di silice, vere pozzolane, zeoliti naturali (21), metacaolino, minimizzano l'espansione.

L'effetto di tali aggiunte determina la formazione di idrati di bassa permeabilità che riducono la mobilità degli ioni OH^- nella soluzione dei pori (22). Tale condizione si determina nonostante il fatto che dette aggiunte abbiano un alto contenuto di alcali, anche se quelle a più alto contenuto di silice normalmente riducono l'espansione.

La resistenza all'espansione dei calcestruzzi preparati con cementi di aggiunta si ritiene attribuibile alla formazione di idrati addizionali che sigillano il sistema poroso.

La differenza di resistenza all'attacco alcali-aggregato fra cemento Portland e cementi di aggiunta si ritiene poi dovuta, in massima parte ad una differenza

di permeabilità agli ioni alcalini ed all'acqua da parte della pasta di cemento (23).

Perché la reazione distruttiva alcali-silice possa decorrere, si devono simultaneamente verificare tre condizioni: presenza di un aggregato che rechi silice attiva, presenza di idrossidi alcalini generati a seguito di reazioni d'idratazione, presenza di acqua in quantità sufficiente, fornita da una fonte esterna, per esser adsorbita dal gelo che poi espande. Ciò renderà il degrado assai variabile (4).

Calcestruzzi ad alte prestazioni, con una densa microstruttura, compatta, meno permeabile e più resistente ad aggressioni chimiche dall'esterno, con una matrice a pori molto più fini e discontinui che riducono il movimento degli agenti reattivi all'interno del conglomerato, favoriscono la prevenzione o la limitazione di ogni possibile reazione alcali-silice e ne prevengono il degrado.

Carbonatazione

L'ambiente interno del calcestruzzo è altamente alcalino, a seguito della reazione d'idratazione del cemento, che conduce alla neoformazione di $Ca(OH)_2$, NaOH, KOH ed altri composti. L'anidride carbonica ed altri gas presenti nell'atmosfera possono infiltrarsi in un calcestruzzo poroso e permeabile. In presenza di acqua, l'anidride carbonica ed altri gas reagiscono con l'idrossido di calcio o con altri idrossidi presenti nel calcestruzzo e formano un composto neutro come $CaCO_3$.

Il processo è noto come carbonatazione del calcestruzzo e dipende dalla permeabilità o dalla presenza di difetti o fessure.

La diffusione dei gas sarà pertanto più difficile in un calcestruzzo denso e ben finito.

In un calcestruzzo saturo, il gas non può penetrare, perché i pori della pasta di cemento sono bloccati dall'acqua. In un calcestruzzo completamente secco, la carbonatazione non può aver luogo, perché il decorso del processo necessita di acqua (4).

Per calcestruzzi non armati, la carbonatazione ha un effetto benefico, poiché viene ridotta la porosità totale, grazie alla quale penetrano soluzioni aggressive e gas. Pertanto non costituisce un processo distruttivo, benché possa determinare una leggera riduzione di volume che può produrre fessurazione dello strato esterno, prodotta dalla contrazione dello strato interno del calcestruzzo (4).

Ha, al contrario, un effetto dannoso nei calcestruzzi armati o precompressi, per i quali il danno prodotto ha luogo secondo tre stadi: diffusione di CO_2 nei

pori capillari, dissoluzione di CO_2 nel film d'acqua,neutralizzazione di $Ca(OH)_2$ ad opera dell'acido carbonico.

È noto che la condizione altamente alcalina dell'interno della struttura assicura un ambiente passivo che protegge l'armatura dalla corrosione. Si forma infatti un sottile strato di ossido sulla superficie dei ferri, che rimane stabile fino a quando persistono le condizioni di passività, proteggendoli da ulteriore, profonda corrosione.

La penetrazione di anidride carbonica attraverso pori e fessure riduce l'alcalinità, fa scendere il pH al di sotto di 11, distrugge l'ambiente passivo lasciando i ferri preda della corrosione.

La passivazione può anche esser distrutta da sali di cloro, come avviene per le strutture marine o per quelle che, sorgendo in prossimità del mare, sono soggette ad attacco da cloruri presenti nelle spruzzate trasportate dal vento. In presenza di sufficienti quantità di ossigeno ed umidità, inizia la corrosione dell'armatura, per effetto di un processo elettrochimico che conduce alla precipitazione di idrossido ferroso che occupa un volume maggiore di quello dell'acciaio originario. Con l'aumento del prodotto di corrosione, viene esercitata una pressione gradualmente crescente sul copriferro, finché esso si fessura. La propagazione delle fessure all'interno del calcestruzzo porta al completo distacco del copriferro e l'armatura rimane completamente scoperta.

Nei calcestruzzi di cemento Portland privi di armatura, le soluzioni di cloruro sodico o potassico hanno minor effetto. Se le soluzioni sono concentrate, possono anche causare disintegrazione per formazione di sale di Friedel ($C_3A{\cdot}CaCl_2{\cdot}H_{12}$) e l'aumento di solubilità dell'idrossido di calcio nelle soluzioni di cloruro contribuisce al dissesto.

Anche questa volta, l'impiego di cementi di aggiunta, che presentano una distribuzione della struttura dei pori più fine di quella del cemento Portland, migliora la durabilità dei calcestruzzi esposti all'azione dei cloruri.

In presenza simultanea di ioni Cl^- ed SO_4^{-2}, come avviene nell'acqua marina, si instaura una competizione fra ioni cloruro ed ioni solfato. In soluzione al 20% di NaCl, sopra i 100°C, si forma il sale di Friedel come prodotto di decomposizione dell'ettringite, mentre a più basse temperature è stato individuato lo ione cloruro nell'ettringite, con espansione conseguentemente più bassa (24).

Alcuni ricercatori hanno considerato la formazione di sale di Friedel come il risultato della reazione fra cloruri ed alluminati della pasta di cemento, talvolta con conseguente annullamento della formazione di ettringite. Altri, studiando le paste di cemento Portland dopo attacco con soluzione concentrata di $CaCl_2$, hanno rilevato, come prodotto secondario della reazione, cloro-ettringite, mentre i fattori principali della reazione sono risultati la dissoluzione di $Ca(OH)_2$ e la formazione di ossicloruro di calcio espansivo ($CaCl_2{\cdot}Ca(OH)_2{\cdot}H_2O$).

Gelo-disgelo

In regioni fredde, in ambienti esterni il calcestruzzo è frequentemente in uno stato di saturazione, con i pori della pasta di cemento ripieni di acqua. Al cadere della temperatura, l'acqua dei pori genera cristalli di ghiaccio che occupano un volume maggiore ed esercitano una pressione sul calcestruzzo, allo stesso modo dei cristalli di sale. Ciò comporta fessurazione della struttura, scomparsa del calcestruzzo superficiale e messa a nudo degli aggregati.

È evidente che il degrado dovuto a cristallizzazione di sali od a formazione di ghiaccio, è influenzato dalla permeabilità dell'opera. Un calcestruzzo denso, ben compattato, con basso rapporto acqua/cemento, essendo meno poroso, sarà meno sensibile al degrado per congelamento e ad alterazione per intemperie.

Calcestruzzi asciutti possono indefinitamente resistere al gelo-disgelo, mentre quelli saturi, anche se trattati con additivi aeranti, possono esser danneggiati da pochi cicli di gelo-disgelo.

La resistenza al gelo-disgelo può esser migliorata attraverso formazione di un sistema di microbolle d'aria, omogeneamente disperse nel calcestruzzo. Dimensioni, distanza reciproca e numero di microbolle rappresentano i parametri che governano la resistenza al gelo-disgelo dei calcestruzzi. La presenza di bolle determina anche un miglioramento di lavorabilità, un aumento di coesione del calcestruzzo fresco, una diminuzione del peso specifico.

I più importanti fattori che governano la resistenza al gelo risultano: la microstruttura della pasta di cemento e la sua porosità. Calcestruzzi contenenti fumo di silice sono stati indicati come resistenti al gelo, anche senza additivi aeranti.

Lisciviazione

La lisciviazione del calcio che costituisce i cristalli di portlandite e quello degli idrati

C-S-H che vengono disciolti, possono portare a degrado del calcestruzzo.

Il movimento d'acqua attraverso la pasta di cemento può provocare la rimozione di specie chimiche, rimozione che viene controllata dalla struttura dei pori e dalla permeabilità all'acqua della pasta di cemento.

La rilevanza di tale rimozione dipende dalla composizione iniziale del legante, dalla concentrazione dei lisciviantì, dalla permeabilità della pasta, dalla solubilità delle specie chimiche interessate e dalla temperatura.

Il problema della lisciviazione ha assunto particolare interesse, in quanto i cementi sono largamente impiegati per intrappolare specie tossiche, spesso contenute nei residui solidi municipali inceneriti (25). Pertanto controllare il

rilascio di sali solubili (ed anche di cationi tossici e non) nell'ambiente, è un problema ricorrente.

Cationi solubili come calcio, quando non incorporati nella pasta di cemento come fasi insolubili, vengono lisciviati e rilasciati mediante un meccanismo di diffusione. Cationi sodio e potassio, così come l'anione cloruro, vengono lisciviati mediante diffusione, quando non formano fasi relativamente insolubili, o sono superficialmente adsorbiti.

Poiché la soluzione dei pori della pasta di cemento reca normalmente discrete quantità di alcali ed anche di cloruri disponibili alla lisciviazione, una struttura molto fine dei pori la impedirà.

Gli ioni solfato sono rilasciati più lentamente di quelli di sodio, cloruro e nitrati (24) ed il calcio con una velocità inferiore di circa un quarto a quella del sodio.

La lisciviazione del calcio può esser rallentata con una parziale carbonatazione. Quando tutto l'idrossido è completamente lisciviato, il silicato idrato (C-S-H) controlla la velocità di lisciviazione. Un silicato di calcio più basico (cioè a contenuto di calcio più elevato) sembrerebbe più lisciviabile.

Poiché la lisciviazione del calcio è influenzata da un gran numero di fattori, non può esser accettabilmente prevista solo sulla base di alcuni risultati sperimentali. Sono pertanto stati messi a punto modelli matematici, che hanno confermato che il contenuto di portlandite dei sistemi cementizi si rivela il parametro chiave che controlla la diffusione del calcio (26).

Poiché la microstruttura della pasta di cemento regola il degrado, viene raccomandato il ricorso al fumo di silice, che modifica la microstuttura, riduce la diffusione e considerevolmente migliora la resistenza del calcestruzzo alla lisciviazione del calcio.

Conclusioni

Le cause di degrado dei calcestruzzi costituiscono processi molto complessi, regolati da una pluralità di fattori. Ciò ha comportato che sussistano tuttora divergenze di opinioni e di interpretazione dei meccanismi.

Le più ricorrenti cause esterne di degrado appaiono: gli effetti del clima, gli attacchi da agenti chimici, i processi di carbonatazione, lisciviazione e gelo-dsgelo.

Fra le cause interne figurano: l'attacco solfatico, l'alcali-reazione, la formazione di ettringite ritardata e quella di thaumasite.

Tali cause sono tutte influenzate dalle proprietà chimiche, fisiche e microstrutturali delle paste di cemento indurite, dalla scelta dei componenti, dalle modalità di formulazione e realizzazione degli impasti. Un ruolo determinante va attribuito alla permeabilità dei conglomerati, alla porosità e struttura

dei pori delle paste di cemento, alla scelta del tipo di cemento in relazione all'ambiente di vita della struttura, alla compattazione spinta del calcestruzzo fresco, all'addizione di aggiunte minerali, al rigoroso dosaggio dell'acqua d'impasto.

Pur nella complessità dei processi di degrado, sono state messe a punto modalità operative, dettagliatamente analizzate, idonee ad assicurare durabilità alle strutture.

Bibliografia

1. Roy D.M., Jiang W. Concrete chemical degradation: ancient analogues and modern evaluation. In: Mechanims of chemical degradation of cement-based systems. Scrivener and Young Eds., 14-21. Spon, London (1997).
2. Neville A. The confused world of sulfate attack on concrete. Cement Concrete Res., 34, 8, 1275-1296 (2004).
3. Stark D. Durability of concrete in sulfate-rich soils. Bulletin R.D. 09997. 01 T. Portland Cement Ass. (1989).
4. Chemrouk M., Attari N. Durability of concrete with particular reference to high performance concrete. In: Role of concrete in sustainable development. Dhir, Newlands, Paine Eds., 245-254. T. Telford (2003).
5. Frigione G. Sersale R. The action of some aggressive solutions on Portland, pozzolanic and blastfurnace slag cement mortars. Cement Concrete Res., 19, 6, 885-893 (1989).
6. Mehta P.K. Performance of concrete in marine environment. ACI SP65, 1-20, Detroit (1980).
7. Irassar E.F., Gonzales M., Rahdal V. Sulphate resistance of type V cements with limestone filler and natural pozzolana. Cement Concrete Compos., 22. 5, 361-368 (2000).
8. Hime W.G. Sulfate in cement and concrete. Let's start at the beginning. 11th ICCC, 3, 1507-1514. Durban (2003).
9. Frigione G., Sersale R. Influenza del tenore di gesso sulla stabilità di volume di cementi contenenti scoria d'alto forno. Il Cemento, 80, 1, 15-28 (1983).
10. Sersale R. La reazione alcali- silice e l'attacco solfatico interno: due ulteriori cause di degrado chimico del calcestruzzo di cemento. Rend. Acc. Sc. Fis. Mat., Napoli, 68, 119-127 (2001).
11. Thaulov N., Johansen V., Jakobsen U.H. What causes delayed ettringite formation? In: Mechanisms of chemical degradation of cement-based systems. Scrivener and Young Eds., 219-226. Spon (1997).
12. Lewis M.C.,Scrivener K.L. Microchemical effects of elevated temperature curing and delayed ettringite formation. In: Mechanisms of chemical degradation of cement-based systems. Scrivener and Young Eds. 243-250. Spon (1997).
13. Tagnit-Hamou A., Petrov N. A new method for evaluating the risk of DEF. Cement Concrete Res., 26, 2, 52-57 (2004).

14. Taylor H.F.W., Gollop R.S. Some chemical and microstructural aspects of concrete durability. In Mechanisms of chemical degradation of cement-based systems. Scrivener and Young Eds., 177-184. Spon (1997).
15. Kurdowski W., Duszak S., Trybalska B. Corrosion of tobermorite in strong chloride solutions. In: Mechanisms of chemical degradation of cement-based systems. Scrivener and Young Eds.115-121. Spon (1997).
16. Crammond N. J., Halliwell M.A. Assessment of the conditions required for the thaumasite form of sulphate attack. In: Mechanisms of chemical degradation of cement-based systems. Scrivener Young Eds., 193-200. Spon (1997).
17. Ferraris C.F., Clifton J.R., Stutzman P.E., Garboczi E.J. Mechanisms of degradation of Portland cement-based systems by sulfate attack. In: Mechanisms of chemical degradation of cement-based systems. Scrivener and Young Eds. 185-192. Spon (1997).
18. Young J.F., Mindess S., Gray R.J., Bentur A. The science and technology of civil engineering materials. Prentice-Hall, New Yersey (1998).
19. Al-Amoudi O.S.B. Attach on plain and blended cement exposed to aggressive sulfate environment, Cement and Concrete Compos. 24, 3-4, 305-316 (2002).
20. Belemann F., Stark J. New findings when testing the sulphate resistance of mortars. Zement-Kalk-Gips Intern. 59, 6, 68-76 (2006).
21. Sersale R. Zeolite tuff as a pozzolanic addition in the manufacture of blended cements. In: Natural Zeolites '93. Occurrence, properties, use. Ming and Mumpton Eds. Int. Committee of Natural Zeolites. Brockport, N.Y. 603-612 (1995).
22. Buttler F.G., Morgan S.R., Walker E.J. Proc. Fifth Int. Conf. Alkali-Aggregate. Paper S 252/38. Cape Town (1981).
23. Malek R.I.A., Roy D.M. In: Alkalis in Concrete: Research and Practice. Idor and Rostam Eds. Danish Concrete Ass., 223-232. Copenhagen (1983).
24. Roy D.M. Mechanisms of cement paste degradation due to chemical and physical factors. 8th ICCC, I, 362-380. Rio de Janeiro (1986).
25. Sersale R., Frigione G. Solidificazione/stabilizzazione di cationi tossici con matrici cementizie. Note da I a IV. Rend. Acc. Sc. Fis. Mat., Napoli, 71-72 (2004-2005).
26. Delagrave A., Gerard B., Marchand J.Modelling the calcium leaching mechanisms in hydrated cement pastes. In: Mechanisms of chemical degradation of cement-based systems. Scrivener and Young Eds. 38-49. Spon, London (1997).

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXXIII, (2006) pp. 419-421

A note on $W^{1,1}_{loc}$ planar homeomorphisms

Nota di L. Greco, C. Sbordone and C. Trombetti

Presentata dal Socio Carlo Sbordone
(Adunanza del 3 novembre 2006)

Abstract- If a homeomorphism $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \Omega' \subset \mathbb{R}^2$ belongs to $W^{1,1}_{loc}(\Omega;\Omega')$ and its differential $Df(x)$ vanishes a.e. in the zero set of the Jacobian J_f of f, with $J_f \geq 0$ a.e., then f^{-1} enjoys precisely the same properties. This assertion is due to Hencl and Koskela [4]. Here we add the following formula for the distortion H of f^{-1}

$$H(y) = K(f^{-1}(y))$$

a.e. $y \in f(\Omega)$.

1 Introduction

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded domain and $f : \Omega \longrightarrow f(\Omega) \subset \mathbb{R}^2$ a homeomorphism of the Sobolev class $W^{1,1}_{loc}$. Assume that the Jacobian determinant $J_f(x) = \det Df(x)$ is non negative a.e. and that the differential $Df(x)$ vanishes a. e. in the zero set of J_f. Then, in view of Hadamard inequality

$$J_f(x) \leq |Df(x)|^2,$$

where $|D|$ denotes the operator norm of the matrix D, i.e.

$$|D| = \sup\{|Dv| : |v| = 1\},$$

it is quite natural to introduce the *distortion function* of f:

$$K_f(x) = \begin{cases} \frac{|Df(x)|^2}{J_f(x)} & if\ J_f(x) > 0 \\ 1 & otherwise \end{cases} . \tag{1.1}$$

Thus $K_f(x) \geq 1$ is a Borel measurable function because f is continous ([10] 26.4)which is finite a.e..

We will abbreviate the above considerations according to the following terminology.

We say that f has *finite distortion* if there exists a Borel measurable function $K = K(x) \geq 1$, such that

$$|Df(x)|^2 \leq K(x) J_f(x) \quad a.e.\ x \in \Omega. \tag{1.2}$$

This is equivalent to require $\{Df(x) = 0\} = \{J_f(x) = 0\}$ up to a set of measure zero.

In [3] and [1] it is shown that, under the extra assumptions that $f \in W^{1,2}_{loc}(\Omega, f(\Omega))$, and that $K \in L^1(\Omega)$, the inverse $h = f^{-1}$ of f, which belongs to $W^{1,2}_{loc}(f(\Omega), \Omega)$, has finite distortion $H = H(y)$ and precisely

$$H(y) = K(f^{-1}(y)) \quad a.e.\ y \in f(\Omega). \tag{1.3}$$

In [5] under the assumptions $f \in W^{1,1}_{loc}$ and $K \in L^1(\Omega)$, $H(y)$ is found to be less than $C\,K(f^{-1}(y))$ for a constant $C \geq 1$. In [4], under the weaker assumptions $f \in W^{1,1}_{loc}(\Omega, f(\Omega))$ and $K(x)$ finite a.e., it is shown that $h = f^{-1}$ has finite distortion $H = H(y)$ but the equality (1.3) is not checked.

This last fact is accomplished here. The proofs will appear elsewhere.

References

[1] K. Astala - T. Iwaniec - G. J. Martin -J. Onninen, *Extremal mappings of finite distortion*, Proc. London Math. Soc. (3) 91 (2005), 655-702

[2] F. W. Gehring - O. Lehto, *On the total differentiability of functions of a complex variable*, Ann. Acad. Sci. Fenn. A.I. 272 (1959), 1-9

[3] J. Heinonen - P. Koskela, *Sobolev mappings with integrable dilatations*, Arch. Ration. Mech. Anal. 125 (1993), 81-97

[4] S. Hencl - P. Koskela, *Regularity of the Inverse of a Planar Sobolev homeomorphism*, Arch. Ration. Mech. Anal. 180 (2006), 75-95

[5] S. Hencl - P. Koskela - J. Onninen, *A note on extremal mappings of finite distortion*, Math. Res. Lett. 12 (2005), 231-238

[6] T. Iwaniec - G. Martin, *Geometric Function Theory and Non-linear Analysis*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications (2001)

[7] O. Lehto - K.Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, Springer-Verlag, Berlin (1971)

[8] Yu. G. Reshetnyak, *Space mappings with bounded distortion*, Translation of Mathematical Monographs 73 (American Mathematical Society, Providence, RI) (1989)

[9] S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 26 Springer-Verlag, Berlin, (1993)

[10] J. Väisälä, *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 229, Springer, Berlin (1971).

Luigi Greco
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"
Università di Napoli "Federico II"
Via Cintia, 80126 Napoli
Italia
e-mail: luigreco@unina.it

Carlo Sbordone
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"
Università di Napoli "Federico II"
Via Cintia, 80126 Napoli
Italia
e-mail: sbordone@unina.it

Cristina Trombetti
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"
Università di Napoli "Federico II"
Via Cintia, 80126 Napoli
Italia
e-mail: cristina@unina.it

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXXIII, (2006) pp. 423-456

Non-uniformly elliptic equations with measure data

Nota di Rosaria Di Nardo[1]

Presentata dal Socio Angelo Alvino
(Adunanza del 3 novembre, 2006)

Keywords - Renormalized solutions; non-uniformly problems; measure data.

Abstract - In this paper we prove an existence result for renormalized solutions to nonlinear degenerate elliptic problems whose prototype is

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\nu(x)\,|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\right) + b(x)\,|\nabla u|^{p-1} = \mu & \text{in} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

where Ω is a bounded open subset of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, ν is a nonnegative function such that $\nu(x) \in L^r(\Omega)$, $r \geq 1$, and $v(x)^{-1} \in L^t(\Omega)$, $t \geq N$. Moreover p is a real number such that $t \geq N/p$, $1 + 1/t < p < N(1 + 1/t)$, b belongs to the Lebesgue space $L^\tau(\Omega)$ for some $\tau \geq 1$ and μ is a Radon measure with bounded variation on Ω.

Riassunto - In questo articolo si prova un risultato di esistenza di una soluzione rinormalizzata per un problema non lineare, non uniformemente ellittico il cui prototipo è

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\nu(x)\,|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\right) + b(x)\,|\nabla u|^{p-1} = \mu & \text{in} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{su} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, ν è una funzione non negativa $\nu(x) \in L^r(\Omega)$, $r \geq 1$, e $v(x)^{-1} \in L^t(\Omega)$, $t \geq N$. Inoltre p è un numero reale tale che $t \geq N/p$, $1 + 1/t < p < N(1 + 1/t)$, b appartiene allo spazio di Lebesgue $L^\tau(\Omega)$ per $\tau \geq 1$ e μ è una misura di Radon con variazione limitata su Ω.

---

[1]Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II", Complesso Monte S.Angelo, via Cintia - 80126 Napoli, Italy; e-mail: rosaria.dinardo@dma.unina.it

1 Introduction

In this paper we prove an existence result for renormalized solutions to nonlinear degenerate elliptic problems whose prototype is

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nu(x)\,|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u) + b(x)\,|\nabla u|^{p-1} = \mu & \text{in} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

where Ω is a bounded open subset of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, ν is a nonnegative function such that $\nu \in L^r(\Omega)$, $r \geq 1$, and $\nu^{-1} \in L^t(\Omega)$, $t \geq N$. Moreover p is a real number such that $t \geq N/p$, $1 + 1/t < p < N(1 + 1/t)$, b belongs to the Lebesgue space $L^\tau(\Omega)$ for some $\tau \geq 1$ and μ is a Radon measure with bounded total variation on Ω.

Existence results for uniformly elliptic problems (i.e. ν is a positive constant) have been studied in the linear case by Stampacchia ([43]). He proved the existence and uniqueness of a solution defined by a "duality method". Such a notion of solution can not be extended to the nonlinear case except to the case $p = 2$ ([37]). Further regularity results have been proved in [2] and in [23]. The first attempt in the nonlinear case has been made in [11], [12] (see also [18]) where the existence of a distributional solution has been proved for the values $p > 2 - \frac{1}{N}$. When $p \leq 2 - \frac{1}{N}$ such a solution does not belong to the Sobolev space $W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ and it is not unique as proved by Serrin in [42] (see also [1], [40]).
These problems are overcome when the datum μ belongs to $L^1(\Omega)$ or to $L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$ by introducing the equivalent notions of entropy solution ([4], [13]) and renormalized solution ([32], [36], [37]). Only the notion of renormalized solution has been extended to the case of a general measure with bounded total variation in Ω ([17]). Existence results for renormalized solution or entropy solution in the case of uniformly elliptic equations with lower order terms and datum μ in L^1 or measure are proved in [3], [6], [7], [10], [26], [27].
The existence of a distributional solution for non-uniformly elliptic problem is proved in [41] when $b = 0$ and in [5] when $b \neq 0$. Further regularity results for such a solution are proved in [16].

In this paper we consider problem (1.1) where the datum μ is a Radon measure with bounded total variation in Ω. We prove the existence of a renormalized solution to such a problem. The main features in studying problem (1.1) are the non-uniformly ellipticity condition and the fact that the operator is not coercive. The proof of our result consists of several steps. Firstly we introduce the "approximated problems" then we prove an apriori estimate for the gradients of its solutions. This estimate can be easily done when b is small enough since in this case the operator is coercive. When the norm of b is not small we use Bottaro-

Marina technique ([14]) which consists in decomposing b in a finite sum of terms having norm small enough. Finally we pass to the limit in the approximated problems by using a stability result, which is proved in the Appendix (see [17] , [26]).

2 Notation and preliminary results

In this section we recall some properties of the measure ([17]), a few properties of weighetd Sobolev spaces ([38]) and, finally, the definition of renormalized solution to nonlinear elliptic equations with measure data ([17]).

2.1 Weighted Sobolev spaces

Let be Ω a bounded domain in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, and let $\nu(x)$ be a nonnegative function on Ω such that $\nu(x) \in L^r(\Omega)$, $r \geq 1$, $v(x)^{-1} \in L^t(\Omega)$, $t \geq N$. We denote by $L^p(\nu)$, $p > 1$, the space of measurable functions u such that

$$\|u\|_{L^p(\nu)} = \left(\int_\Omega |u|^p \nu(x) dx \right)^{1/p} < \infty, \tag{2.1}$$

and by $W^{1,p}(\nu)$ the completation of the space $C^1(\overline{\Omega})$ with respect to the norm

$$\|u\|_{W^{1,p}(\nu)} = \|u\|_{L^p(\nu)} + \||\nabla u|\|_{L^p(\nu)} . \tag{2.2}$$

Moreover we denote by $W_0^{1,p}(\nu)$ the closure of $C_0^1(\overline{\Omega})$ in $W^{1,p}(\nu)$ and by $W^{-1,p'}(1/\nu)$ the dual space of $W_0^{1,p}(\nu)$. The elements of the dual space $W^{-1,p'}(1/\nu)$ are described by the following Proposition ([38]).

Proposition 2.1 *If T is a continuous linear functional on $W_0^{1,p}(\nu)$ then there exist (N+1) functions f_0, f_1,..., f_N on $\overline{\Omega}$ such that*

$$f_0 \in L^{p'}(\nu^{-1}), \quad f_j \in L^{p'}(\nu^{-1}), \quad 1 \leq j \leq N \tag{2.3}$$

and

$$T(u) = \int_\Omega (f_0 u \nu^{2/p-1} + f_j u_{x_j} \nu^{2/p-1}) dx, \quad for\ u \in W_0^{1,p}(\nu). \tag{2.4}$$

Conversely, any set of functions f_0, f_1,..., f_N satisfying (2.3) defines a continuous linear functional by means of (2.4) on $W_0^{1,p}(\nu)$.

Now we recall some Sobolev-type inequalities which will be used in the following ([38]).

Proposition 2.2 *Let ν be a nonnegative function on Ω such that*

$$\nu \in L^r(\Omega),\ r \geq 1,\ \nu^{-1} \in L^t(\Omega),\ t \geq N, \tag{2.5}$$

Let p be a real number such that

$$t \geq N/p,\ 1 + 1/t < p < N(1 + 1/t) \tag{2.6}$$

and let $p^{\#}$ denote the number $(p^{\#})^{-1} = p^{-1}(1 + 1/t) - N^{-1}$.
Then there exists a continuous linear imbedding of $W_0^{1,p}(\nu)$ in $L^{p^{\#}}(\Omega)$ and there exists a constant $C_0 > 0$ depending on N, p, ν, t, such that

$$\|u\|_{L^{p^{\#}}(\Omega)} \leq C_0 \left\| |\nabla u| \right\|_{L^p(\nu)}, \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\nu). \tag{2.7}$$

Proposition 2.3 *Let ν be a nonnegative function on Ω such that (2.5) holds true and let p a real number such that (2.6) holds true. Let $\widetilde{p}$ denote the number*

$$\widetilde{p} = \frac{p^{\#}}{r'}.$$

Then there exists a continuous linear imbedding of $W_0^{1,p}(\nu)$ in $L^{\widetilde{p}}(\nu)$ and a constant $C_0' > 0$ depending on N, p, ν, t, such that

$$\|u\|_{L^{\widetilde{p}}(\nu)} \leq C \left\| |\nabla u| \right\|_{L^p(\nu)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\nu). \tag{2.8}$$

Finally we recall a Poincarè-type inequality for weighted Sobolev spaces:

Proposition 2.4 *Let ν be a nonnegative function on Ω such that (2.5) holds true and let p a real number such that (2.6) holds true. Then $W_0^{1,p}(\nu)$ is continuously imbedded in $L^p(\nu)$.*

2.2 Decomposition of measures

In this section we recall the definition of (p, ν)-capacity ([35])
The (p, ν)-capacity $cap_{p,\nu}(K, \Omega)$ of a compact set $K \subset \Omega$ with respect to Ω is defined by

$$cap_{p,\nu}(K, \Omega) = \inf \left\{ \int_\Omega \nu(x) |\nabla \varphi|^p : \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \geq \chi_K \right\},$$

where χ_K denotes the characteristic function of K . If $U \subseteq \Omega$ is a open set, we denote

$$cap_{p,\nu}(U,\Omega) = \sup\{cap_{p,\nu}(K,\Omega) : K \text{ compact}, K \subseteq U\},$$

while the (p,ν)-capacity of any subset $B \subseteq \Omega$ is defined as

$$cap_{p,\nu}(B,\Omega) = \inf\{cap_{p,\nu}(U,\Omega) : U \text{ open}, B \subseteq U\}.$$

We denote by $M_b(\Omega)$ the space of all Radon measures with bounded variation on Ω and by $C_b^0(\Omega)$ the space of all bounded, continuous functions on Ω.

Definition 2.1 *A sequence $\{\mu_\varepsilon\}$ of measures in $M_b(\Omega)$ converges in the narrow topology to a measure μ in $M_b(\Omega)$ if*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_\Omega \varphi d\mu_\varepsilon = \int_\Omega \varphi d\mu, \tag{2.9}$$

for every $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

We denote by $M_{0,\nu}(\Omega)$ the set of all measures μ in $M_b(\Omega)$ which are absolutely continuous with respect to the (p,ν)-capacity, that is $\mu(B) = 0$ for every Borel set $B \subseteq \Omega$ such that $cap_{p,\nu}(B,\Omega) = 0$. We define $M_{s,\nu}(\Omega)$ the set of all measures μ in $M_b(\Omega)$ which are singular with respect to the (p,ν)-capacity that is which are concentrated in a set $E \subset \Omega$ such that $cap_{p,\nu}(E,\Omega) = 0$.
The following proposition is a consequence of the decomposition result proved in [24].

Proposition 2.5 *For every measure in $M_b(\Omega)$ there exists an unique pair of measures (μ_0,μ_s) with $\mu_0 \in M_{0,\nu}(\Omega)$ and $\mu_s \in M_{s,\nu}(\Omega)$, such that $\mu = \mu_0 + \mu_s$.*

The measures μ_0 and μ_s are the absolutely continuous part and the singular part of μ with respect to the (p,ν)-capacity. Moreover, by adapting the proof of the result proved in [13], we obtain the following properties which states that

Proposition 2.6 *Let μ_0 be a measure in $M_b(\Omega)$. Then μ_0 belongs to $M_{0,\nu}(\Omega)$ if and only if it belongs to $L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(1/\nu)$. Then there exists $f \in L^1(\Omega)$ and $g \in (L^{p'}(1/\nu^{p-1}))^N$ such that*

$$\mu_0 = f - \operatorname{div}(g), \tag{2.10}$$

in the sense of distributions.

By Proposition 2.5 and 2.6 we get

Proposition 2.7 *Every measure μ in $M_b(\Omega)$ can be decomposed as follows*

$$\mu = \mu_0 + \mu_s = f - \operatorname{div}(g) + \mu_s^+ - \mu_s^-, \tag{2.11}$$

where μ_0 is a measure in $M_{0,\nu}(\Omega)$. It can be written as $f - \operatorname{div}(g)$, with $f \in L^1(\Omega)$ and $g \in (L^{p'}(1/\nu^{p-1}))^N$, μ_s^+, μ_s^- are two nonnegative measures in $M_{s,\nu}(\Omega)$, which are concentrated in two disjoint subset E^+, E^- of zero (p,ν)-capacity.

3 Definition of renormalized solution and main result

In this paper we consider the nonlinear elliptic problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) + H(x,\nabla u) = \mu & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Here $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ is a Carathéodory function such that

$$a(x,s,\xi)\xi \geq \nu(x)\,|\xi|^p, \tag{3.2}$$

$$|a(x,s,\xi)| \leq \nu(x)\left[|\xi|^{p-1} + |s|^{p-1} + a_0(x)\right],\ a_0(x) \in L^{p'}(\nu), \tag{3.3}$$

for almost every $x \in \Omega$, for every s$\in \mathbb{R}$, for every $\xi \in \mathbb{R}^N$, where $\nu(x)$ is a nonnegative function verifying

$$\nu(x) \in L^r(\Omega), r \geq 1, \tag{3.4}$$

$$v(x)^{-1} \in L^t(\Omega), \quad t \geq N/p, \quad 1 + 1/t < p < N(1 + 1/t). \tag{3.5}$$

Morover we assume that $a(x,s,\xi)$ is "monotone", that is

$$(a(x,s,\xi) - a(x,s,\eta), \xi - \eta) > 0, \tag{3.6}$$

for a.e $x \in \Omega$, for every s$\in \mathbb{R}$, for every $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N, \xi \neq \eta$.
Furthermore $H : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ is a Carathéodory function such that

$$|H(x,\xi)| \leq b(x)\,|\nabla u|^{p-1} + b_0(x), \tag{3.7}$$

with

$$b_0(x) \in L^1(\Omega), \tag{3.8}$$

$$b(x) \in L^{\tau}(\Omega),\ \tau > \frac{p'\widetilde{p}t}{t-(t+1)(p'+\widetilde{p})}. \tag{3.9}$$

where $\widetilde{p}$ is defined by

$$\widetilde{p} = \frac{p^{\#}}{r'}.$$

Finally μ is a measure in $M_b(\Omega)$ which can be decomposed as in Proposition 2.7

$$\mu = f - \operatorname{div}(g) + \mu_s^+ - \mu_s^-. \tag{3.10}$$

Definition 3.1 *We say that u is a renormalized solution of* (3.1) *if it satisfies the following conditions*

$$\begin{cases} u \text{ is measurable on } \Omega, \text{ almost everywhere finite,} \\ T_k(u) \in W_0^{1,p}(\nu),\ k > 0 \end{cases}$$

$$|u|^{p-1} \in L^{\gamma}(\nu),\ \gamma < \frac{\widetilde{p}}{p}; \tag{3.11}$$

$$|\nabla u|^{p-1} \in L^{q}(\nu),\ q < \frac{p'\widetilde{p}}{p'+\widetilde{p}}; \tag{3.12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{n\le u<2n} a(x,u,\nabla u)\nabla u\varphi = \int_{\Omega} \varphi d\mu_s^+; \tag{3.13}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{-2n\le u<n} a(x,u,\nabla u)\nabla u\varphi = \int_{\Omega} \varphi d\mu_s^-; \tag{3.14}$$

for every $\varphi \in C_b^0(\Omega)$ and

$$\int_{\Omega} a(x,u,\nabla u)\nabla u h'(u)v + \int_{\Omega} a(x,u,\nabla u)\nabla v h(u) + \int_{\Omega} H(x,\nabla u)h(u)v \tag{3.15}$$

$$= \int_{\Omega} fh(u)v + \int_{\Omega} g\nabla u h'(u)v + \int_{\Omega} g\nabla v h(u);$$

for every $v \in W^{1,p}(\nu) \cap L^{\infty}(\Omega)$ and for every $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ with compact support in $\mathbb{R}$, which are such that $h(u)v \in W_0^{1,p}(\nu)$.

The main result of this paper is the following

Theorem 3.1 *Assume that* (3.2) – (3.10) *hold. Then there exists at least a renormalized solution to problem* (3.1).

In order to prove this result we proceed firstly by introducing "approximated problems". Then we prove a priori estimates for the gradients of the solutions to such problems. Finally we pass to the limit by using a stability result which is contained in the Appendix.

3.1 A technical result

In this section we prove a generalization of a result proved in [4] (see also [7]). Here we denote by

$$meas_\nu E = \int_E \nu(x)dx,$$

for any measurable set E.
We will use the weigthed Lorentz spaces $L^{r,\infty}(\nu)$, $0 < r \leq \infty$ which is the set of measurable functions such that

$$\|u\|_{L^{r,\infty}(\nu)} = \sup_{t>0} t\, meas_\nu \{x \in \Omega : |u| > t\}^{1/r} < +\infty.$$

The result of this section is the following:

Lemma 3.1 *Assume that Ω is an open subset of $\mathbb{R}^N$ with finite Lebesgue measure and let ν be a function such that (2.5) and (2.6) hold true. Let u be a measurable function such that $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\nu)$ with $k > 0$ and such that*

$$\int_\Omega \nu(x) |\nabla T_k(u)|^p \leq Mk + L, \tag{3.16}$$

where M and L are given constants. Then $|u|^{p-1} \in L^{\widetilde{p}/p,\infty}(\nu)$, $|\nabla u|^{p-1} \in L^{\frac{p'\widetilde{p}}{p'+\widetilde{p}},\infty}(\nu)$ and

$$\left\| |u|^{p-1} \right\|_{L^{\widetilde{p}/p,\infty}(\nu)} \leq C(N,p) \left[M + |\Omega|^{1/\widetilde{p}} L^{1/p'} \right], \tag{3.17}$$

$$\left\| |\nabla u|^{p-1} \right\|_{L^{p'\widetilde{p}/(p'+\widetilde{p}),\infty}(\nu)} \leq C(N,p) \left[M + |\Omega|^{1/\widetilde{p}} L^{1/p'} \right], \tag{3.18}$$

where $C(N,p)$ is a constant depending only on N and p.

Remark 3.2 *Under the assumption of Lemma 4.1, the functions $|u|^{p-1}$ and $|\nabla u|^{p-1}$ belong to the weighted Lorentz spaces $L^{\widetilde{p}/p,\infty}(\nu)$ and $L^{\frac{p'\widetilde{p}}{p'+\widetilde{p}},\infty}(\nu)$ respectively. By classical results ([38]) such spaces are imbedded in the weigthed spaces $L^\gamma(\nu)$, $\gamma < \frac{\widetilde{p}}{p}$ and $L^q(\nu)$, $q < \frac{p'\widetilde{p}}{p'+\widetilde{p}}$. Actually we will just use estimates of $|u|^{p-1}$ and $|\nabla u|^{p-1}$ in $L^\gamma(\nu)$, and $L^q(\nu)$ respectively.*
Moreover we observe that, if ν is a constant then $\frac{\widetilde{p}}{p} = \frac{N}{N-p}$ and $\frac{p'\widetilde{p}}{p'+\widetilde{p}} = \frac{N}{N-1}$.

Proof.
We begin by proving (3.17). For any $h_0 > 0$, we have

$$\left\| |u|^{p-1} \right\|_{L^{\widetilde{p}/p,\infty}(\nu)} = \sup_{h>0} h\, meas_\nu \left\{ x \in \Omega : |u|^{p-1} > h \right\}^{p/\widetilde{p}} \leq \tag{3.19}$$

$$\leq \sup_{0<h\leq h_0} h\, meas_\nu \left\{ x \in \Omega : |u|^{p-1} > h \right\}^{p/\widetilde{p}}$$

$$+ \sup_{h\geq h_0} h\, meas_\nu \left\{ x \in \Omega : |u|^{p-1} > h \right\}^{p/\widetilde{p}}$$

$$\leq h_0\, |\Omega|^{p/\widetilde{p}} + \sup_{h\geq h_0} h\, meas_\nu \left\{ x \in \Omega : |u|^{p-1} > h \right\}^{p/\widetilde{p}}.$$

Now we observe that

$$h^{\widetilde{p}}\, meas_\nu \{x \epsilon \Omega : |u| > h\} \leq \int_\Omega T_h^{\widetilde{p}}(u) \nu(x) dx \leq$$

$$\leq C(N,p) \left(\int_\Omega |\nabla T_h(u)|^p\, v(x) dx \right)^{\widetilde{p}/p}$$

$$\leq C(N,p)(Mh + L)^{\widetilde{p}/p},$$

that is for every h > 0

$$h^{\widetilde{p}/p-1}\, meas_\nu \left\{ x \in \Omega : |u|^{p-1} > h \right\} \leq C(N,p)(Mh^{1/p-1} + L)^{\widetilde{p}/p}.$$

Then we obtain

$$meas_\nu \left\{ x \in \Omega : |u|^{p-1} > h \right\} \leq C(N,p)(Mh^{-1} + Lh^{-p'})^{\widetilde{p}/p},$$

that is

$$h\, meas_\nu \left\{ x \in \Omega : |u|^{p-1} > h \right\}^{p/\widetilde{p}} \leq C(N,p)(M + Lh^{-p'}). \tag{3.20}$$

By (3.20), inequality (3.19) becomes

$$\left\| |u|^{p-1} \right\|_{L^{\widetilde{p}/p,\infty}(\nu)} \leq h_0\, |\Omega|^{p/\widetilde{p}} + C(N,p)(M + Lh^{1-p'}).$$

Taking $h_0 = \frac{L^{(p-1)/p}}{|\Omega|^{(p-1)/\widetilde{p}}}$, we have (3.17) .
Now we estimate the $|\nabla u|^{p-1}$
For every $\mu > 0$ and every $k > 0$, we have

$$\mu^p \, meas_\nu \{x \in \Omega : |\nabla u| > \mu \, and \, |u| \leq k\} \leq \int_{|u|\leq k} |\nabla u|^p \, v(x)dx \qquad (3.21)$$
$$= \int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p \, v(x)dx \leq (Mk + L),$$

$$meas_\nu \left\{x \in \Omega : |\nabla u|^{p-1} > \mu \, and \, |u| > k\right\} \leq \frac{(Mk+L)^{\widetilde{p}/p}}{k^{\widetilde{p}/p}}. \qquad (3.22)$$

By (3.21) , (3.22) we have

$$meas_\nu \left\{x \in \Omega : |\nabla u|^{p-1} > \mu\right\} \leq \frac{(Mk+L)}{\mu^{p'}} + C(N,p)\frac{(Mk+L)^{\widetilde{p}/p}}{k^{\widetilde{p}}}. \quad (3.23)$$

Now if we write $k = a + b$ with $a > 0$ and $b > 0$, (3.23) becomes

$$meas_\nu \left\{x \in \Omega : |\nabla u|^{p-1} > \mu\right\} \leq \frac{Ma}{\mu^{p'}} + \frac{Mb}{\mu^{p'}} + \frac{M}{\mu^{p'}} + \qquad (3.24)$$
$$+ C(N,p)2^{\widetilde{p}/p} M^{\widetilde{p}/p}(a+b)^{\frac{\widetilde{p}}{p}-\widetilde{p}} +$$
$$+ C(N,p)2^{\widetilde{p}/p} L^{\widetilde{p}/p}(a+b)^{-\widetilde{p}},$$

for every $\mu > 0 \;\; a > 0, b > 0$. If we observe that $\frac{\widetilde{p}}{p} - \widetilde{p} = \widetilde{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right) = -\frac{\widetilde{p}}{p'} < 0$ we deduce

$$(a+b)^{\frac{\widetilde{p}}{p}-\widetilde{p}} \leq a^{-\frac{\widetilde{p}}{p'}}, \; (a+b)^{-\widetilde{p}} \leq b^{-\widetilde{p}}.$$

By (3.23) , (3.24) , we obtain

$$meas_\nu \left\{x \in \Omega : |\nabla u|^{p-1} > \mu\right\} \leq \frac{Ma}{\mu^{p'}} + \frac{Mb}{\mu^{p'}} + \frac{M}{\mu^{p'}} +$$
$$+ C(N,p)2^{\widetilde{p}/p} M^{\widetilde{p}/p} a^{-\frac{\widetilde{p}}{p'}} + C(N,p)2^{\widetilde{p}/p} L^{\widetilde{p}/p} b^{-\widetilde{p}}$$
$$\leq C(N,p)\left[\frac{Ma}{\mu^{p'}} + a^{-\widetilde{p}/p'} M^{\widetilde{p}/p} + \frac{Mb}{\mu^{p'}} + b^{-\widetilde{p}} L^{\widetilde{p}/p}\right]$$
$$+ C(N,p)\frac{L}{\mu^{p'}}.$$

If we take $a = M^{\frac{\widetilde{p}-p}{p+\widetilde{p}(p-1)}} \mu^{\frac{p^2}{(p-1)[p+\widetilde{p}(p-1)]}}$ and $b = \left(\frac{\mu^{p'} L^{\widetilde{p}/p}}{M}\right)^{\frac{1}{1+\widetilde{p}}}$, we obtain

$$meas_\nu \left\{x \in \Omega : |\nabla u|^{p-1} > \mu\right\} \leq C(N,p) \left[\left(\frac{M}{\mu}\right)^{(\widetilde{p}p)/(p+\widetilde{p}(p-1))}\right] +$$
$$+ C(N,p) \left[\left(\frac{ML^{1/p}}{\mu^{p'}}\right)^{\widetilde{p}/(\widetilde{p}+1)} + \frac{L}{\mu^{p'}}\right]$$

Since $\frac{\widetilde{p}p}{p+\widetilde{p}(p-1)} = \frac{p'+\widetilde{p}}{p'\widetilde{p}}$, we have

$$meas_\nu \left\{x \in \Omega : |\nabla u|^{p-1} > \mu\right\}^{\frac{p'+\widetilde{p}}{p'\widetilde{p}}} \leq C(N,p) \left[\frac{M}{\mu} + M^{\frac{p'+\widetilde{p}}{p'(\widetilde{p}+1)}} L^{\frac{p'+\widetilde{p}}{p'p(\widetilde{p}+1)}} \mu^{-\frac{p'+\widetilde{p}}{(\widetilde{p}+1)}}\right]$$
$$+ C(N,p) \left[L^{\frac{p'+\widetilde{p}}{p'\widetilde{p}}} \mu^{-\frac{p'+\widetilde{p}}{\widetilde{p}}}\right],$$

or equivantely

$$\mu\, meas_\nu \left\{x \epsilon \Omega : |\nabla u|^{p-1} > \mu\right\}^{\frac{p'+\widetilde{p}}{p'\widetilde{p}}} \leq C(N,p) \left[M + M^{\frac{p'+\widetilde{p}}{p'(\widetilde{p}+1)}} \left(L^{\frac{p'+\widetilde{p}}{p'\widetilde{p}}} / \mu^{\frac{p'}{\widetilde{p}}}\right)^{\frac{\widetilde{p}}{p(\widetilde{p}+1)}}\right]$$
$$C(N,p) \left(L/\mu^{\frac{p'^2}{p'+\widetilde{p}}}\right)^{\frac{p'+\widetilde{p}}{p'\widetilde{p}}}.$$

By Young inequality we have

$$\mu\, meas_\nu \left\{x \in \Omega : |\nabla u|^{p-1} > \mu\right\}^{\frac{p'+\widetilde{p}}{p'\widetilde{p}}} \leq C(N,p) \left[M + \left(\frac{p'+\widetilde{p}}{p'(\widetilde{p}+1)}\right) M\right]$$
$$+ C(N,p) \left[\left(\frac{\widetilde{p}}{p(\widetilde{p}+1)}\right) \left(\frac{L}{\mu^{p'^2/(p'+\widetilde{p})}}\right)^{\frac{p'+\widetilde{p}}{p'\widetilde{p}}}\right] \tag{3.25}$$
$$+ C(N,p) \left[\left(\frac{L}{\mu^{p'^2/(p'+\widetilde{p})}}\right)^{\frac{p'+\widetilde{p}}{p'\widetilde{p}}}\right]$$
$$\leq C(N,p) \left[M + \frac{L^{\frac{p'+\widetilde{p}}{p'\widetilde{p}}}}{\mu^{p'/\widetilde{p}}}\right].$$

By (3.25) we deduce that

$$\sup_{\mu>0}\mu meas_\nu \left\{x \in \Omega : |\nabla u|^{p-1} > \mu\right\}^{\frac{p'+\tilde{p}}{p'\tilde{p}}} \leq$$

$$\sup_{0<\mu\leq\mu_0} \mu\, meas_\nu \left\{x \in \Omega : |\nabla u|^{p-1} > \mu\right\}^{\frac{p'+\tilde{p}}{p'\tilde{p}}} +$$

$$+ \sup_{\mu\geq\mu_0} \mu meas_\nu \left\{x \in \Omega : |\nabla u|^{p-1} > \mu\right\}^{\frac{p'+\tilde{p}}{p'\tilde{p}}}$$

$$\leq \mu_0 |\Omega|^{\frac{p'+\tilde{p}}{p'\tilde{p}}} + \sup_{\mu\geq\mu_0} c\left[M + \frac{L^{\frac{p'+\tilde{p}}{p'\tilde{p}}}}{\mu^{p'/\tilde{p}}}\right] \leq$$

$$c\left[\mu_0 |\Omega|^{\frac{p'+\tilde{p}}{p'\tilde{p}}} + M + \frac{L^{\frac{p'+\tilde{p}}{p'\tilde{p}}}}{\mu^{p'/\tilde{p}}}\right]$$

By choosing $\mu_0 = \left(\frac{L}{|\Omega|}\right)^{1/p'}$ we have (3.18). ■

4 Proof of existence result

In order to prove the Theorem 3.1 we begin by introducing the approximated problem.

4.1 Approximated problems

According to (3.10) the bounded Radon measure μ can be decomposed in

$$\mu = f - \operatorname{div}(g) + \mu_s^+ - \mu_s^-,$$

where $f \in L^1(\Omega)$, $g \in \left(L^{p'}\left(1/\nu^{p-1}\right)\right)^N$, μ_s^+, μ_s^- two nonnegative measures in $M_{s,\nu}(\Omega)$ which are concentrated in two disjont subsets E^+ and E^- of zero (p,ν)-capacity. The measure μ can be approximated by a sequence μ_ε that is

$$\mu_\epsilon = f_\varepsilon - \operatorname{div}(g) + \lambda_\varepsilon^+ - \lambda_\varepsilon^-,$$

where

$$\begin{cases} f_\varepsilon & \text{is a sequence of functions in } L^1(\Omega) \\ & \text{that converges to } f \text{ in } L^1(\Omega) \text{ weakly,} \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} \lambda_\varepsilon^+ & \text{is a sequence of nonnegative functions in } L^\alpha(\Omega) \\ & \text{with } \alpha = \frac{Npt}{pt(N+1)-N(t+1)} \text{ that converges to } \mu_s^+ \\ & \text{in the narrow topology of measures,} \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} \lambda_\varepsilon^- & \text{is a sequence of nonnegative functions in } L^\alpha(\Omega) \\ & \text{with } \alpha = \frac{Npt}{pt(N+1)-N(t+1)} \text{that converges to } \mu_s^- \\ & \text{in the narrow topology of measures.} \end{cases} \tag{4.3}$$

We observe that $\mu_\varepsilon \in W^{-1,p'}(1/\nu)$ by Propositions 2.1 and 2.2.
Let us denote by

$$H_\varepsilon(x,\xi) = T_{1/\varepsilon}(H(x,\xi)). \tag{4.4}$$

By (3.7) we have

$$|H_\varepsilon(x,\xi)| \le |H(x,\xi)| \le b(x)\,|\nabla u|^{p-1} + b_0(x),$$

$$|H_\varepsilon(x,\xi)| \le \frac{1}{\varepsilon}. \tag{4.5}$$

Let us consider the following approximated problem:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)) + H_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon) = \mu_\varepsilon & \text{in } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.6}$$

A function u_ε is a weak solution to such a problem if it satisfies the following conditions:

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\nu), \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\,\nabla v + \int_\Omega H_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon)v = \int_\Omega f_\varepsilon v + \int_\Omega g\nabla v + \\ \qquad\qquad \displaystyle\int_\Omega \lambda_\varepsilon^+ v + \int_\Omega \lambda_\varepsilon^- v, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\nu). \end{cases} \tag{4.7}$$

The existence of a weak solution u_ε to problem (4.6) is obtained by adapting the proof of classical results proved by Leray and Lions ([30]). Moreover it is easy to verify that a weak solution to problem (4.6) is also a renormalized solution to problem (4.6).

4.2 A priori estimates

In this section we prove a priori estimates in the weighted spaces $L^{\gamma}(\nu)$, $\gamma < \frac{\widetilde{p}}{p}$ for the sequence $|u_{\varepsilon}|^{p-1}$ and a priori estimate in the space $L^{q}(\nu)$, $q < \frac{p'\widetilde{p}}{p'+\widetilde{p}}$ for the sequence of the gradients $|\nabla u_{\varepsilon}|^{p-1}$. The proof is divided in several steps. We begin by considering the case where $\|b\|_{L^{r}(\Omega)}$ is small enough for the sake of semplicity. Then, in the general case, we adapt the technique of Bottaro and Marina ([14]).

Theorem 4.1 *Under the hypotheses of Theorem* 3.1 *every solution* u_{ε} *to the problem* (4.7) *satisfies*

$$\left\| |u_{\varepsilon}|^{p-1} \right\|_{L^{\gamma}(\nu)} \leq c, \tag{4.8}$$

$$\left\| |\nabla u_{\varepsilon}|^{p-1} \right\|_{L^{q}(\nu)} \leq c, \tag{4.9}$$

where $\gamma < \frac{\widetilde{p}}{p}$ *and* $q < \frac{p'\widetilde{p}}{p'+\widetilde{p}}$, c *is a positive constant which depends only on* p, $|\Omega|$, N, $\|b(x)\|_{L^{r}(\Omega)}$, $\sup_{\varepsilon} \|f_{\varepsilon}\|_{L^{1}(\Omega)}$, $\sup_{\varepsilon} (\lambda_{\varepsilon}^{+}(\Omega) + \lambda_{\varepsilon}^{-}(\Omega))$, *and on the rearrangement of* $b(x)$.

Proof. *The case where* $\|b(x)\|_{L^{r}(\Omega)}$ *is small*
Using $T_k(u_{\varepsilon})$, $k > 0$, as a test function in (4.7),we obtain

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} a(x, u_{\varepsilon}, \nabla u_{\varepsilon}) \nabla T_k(u_{\varepsilon}) + \int_{\Omega} H_{\varepsilon}(x, \nabla u_{\varepsilon}) T_k(u_{\varepsilon}) \\ &= \int_{\Omega} f_{\varepsilon} T_k(u_{\varepsilon}) + \int_{\Omega} g \nabla T_k(u_{\varepsilon}) + \int_{\Omega} \lambda_{\varepsilon}^{+} T_k(u_{\varepsilon}) - \int_{\Omega} \lambda_{\varepsilon}^{-} T_k(u_{\varepsilon}). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Now we estimate the single integrals in equality (4.10). From the ellipticity condition (3.2) we obtain

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a(x, u_{\varepsilon}, \nabla u_{\varepsilon}) \nabla T_k(u_{\varepsilon}) &\geq \int_{|u_{\varepsilon}| \leq k} a(x, u_{\varepsilon}, \nabla u_{\varepsilon}) \nabla u_{\varepsilon} \\ &\geq \int_{|u_{\varepsilon}| \leq k} \nu(x) |\nabla u_{\varepsilon}|^{p} = \int_{\Omega} \nu(x) |\nabla T_k(u_{\varepsilon})|^{p}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

By (3.7) and by Hölder inequality we have

$$\left|\int_\Omega H_\varepsilon(x,\nabla u)T_k(u_\varepsilon)\right| \le \int_\Omega b(x)\left|\nabla u_\varepsilon\right|^{p-1} T_k(u_\varepsilon) + \int_\Omega b_0(x)T_k(u_\varepsilon) \le \tag{4.12}$$

$$\le k\int_\Omega b(x)\left|\nabla u_\varepsilon\right|^{p-1} + k\int_\Omega b_0(x)$$

$$\le k\left\|b(x)\right\|_{L^\tau(\Omega)}\left\|\nu^{-1}(x)\right\|^{1/q}_{L^t(\Omega)}\left\||\nabla u_\varepsilon|^{p-1}\right\|_{L^q(\nu)}$$

$$+ k\left\|b_0\right\|_{L^1(\Omega)},$$

Moreover it results:

$$\int_\Omega f_\varepsilon T_k(u_\varepsilon) \le k\left\|f_\varepsilon\right\|_{L^1(\Omega)}, \tag{4.13}$$

$$\left|\int_\Omega \lambda_n^+ T_k(u_\varepsilon)\right| \le k\int_\Omega \lambda_n^+, \tag{4.14}$$

$$\left|\int_\Omega \lambda_n^- T_k(u_\varepsilon)\right| \le k\int_\Omega \lambda_n^-. \tag{4.15}$$

Now we estimate the last integral in (4.10). From Young inequality we obtain

$$\left|\int_\Omega g\nabla T_k(u_\varepsilon)\right| \le \frac{1}{p}\int_\Omega \nu(x)\left|\nabla T_k(u_\varepsilon)\right|^p + \frac{1}{p'}\int_\Omega g^{p'}\nu^{-1/(p-1)}. \tag{4.16}$$

By definition of the convergence of measures in the narrow topology, we have

$$\sup_\varepsilon \left\|f_\varepsilon\right\|_{L^1(\Omega)} + \sup_\varepsilon\left(\lambda_\varepsilon^+(\Omega) + \lambda_\varepsilon^-(\Omega)\right) < +\infty. \tag{4.17}$$

By (4.10) – (4.17) we obtain

$$\int_\Omega \nu(x)\left|\nabla T_k(u_\varepsilon)\right|^p \le k\,p'\left[\ \left\|b(x)\right\|_{L^\tau(\Omega)}\left\|\nu^{-1}(x)\right\|^{1/q}_{L^t(\Omega)}\ \right]\left\||\nabla u_\varepsilon|^{p-1}\right\|_{L^q(\Omega)} \tag{4.18}$$

$$+ k\,p'\left\|b_0(x)\right\|_{L^1(\Omega)} + p'\sup_\varepsilon\left\|f_\varepsilon\right\|_{L^1(\Omega)} +$$

$$+ k\,p'\sup_\varepsilon\left(\lambda_\varepsilon^+(\Omega) + \lambda_\varepsilon^-(\Omega)\right) + \left\|g\right\|^{p'}_{L^{p'}(1/\nu^{p-1})}$$

Now we define

$$M = p' \left[\|b(x)\|_{L^\tau(\Omega)} \left\|\nu^{-1}(x)\right\|^{1/q}_{L^t(\Omega)} \left\| |\nabla u_\varepsilon|^{p-1} \right\|_{L^q(\Omega)} \right] \tag{4.19}$$
$$+ p' \left[\|b_0(x)\|_{L^1(\Omega)} + \sup_\varepsilon \|f_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} + \sup_\varepsilon \left(\lambda^+_\varepsilon(\Omega) + \lambda^-_\varepsilon(\Omega)\right) \right],$$

$$M^* = p' \left[\|b_0(x)\|_{L^1(\Omega)} + \sup_\varepsilon \|f_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} + \sup_\varepsilon \left(\lambda^+_\varepsilon(\Omega) + \lambda^-_\varepsilon(\Omega)\right) \right], \tag{4.20}$$

$$L = \|g\|^{p'}_{L^{p'}(1/\nu^{p-1})} \tag{4.21}$$

Therefore (4.18) becomes

$$\int_\Omega \nu(x) \left|\nabla T_k(u_\varepsilon)\right|^p \le Mk + L. \tag{4.22}$$

By Lemma 4.1 we obtain

$$\left\| |\nabla u_\varepsilon| \right\|^{p-1}_{L^q(\nu)} \le c(N,p) \left[M + |\Omega|^{\frac{1}{p}} L^{\frac{1}{p'}} \right] \tag{4.23}$$

We have

$$\left\| |\nabla u_\varepsilon|^{p-1} \right\|_{L^q(\nu)} \le c(N,p) \|b(x)\|_{L^\tau(\Omega)} \left\|\nu^{-1}(x)\right\|^{\frac{1}{q}}_{L^t(\Omega)} \left\| |\nabla u_\varepsilon|^{p-1} \right\|_{L^q(\nu)} +$$
$$+ c(N,p) \left[M^* + |\Omega|^{\frac{1}{p}} L^{\frac{1}{p'}} \right].$$

If the norm of the coefficient b is small enough, i.e.

$$c(N,p) \|b(x)\|_{L^\tau(\Omega)} \left\|\nu^{-1}(x)\right\|^{\frac{1}{q}}_{L^t(\Omega)} < 1,$$

we obtain

$$\left\| |\nabla u_\varepsilon|^{p-1} \right\|_{L^q(\nu)} \le \frac{c(N,p) \left[M^* + |\Omega|^{\frac{1}{p}} L^{\frac{1}{p'}} \right]}{1 - c(N,p) \|b(x)\|_{L^\tau(\Omega)} \left\|\nu^{-1}(x)\right\|^{\frac{1}{q}}_{L^t(\Omega)}},$$

which is the a priori estimate (4.9).

General case

Now we want to decompose the term $b(x)$ in a finite sum of terms. We will decompose the term $|\nabla u_\varepsilon|^{p-1}$ in a sum of term of type

$$|\nabla u_\varepsilon|^{p-1} \chi_{\{m_{i+1} < |u_\varepsilon| < m_i\}}.$$

The values of the costant m_i depend on m but not their number. I will vary between 0 and $I \leq I^*$ which is independent of N.
Now we define a new set Z_N so that the measure of the set $\{x \in \Omega : m_{i+1} < |u_\varepsilon| < m_i\}$ will be continuous respect to the parameter m for m_i given. Since Ω is a bounded open set, $|\Omega|$ is finite and the set of constant c such that

$$|\{x \in \Omega : |u_\varepsilon(x)| = c\}| > 0$$

is at most countable.
Let be Z_N^c the union of all those sets and $Z_N = \Omega \backslash Z_N^c$ the union of all the sets such that $|\{x \in \Omega : |u_\varepsilon(x)| = c\}| = 0$. Since

$$\nabla u_\varepsilon = 0 \quad a.e. \text{ on } \{x \in \Omega : |u_\varepsilon(x)| = c\},$$

we obtain that

$$\nabla u_\varepsilon = 0 \quad a.e. \text{ on } Z_n^c.$$

With this choice of m_i we know that for m_i fixed and $0 < m < m_i$ the function

$$m \longrightarrow |Z_n \cap \{m < |u_\varepsilon| < m_i\}|$$

is continuous.
First step:
Define for $m > 0$ the function that is

$$S_m(s) = \begin{cases} 0 & |s| \leq m \\ (|s| - m)\ sign(s) & |s| > m. \end{cases} \tag{4.24}$$

Using $T_k(S_m(u_\varepsilon))$, with m to be specified, as a test function in (4.7), we obtain

$$\int_\Omega a(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \nabla T_k(S_m(u_\varepsilon)) + \int_\Omega H_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) T_k(S_m(u_\varepsilon)) =$$

$$= \int_\Omega f_\varepsilon T_k(S_m(u_\varepsilon)) + \int_\Omega g \nabla T_k(S_m(u_\varepsilon)) + \int_\Omega \lambda_n^+ T_k(S_m(u_\varepsilon)) \tag{4.25}$$
$$- \int_\Omega \lambda_n^- T_k(S_m(u_\varepsilon)).$$

Now we estimate the singular integrals in (4.25).
By elliptic conditions (3.2), we have

$$\int_\Omega a(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \nabla T_k(S_m(u_\varepsilon)) \geq \int_\Omega \nu(x) |\nabla T_k(S_m(u_\varepsilon))|^p; \tag{4.26}$$

Moreover

$$\int_{\Omega} f_{\varepsilon} T_k\left(S_m\left(u_{\varepsilon}\right)\right) \leq k \left\|f_{\varepsilon}\right\|_{L^1(\Omega)}, \tag{4.27}$$

$$\left|\int_{\Omega} \lambda_n^{+} T_k\left(S_m\left(u_{\varepsilon}\right)\right)\right| \leq k \int_{\Omega} \lambda_n^{+}, \tag{4.28}$$

$$\left|\int_{\Omega} \lambda_n^{-} T_k\left(S_m\left(u_{\varepsilon}\right)\right)\right| \leq k \int_{\Omega} \lambda_n^{-}, \tag{4.29}$$

By Young inequality we obtain

$$\left|\int_{\Omega} g \nabla T_k\left(S_m\left(u_{\varepsilon}\right)\right)\right| \leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} \nu(x)\left|\nabla T_k\left(S_m\left(u_{\varepsilon}\right)\right)\right|^p + \frac{1}{p'} \int_{\Omega} g^{p'} \nu^{-1/(p-1)}. \tag{4.30}$$

Using the definition of $S_m\left(u_{\varepsilon}\right)$ and that $\nabla u_{\varepsilon} = \nabla S_m\left(u_{\varepsilon}\right)$ a.e. in $Z_{\varepsilon} = \Omega - Z_{\varepsilon}^c$ we have by (3.7)

$$\left|\int_{\Omega} H_{\varepsilon}(x, \nabla u_{\varepsilon}) T_k\left(S_m\left(u_{\varepsilon}\right)\right)\right| \leq \int_{\Omega} \left|b(x)\left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{p-1} T_k\left(S_m\left(u_{\varepsilon}\right)\right)\right| + \int_{\Omega} \left|b_0(x) T_k\left(S_m\left(u\right.\right.\right.\right. \tag{4.31}$$

$$\leq \|b(x)\|_{L^{\tau}\left(Z_{\varepsilon} \cap\{|u_{\varepsilon}|>m\}\right)} \left\|\nu^{-1}(x)\right\|_{L^t\left(Z_{\varepsilon} \cap\{|u_{\varepsilon}|>m\}\right)}^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left\||\nabla\left(S_m\left(u_{\varepsilon}\right)\right)|^{p-1}\right\|_{L^q(\nu)} + k \left\|b_0\right\|_{L^1(\Omega)}$$

By (4.26) – (4.31) we have for $k > 0$

$$\int_{\Omega} \nu\left(x\right)\left|\nabla T_k\left(S_m\left(u_{\varepsilon}\right)\right)\right|^p \leq M_1 k + L, \tag{4.32}$$

where

$$M_1 = p' \|b(x)\|_{L^{\tau}\left(Z_{\varepsilon} \cap\{|u_{\varepsilon}|>m\}\right)} \left\|\nu^{-1}(x)\right\|_{L^t\left(Z_{\varepsilon} \cap\{|u_{\varepsilon}|>m\}\right)}^{\frac{1}{q}} \times \tag{4.33}$$

$$\times \left\||\nabla\left(S_m\left(u_{\varepsilon}\right)\right)|^{p-1}\right\|_{L^q(\nu)} + M^*,$$

and where $M^*$and L are defined by (4.20) – (4.21).
By Lemma 4.1 we have

$$\left\||\nabla\left(S_m\left(u_{\varepsilon}\right)\right)|^{p-1}\right\|_{L^q(\nu)} \leq c\left(N, p\right) \|b(x)\|_{L^{\tau}\left(|Z_{\varepsilon} \cap\{|u_{\varepsilon}|>m\}|\right)} \left\|\nu^{-1}(x)\right\|_{L^t(\Omega)}^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left\||\nabla\left(S_m\left(u_{\varepsilon}\right)\right)|^{p-1}\right\|_{L^q(\nu)} + c\left(N, p\right)\left[M^* + |\Omega|^{\frac{1}{p}} L^{\frac{1}{p'}}\right].$$

Now we observe that

$$\|b(x)\|_{L^1(Z_\varepsilon\cap\{|u_\varepsilon|>m\})} = \int_{|Z_\varepsilon\cap\{|u_\varepsilon|>m\}|} b(x) \leq \int_0^{|Z_\varepsilon\cap\{|u_\varepsilon|>m\}|} b^*(t). \quad (4.34)$$

If

$$c(N,p)\,\|b(x)\|_{L^\tau(|Z_\varepsilon\cap\{|u_\varepsilon|>m\}|)}\,\left\|\nu^{-1}(x)\right\|^{\frac{1}{q}}_{L^t(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \quad (4.35)$$

then we choose $m = m_1 = 0$. If (4.35) is not true, we choose $m = m_1 > 0$ such that

$$c(N,p)\left(\int_0^{|Z_\varepsilon\cap\{|u_\varepsilon|>m_1\}|} b^*(t)^\tau dt\right)^{\frac{1}{\tau}}\left(\int_\Omega \nu^{-t}\right)^{\frac{1}{tq}} = \frac{1}{2}.$$

The function $m \longrightarrow |Z_\varepsilon \cap \{|u_\varepsilon| > m\}|$ is continuous, decreasing and goes to 0 when m goes to ∞ . Now if we define δ by

$$c(N,p)\left(\int_0^{\delta} b^*(t)^\tau dt\right)^{\frac{1}{\tau}}\left(\int_\Omega \nu^{-t}\right)^{\frac{1}{tq}} = \frac{1}{2}, \quad (4.36)$$

we have $|Z_\varepsilon \cap \{|u_\varepsilon| > m_1\}| = \delta$. With this choise of m, we obtain

$$\left\||\nabla\left(S_m\left(u_\varepsilon\right)\right)|^{p-1}\right\|_{L^q(\nu)} \leq 2\,c\left(N,p\right)\left[M^* + |\Omega|^{\frac{1}{p}}\,L^{\frac{1}{p'}}\right]. \quad (4.37)$$

Second step:
Define for $0 \leq m < m_1$ the function

$$S_{m,m_1}\left(u_\varepsilon\right) = \begin{cases} m_1 - m & u_\varepsilon > m_1 \\ u_\varepsilon - m & m \leq u_\varepsilon \leq m_1 \\ 0 & -m \leq u_\varepsilon \leq m \\ u_\varepsilon + m & -m_1 \leq u_\varepsilon \leq -m \\ m - m_1 & u_\varepsilon < -m_1 \end{cases} \quad (4.38)$$

Using the test function $T_k\left(S_{m,m_1}\left(u_\varepsilon\right)\right)$ with m to be specified later we have

$$\int_\Omega a\left(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon\right)\nabla T_k\left(S_{m,m_1}\left(u_\varepsilon\right)\right) + \int_\Omega H_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon)T_k\left(S_{m,m_1}\left(u_\varepsilon\right)\right) = \quad (4.39)$$

$$\int_\Omega f_\varepsilon T_k\left(S_{m,m_1}\left(u_\varepsilon\right)\right) + \int_\Omega g\nabla T_k\left(S_{m,m_1}\left(u_\varepsilon\right)\right) + \int_\Omega \lambda_n^+ T_k\left(S_{m,m_1}\left(u_\varepsilon\right)\right)$$
$$- \int_\Omega \lambda_n^- T_k\left(S_{m,m_1}\left(u_\varepsilon\right)\right)$$

Now as in the previous step we have

$$\int_{\Omega} a\left(x, u_{\varepsilon}, \nabla u_{\varepsilon}\right) \nabla T_{k}\left(S_{m,m_1}\left(u_{\varepsilon}\right)\right) \geq \int_{\Omega} \nu\left(x\right) \left|\nabla T_{k}\left(S_{m,m_1}\left(u_{\varepsilon}\right)\right)\right|^{p} .$$

$$\int_{\Omega} f_{\varepsilon} T_{k}\left(S_{m,m_1}\left(u_{\varepsilon}\right)\right) \leq k \left\|f_{\varepsilon}\right\|_{L^{1}(\Omega)}, \tag{4.41}$$

$$\left|\int_{\Omega} \lambda_{n}^{+} T_{k}\left(S_{m,m_1}\left(u_{\varepsilon}\right)\right)\right| \leq k \int_{\Omega} \lambda_{n}^{+}, \tag{4.42}$$

$$\left|\int_{\Omega} \lambda_{n}^{-} T_{k}\left(S_{m,m_1}\left(u_{\varepsilon}\right)\right)\right| \leq k \int_{\Omega} \lambda_{n}^{-}. \tag{4.43}$$

By Young inequality we have

$$\int_{\Omega} g \nabla T_{k}\left(S_{m,m_1}\left(u_{\varepsilon}\right)\right) \leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} \nu(x) \left|\nabla T_{k} S_{m,m_1}\left(u_{\varepsilon}\right)\right|^{p} + \frac{1}{p'} \int_{\Omega} g^{p'} \nu^{-1/(p-1)}. \tag{4.44}$$

Since $S_{m,m_1}\left(u_{\varepsilon}\right) = 0$ when $\left|u_{\varepsilon}\right| \leq m$, we obtain

$$\left|\int_{\Omega} H_{\varepsilon}(x, \nabla u_{\varepsilon}) T_{k}\left(S_{m,m_1}\left(u_{\varepsilon}\right)\right)\right| \leq k \int_{m<\left|u_{\varepsilon}\right|<m_1} b\left(x\right) \left|\nabla u_{\varepsilon}\right|^{p-1} + \tag{4.45}$$

$$+ k \int_{\left|u_{\epsilon}\right| \geq m_1} b\left(x\right) \left|\nabla u_{\epsilon}\right|^{p-1} + k \int_{\Omega} b_{0}(x)$$

$$\leq k \left\|b\left(x\right)\right\|_{L^{\tau}\left(Z_{\varepsilon} \cap \{m<\left|u_{\varepsilon}\right|<m_1\}\right)} \left\|\nu^{-1}\right\|_{L^{t}(\Omega)}^{\frac{1}{q}} \left\||\nabla\left(S_{m,m_1}\left(u_{\varepsilon}\right)\right)|^{p-1}\right\|_{L^{q}(v)}$$

$$+ k \left\|b\left(x\right)\right\|_{L^{\tau}(\Omega)} \left\|\nu^{-1}\right\|_{L^{t}(\Omega)}^{\frac{1}{q}} \left\||\nabla\left(S_{m_1}\left(u_{\varepsilon}\right)\right)|^{p-1}\right\|_{L^{q}(v)} + k \left\|b_{0}(x)\right\|_{L^{1}(\Omega)} .$$

Combining (4.39), (4.45) we have for $k > 0$

$$\int_{\Omega} \nu\left(x\right) \left|\nabla T_{k}\left(S_{m,m_1}\left(u_{\varepsilon}\right)\right)\right|^{p} \leq M_{2} k + L, \tag{4.46}$$

where

$$M_{2} = p' \left\|b(x)\right\|_{L^{\tau}\left(Z_{\varepsilon} \cap \{m_1<\left|u_{\varepsilon}\right|<m\}\right)} \left\|\nu^{-1}(x)\right\|_{L^{t}(\Omega)}^{\frac{1}{q}} \left\||\nabla\left(S_{m,m_1}\left(u_{\varepsilon}\right)\right)|^{p-1}\right\|_{L^{q}(\nu)} + \tag{4.47}$$

$$+ \left\|b\left(x\right)\right\|_{L^{\tau}(\Omega)} \left\|\nu^{-1}\right\|_{L^{t}(\Omega)}^{\frac{1}{q}} \left\||\nabla\left(S_{m_1}\left(u_{\varepsilon}\right)\right)|^{p-1}\right\|_{L^{q}(v)} + M^{*},$$

where M^* and L are defined in (4.20) , (4.21).
By (4.9) we have

$$\begin{aligned}
&\left\| |\nabla (S_{m,m_1}(u_\varepsilon))|^{p-1} \right\|_{L^q(\nu)} \\
&\leq c(N,p) \left\| b(x) \right\|_{L^\tau(|Z_\varepsilon \cap \{m<|u_\varepsilon|<m_1\}|)} \left\| \nu^{-1}(x) \right\|^{\frac{1}{q}}_{L^t(\Omega)} \left\| |\nabla (S_{m,m_1}(u_\varepsilon))|^{p-1} \right\|_{L^q(\nu)} \\
&+ c(N,p) \left[\left\| b(x) \right\|_{L^\tau(\Omega)} \left\| \nu^{-1} \right\|^{\frac{1}{q}}_{L^t(\Omega)} \left\| |\nabla (S_{m_1}(u_\varepsilon))|^{p-1} \right\|_{L^q(v)} \right] \\
&+ c(N,p) \left[M^* + |\Omega|^{\frac{1}{\bar{p}}} L^{\frac{1}{p'}} \right].
\end{aligned}$$

If

$$c(N,p) \left\| b(x) \right\|_{L^\tau(|Z_\varepsilon \cap \{m<|u_\varepsilon|<m_1\}|)} \left\| \nu^{-1}(x) \right\|^{\frac{1}{q}}_{L^t(\Omega)} \leq \frac{1}{2}, \tag{4.48}$$

then we choose $m = m_2 = 0$. If (4.48) does not hold, we choose $m = m_2 > 0$ so that

$$c(N,p) \left\| b(x) \right\|_{L^\tau(|Z_\varepsilon \cap \{m<|u_\varepsilon|<m_1\}|)} \left\| \nu^{-1}(x) \right\|^{\frac{1}{q}}_{L^t(\Omega)} = \frac{1}{2}.$$

The function $m \longrightarrow |Z_\varepsilon \cap \{|u_\varepsilon| > m\}|$ is continuous, decreasing and goes to 0 when m goes to ∞ . Now if we define δ by

$$c(N,p) \left(\int_0^\delta b^*(t)^\tau dt \right)^{\frac{1}{\tau}} \left(\int_\Omega \nu^{-t} \right)^{\frac{1}{tq}} = \frac{1}{2} \tag{4.49}$$

we have $|Z_\varepsilon \cap \{m < |u_\varepsilon| < m_1\}| = \delta$. With this choice of m we obtain

$$\begin{aligned}
\left\| |\nabla (S_{m,m_1}(u_\varepsilon))|^{p-1} \right\|_{L^q(\nu)} &\leq 2\, c(N,p) \left[\left\| b(x) \right\|_{L^\tau(\Omega)} \left\| \nu^{-1} \right\|^{\frac{1}{q}}_{L^t(\Omega)} \right] \times \\
&\times \left\| |\nabla (S_{m_1}(u_\varepsilon))|^{p-1} \right\|_{L^q(v)} + \\
&+ 2c(N,p) \left[M^* + |\Omega|^{\frac{1}{\bar{p}}} L^{\frac{1}{p'}} \right].
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Third step:
Now we define for $0 \leq m < m_2$ the function $S_{m,m_2} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$S_{m,m_2}(u_\varepsilon) = \begin{cases} m_2 - m & u_\varepsilon > m_2 \\ u_\varepsilon - m & m \leq u_\varepsilon \leq m_2 \\ 0 & -m \leq u_\varepsilon \leq m \\ u_\varepsilon + m & -m_2 \leq u_\varepsilon \leq -m \\ m - m_2 & u_\varepsilon < -m_2. \end{cases} \tag{4.51}$$

As in the previous step we use $T_k\left(S_{m,m_2}\left(u_\varepsilon\right)\right)$ with m to be specified later as test function in the (4.7)

$$\int_\Omega \nu\left(x\right)\left|\nabla T_k\left(S_{m,m_1}\left(u_\varepsilon\right)\right)\right|^p \leq M_3 k + L,$$

where

$$M_3 = p'\left\|b(x)\right\|_{L^\tau\left(Z_\varepsilon \cap \{m_1<|u_\varepsilon|<m\}\right)}\left\|\nu^{-1}(x)\right\|^{\frac{1}{q}}_{L^t(\Omega)}\left\|\left|\nabla\left(S_{m,m_2}\left(u_\varepsilon\right)\right)\right|^{p-1}\right\|_{L^q(\nu)} +$$
$$+\left\|b\left(x\right)\right\|_{L^\tau(\Omega)}\left\|\nu^{-1}\right\|^{\frac{1}{q}}_{L^t(\Omega)}\left\|\left|\nabla\left(S_{m_{2,1}}\left(u_\varepsilon\right)\right)\right|^{p-1}\right\|_{L^q(v)}$$
$$+\left\|b\left(x\right)\right\|_{L^\tau(\Omega)}\left\|\nu^{-1}\right\|^{\frac{1}{q}}_{L^t(\Omega)}\left\|\left|\nabla\left(S_{m_1}\left(u_\varepsilon\right)\right)\right|^{p-1}\right\|_{L^q(v)} + M^*,$$

where M^* and L are defined in (4.20), (4.21).
As before we use Lemma 4.1, we choose $m = m_3 = 0$ in the case

$$c\left(N,p\right)\left\|b(x)\right\|_{L^\tau\left(\left|Z_\varepsilon \cap \{m<|u_\varepsilon|<m_2\}\right|\right)}\left\|\nu^{-1}(x)\right\|^{\frac{1}{q}}_{L^t(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \tag{4.52}$$

and if (4.52) does not hold, we choose $m = m_3 > 0$ so that

$$c\left(N,p\right)\left\|b(x)\right\|_{L^\tau\left(\left|Z_\varepsilon \cap \{m<|u_\varepsilon|<m_2\}\right|\right)}\left\|\nu^{-1}(x)\right\|^{\frac{1}{q}}_{L^t(\Omega)} = \frac{1}{2}. \tag{4.53}$$

Now as in the previous step we observe that m_3 depends on n and

$$\left|Z_\varepsilon \cap \{m < |u_\varepsilon| < m_2\}\right| = \delta.$$

With this choice of m we obtain

$$\begin{aligned}\left\|\left|\nabla\left(S_{m,m_1}\left(u_\varepsilon\right)\right)\right|^{p-1}\right\|_{L^q(\nu)} &\leq 2\,c(N,p)\left[\left\|b\left(x\right)\right\|_{L^\tau(\Omega)}\left\|\nu^{-1}\right\|^{\frac{1}{q}}_{L^t(\Omega)}\right] \\ &\left\|\left|\nabla\left(S_{m_2,m_1}\left(u_\varepsilon\right)\right)\right|^{p-1}\right\|_{L^q(v)} + \\ &+2\,c(N,p)\left[\left\|b\left(x\right)\right\|_{L^\tau(\Omega)}\left\|\nu^{-1}\right\|^{\frac{1}{q}}_{L^t(\Omega)}\right] \\ &\left\|\left|\nabla\left(S_{m_1}\left(u_\varepsilon\right)\right)\right|^{p-1}\right\|_{L^q(v)} + \\ &+2\,c(N,p)\left[M^* + |\Omega|^{\frac{1}{p}}\,L^{\frac{1}{p'}}\right].\end{aligned} \tag{4.54}$$

Final step

We repeat the procedure until $i = I$. If

$$c(N,p)\left\|b(x)\right\|_{L^{\tau}(|Z_\varepsilon\cap\{m<|u_\varepsilon|<m_{I-1}\}|)}\left\|\nu^{-1}(x)\right\|_{L^{t}(\Omega)}^{\frac{1}{q}}\leq\frac{1}{2},$$

then we choose $m_I = 0$. Now we want to estimate I. We observe

$$|\Omega|\geq|Z_N|\geq|Z_N\cap\{|u_\varepsilon|>m_1\}|+|Z_N\cap\{m_2<|u_\varepsilon|<m_1\}|+$$
$$+|Z_N\cap\{m_3<|u_\varepsilon|<m_2\}|+....++|Z_N\cap\{m_{I-1}<|u_\varepsilon|<m_{I-2}\}|.$$

By (4.36) , (4.49) , we know that

$$|Z_N\cap\{|u_\varepsilon|>m_1\}|=|Z_N\cap\{m_2<|u_\varepsilon|<m_1\}|=$$
$$=|Z_N\cap\{m_3<|u_\varepsilon|<m_2\}|=...=|Z_N\cap\{m_{I-1}<|u_\varepsilon|<m_{I-2}\}|=\delta,$$

with δ that does not depend on N. We realize that

$$|\Omega|\geq(I-1)\delta,$$
$$I\leq I^{*},\tag{4.55}$$

where $I^{*}=1+\left[\frac{|\Omega|}{\delta}\right]$. From (4.55) we deduce that I depends only on $b(x)$ through the definition of δ but it does not depend on N.

Now we define $m_0=+\infty$, $S_{m_1,m_0}=S_{m_1}$

$$\begin{cases} X_i=\left\|\left|\nabla\left(S_{m_i,m_{i-1}}(u_\varepsilon)\right)\right|^{p-1}\right\|_{L^{q}(\nu)} & 1\leq i\leq I\\ a=2C(N,p)\left\|b(x)\right\|_{L^{\tau}(\Omega)}\left\|\nu^{-1}\right\|_{L^{t}(\Omega)}^{\frac{1}{q}}\\ b=2\,C(N,p)\left[M^{*}+|\Omega|^{\frac{1}{\bar{p}}}L^{\frac{1}{p'}}\right]. \end{cases}$$

By (4.37) , (4.50) , (4.54) , we deduce

$$X_1\leq b\qquad X_2\leq aX_1+b\quad X_3\leq aX_2+aX_1+b$$
$$X_I\leq aX_{I-1}+...+aX_1+b\quad for\ I\leq I^{*}.$$

By induction we have

$$X_i\leq(a+1)^{i-1}b,\quad \text{for } 1\leq i\leq I,$$

$$|\nabla u_\varepsilon|^{p-1}=\sum_{i=1}^{I}|\nabla u_\varepsilon|^{p-1}\chi_{\{m_i<|u_\varepsilon|<m_{i-1}\}}=\sum_{i=1}^{I}\left|\nabla S_{m_i,m_{i-1}}(u_\varepsilon)\right|^{p-1}.\tag{4.56}$$

By (4.56) we have

$$\left\| |\nabla u_\varepsilon|^{p-1} \right\|_{L^q(\nu)} \leq \sum_{i=1}^{I} \left\| |\nabla S_{m_i,m_{i-1}}(u_\varepsilon)|^{p-1} \right\|_{L^q(\nu)} \leq \sum_{i=1}^{I} X_i \leq \tag{4.57}$$
$$\leq \sum_{i=1}^{I} (a+1)^{i-1} b = b \left[\frac{(a+1)^I - 1}{a} \right] \leq \frac{b}{a} \left((a+1)^{I^*} - 1 \right).$$

In the same way we obtain the estimate for $|u_\varepsilon|^{p-1}$. ■

4.3 Passage to the limit

The weak solution u_ε to approximated problem (4.6) satisfies

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, u_\varepsilon, \nabla u_\epsilon)) = \Phi_\varepsilon - \operatorname{div}(g) & \text{in} \quad \Omega \\ u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\nu) & \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.58}$$

where $\Phi_\varepsilon = f_\varepsilon - H_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) + \lambda_\varepsilon^+ - \lambda_\varepsilon^-$.
Using $T_k(u_\varepsilon)$ as test function in (4.58) we have for some $\widetilde{M}$ and $\widetilde{L}$

$$\int_\Omega v(x) |\nabla T_k(u_\varepsilon)|^p \leq \widetilde{M} k + \widetilde{L}, \tag{4.59}$$

for every $k > 0$ and every $\varepsilon > 0$.
We know that there exists a function u such that u_ε converges to u a.e., ∇u exists a.e., $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\nu)$ and ∇u_ε converges to ∇u almost everywhere ([41]) By Fatou Lemma and by (4.59) we deduce that

$$\int_\Omega v(x) |\nabla T_k(u)|^p \leq \widetilde{M} k + \widetilde{L}. \tag{4.60}$$

From (4.60) and by Lemma 4.1 we deduce that $|\nabla u|^{p-1} \in L^q(\nu)$ and $|u|^{p-1} \in L^\gamma(\nu)$ .By a result proved in [41] we know that $a(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) \longrightarrow a(x, u, \nabla u)$ in $L^1(\Omega)$ strongly.
Therefore $b(x) |\nabla u_\varepsilon|^{p-1} \longrightarrow b(x) |\nabla u|^{p-1}$ almost everywhere in Ω and for every measurable set $E \subset \Omega$

$$\int_E |b(x)| \left| \nabla u_\varepsilon^{p-1} \right| \leq c \|b(x)\|_{L^\tau(E)} \left\| v^{-1} \right\|_{L^t(E)}^{\frac{1}{q}}.$$

By Vitali-Lebesgue theorem we have $b(x)\,|\nabla u_\varepsilon|^{p-1} \longrightarrow b(x)\,|\nabla u|^{p-1}$ in $L^1(\Omega)$ strongly.
Thanks to these results the weak solution u_ε of

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)) = f_\varepsilon - H_\varepsilon(x,\nabla u_\varepsilon) - \operatorname{div}(g) + \lambda_\varepsilon^+ - \lambda_\varepsilon^- \\ u_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\nu) \end{cases} \tag{4.61}$$

is also a renormalized solution to (4.61) and the stability results (Theorem 3.2) asserts that u is also a renormalized solution to the problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) + H(x,\nabla u) = f - \operatorname{div}(g) + \mu_s^+ - \mu_s^- & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

which proves the theorem.

A Appendix: proof of Theorem 3.2

In this section we prove the stability result Theorem 3.2 below.
In order to prove this result, we consider the nonlinear problem (A.1)

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u) = \mu_\varepsilon & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.1}$$

where ε is a sequence of positive numbers that converges to zero, $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ is a Carathéodory function such that (3.2), (3.3) are satisfied and μ_ε is a Radon measure with bounded total variation in Ω.
Since μ_ε and μ are measures in $M_b(\Omega)$, they can be decomposed as in the Proposition 2.7 as follows

$$\mu_\varepsilon = f_\varepsilon - \operatorname{div}(g_\varepsilon) + \lambda_\varepsilon^+ - \lambda_\varepsilon^-, \tag{A.2}$$

$$\mu = f - \operatorname{div}(g) + \mu_s^+ - \mu_s^-, \tag{A.3}$$

where sequences f_ε, λ_ε^+, λ_ε^- satisfy (4.1) − (4.3) and g_ε is a sequence such that

$$\begin{cases} g_\varepsilon \text{ is a sequence of functions in } \left(L^{p'}(1/\nu^{p-1})\right)^N \\ g_\varepsilon \to g \ \left(L^{p'}(1/\nu^{p-1})\right)^N \text{ strongly.} \end{cases} \tag{A.4}$$

The following stability result holds true

Theorem A.1 *Assume that* (3.2), (3.3), $(4.1)-(4.3)$, $(A.4)$ *hold. Let* u_ε *be a renormalized solution of* $(A.1)$. *Then* u_ε *converges almost everywhere to renormalized solution* u *to the problem*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u) = \mu & in \quad \Omega \\ u = 0 & on \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.5}$$

According to Proposition 2.7 λ_ε^+ and λ_ε^- can be decomposed in the following way

$$\lambda_\varepsilon^+ = \lambda_{\varepsilon,0}^+ + \lambda_{\varepsilon,s}^+,$$

$$\lambda_\varepsilon^- = \lambda_{\varepsilon,0}^- + \lambda_{\varepsilon,s}^-,$$

with $\lambda_{\varepsilon,0}^+$, $\lambda_{\varepsilon,0}^- \in M_{0,v}(\Omega), \lambda_{\varepsilon,0}^+$, $\lambda_{\varepsilon,0}^- \geq 0$ and $\lambda_{\varepsilon,s}^+$, $\lambda_{\varepsilon,s}^- \in M_{s,v}(\Omega), \lambda_{\varepsilon,s}^+$, $\lambda_{\varepsilon,s}^- \geq 0$. On the other hand μ_ε can be decomposed as follows

$$\mu_\varepsilon = \mu_{\varepsilon,0} + \mu_{\varepsilon,s} = \mu_{\varepsilon,0} + \mu_{\varepsilon,s}^+ + \mu_{\varepsilon,s}^-,$$

where $\mu_{\varepsilon,0} \in M_{0,v}(\Omega)$ and $\mu_{\varepsilon,s}^+, \mu_{\varepsilon,s}^-$ are two nonnegative measure in $M_{s,v}(\Omega)$ which are concentrated on two disjoint subset E_ε^+ and E_ε^- of (p,ν)-capacity. As in [17] we have

$$0 \leq \mu_{\varepsilon,s}^+ \leq \lambda_{\varepsilon,0}^+ \qquad 0 \leq \mu_{\varepsilon,s}^- \leq \lambda_{\varepsilon,0}^-. \tag{A.6}$$

Sketch of the proof.

First step

By using the same tecnique used in this work, we obtain a priori estimate for ∇u_ε thanks to which we have that $u_\varepsilon \to u$ a.e. Now we want to prove that u is a solution of $(A.5)$ in the sense of distribution.

We know that u_ε is a renormalized solution of the problem $(A.1)$ and so it is also a solution in the sense of distribution that is

$$\int_\Omega a(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\nabla\varphi = \int_\Omega \varphi d\mu_\varepsilon, \forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{A.7}$$

Otherwise by a result contained in ([40]) we have

$$a(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon) \longrightarrow a(x,u,\nabla u) \text{ in } L^1(\Omega) \text{ strongly} \tag{A.8}$$

and by passing to the limit in $(A.7)$, we obtain that u is a distributional solution of $(A.5)$.

Second step
In this step we adapt the proof given in [26] . We prove that

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{n}\int_{\{n<u_\varepsilon<2n\}}a(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon\varphi\leq\int_\Omega\varphi d\mu_s^+, \tag{A.9}$$

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{n}\int_{\{-2n<u_\varepsilon<n\}}a(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon\varphi\leq\int_\Omega\varphi d\mu_s^-, \tag{A.10}$$

$\forall\varphi\in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ with $\varphi\geq 0$.
Now we define for $n\geq 1$ $s_n:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ and $h_\eta:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ by

$$s_n(r)=\frac{T_{2n}(r)-T_n(r)}{n}, \tag{A.11}$$

$$h_\eta(r)=1-|s_\eta(r)|\,. \tag{A.12}$$

If we take $h_\eta(u_\varepsilon)s_n(u_\varepsilon^+)\varphi$ as test function and with $\eta\longrightarrow\infty$ we have

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)s_n(u_\varepsilon^+)\nabla\varphi+\frac{1}{n}\int_{\{n<u_\varepsilon<2n\}}a(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon\varphi\\&=\int_\Omega f_\varepsilon s_n(u_\varepsilon^+)\varphi+\int_\Omega g_\varepsilon s_n(u_\varepsilon^+)\nabla\varphi+\frac{1}{n}\int_{\{n<u_\varepsilon<2n\}}g_\varepsilon\nabla u_\varepsilon\varphi+\\&\int_\Omega s_n(u_\varepsilon^+)\varphi d\lambda_{\varepsilon,0}^+-\int_\Omega s_n(u_\varepsilon^+)\varphi d\lambda_{\varepsilon,0}^-+\int_\Omega\varphi d\mu_{\varepsilon,s}^+\end{aligned}$$

$\forall\varphi\in C^1(\overline{\Omega})$ non negative.
Since $s_n(u_\varepsilon^+)$ is bounded and $s_n(u_\varepsilon^+)\longrightarrow s_n(u^+)$ $a.e$, by Lebesgue convergence theorem we have

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_\Omega a(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)s_n(u_\varepsilon^+)\nabla\varphi=\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_\Omega a(x,u,\nabla u)s_n(u^+)\nabla\varphi=0 \tag{A.13}$$

and by $(A.6)$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_\Omega f_\varepsilon s_n(u_\varepsilon^+)\varphi=\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_\Omega f s_n(u^+)\varphi=0 \tag{A.14}$$

By Hölder inequality we have

$$\frac{1}{n}\int_{\{n<u_\varepsilon<2n\}}g_\varepsilon\nabla u_\varepsilon\varphi\leq\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\|g_\varepsilon\|_{L^{p'}(1/v^{p-1})}\times\frac{1}{n}\left(\int_{\{n<u_\varepsilon<2n\}}\nu|\nabla u_\varepsilon|^p\right)^{1/p}$$

Since $g_\varepsilon \to g$ $\left(L^{p'}(1/\nu^{p-1})\right)^N$ strongly,.we have

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}\frac{1}{n}\int_{\{n<u_\varepsilon<2n\}} g_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \varphi = 0, \tag{A.15}$$

and finally by$(A.6)$

$$\int_\Omega s_n(u_\varepsilon^+)\varphi d\lambda_{\varepsilon,0}^+ + \int_\Omega \varphi d\mu_{\varepsilon,s}^+ \le \int_\Omega \varphi d\lambda_\varepsilon^+. \tag{A.16}$$

By $(A.13)-(A.16)$ we obtain $\forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega})$

$$\frac{1}{n}\int_{\{n<u_\varepsilon<2n\}} a(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon \varphi \le \omega(\varepsilon,n) + \int_\Omega \varphi d\lambda_\varepsilon^+, \tag{A.17}$$

where ω is a function such that $\lim_{n\longrightarrow\infty}\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}\omega(\varepsilon,n)=0$. Since λ_ε^+ converges to μ_s^+ in the narrow topology we have $(A.9)$.

Third step

Now we want to prove that u is a renormalized solution. As in [17] we consider for $\delta>0$ two cut-off functions ψ_δ^+ and $\psi_\delta^- \in C_0^\infty(\Omega)$ such that

$$0\le\psi_\delta^+\le 1 \qquad 0\le\psi_\delta^-\le 1 \qquad \sup p\left(\psi_\delta^+\right)\cap \sup p\left(\psi_\delta^-\right)=\emptyset, \tag{A.18}$$

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\int_\Omega \left|\nabla\psi_\delta^+\right|^p = \lim_{\delta\longrightarrow 0}\int_\Omega \left|\nabla\psi_\delta^+\right|^p = 0,$$

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\int_\Omega \psi_\delta^+ d\mu_s^+ = \lim_{\delta\longrightarrow 0}\int_\Omega \psi_\delta^- d\mu_s^- = 0,$$

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\int_\Omega (1-\psi_\delta^+) d\mu_s^+ = \lim_{\delta\longrightarrow 0}\int_\Omega (1-\psi_\delta^-) d\mu_s^- = 0,$$

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_\Omega \psi_\delta^- d\lambda_\varepsilon^+ = \lim_{\delta\longrightarrow 0}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_\Omega \psi_\delta^+ d\lambda_\varepsilon^- = 0, \tag{A.19}$$

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_\Omega (1-\psi_\delta^+) d\lambda_\varepsilon^+ = \lim_{\delta\longrightarrow 0}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_\Omega (1-\psi_\delta^+) d\lambda_\varepsilon^+ = 0. \tag{A.20}$$

Using $h_n(u_\varepsilon)h(u)v(1-\psi_\delta^+-\psi_\delta^-)$ as test function where h_n is defined in $(A.12)$

we have

$$\int_\Omega h_n^{'}(u_\varepsilon)h(u)v(1-\psi_\delta^+-\psi_\delta^-)\left[a(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\right]\nabla u_\varepsilon+ \tag{A.21}$$

$$\int_\Omega h_n(u_\varepsilon)h^{'}(u)v(1-\psi_\delta^+-\psi_\delta^-)\left[a(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\right]\nabla u+$$

$$\int_\Omega h_n(u_\varepsilon)h(u)(1-\psi_\delta^+-\psi_\delta^-)\left[a(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\right]\nabla v+$$

$$\int_\Omega h_n(u_\varepsilon)h(u)v\left[a(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\right]\nabla(1-\psi_\delta^+-\psi_\delta^-)$$

$$\int_\Omega f_\varepsilon h_n(u_\varepsilon)h(u)v(1-\psi_\delta^+-\psi_\delta^-)+\int_\Omega g_\varepsilon\nabla\left[h_n(u_\varepsilon)h(u)v(1-\psi_\delta^+-\psi_\delta^-)\right]+$$

$$\int_\Omega h_n(u_\varepsilon)h(u)v(1-\psi_\delta^+-\psi_\delta^-)d\lambda_{\varepsilon,0}^+ + \int_\Omega h_n(u_\varepsilon)h(u)v(1-\psi_\delta^+-\psi_\delta^-)d\lambda_{\varepsilon,0}^-.$$

Now we pass to the limit in $(A.21)$ for $\varepsilon\longrightarrow 0, n\longrightarrow\infty$ and $\delta\longrightarrow 0$.
Since $(1-\psi_\delta^+-\psi_\delta^-)a(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon$ is positive, letting $\delta\longrightarrow 0$ we have

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\limsup_{n\longrightarrow\infty}\limsup_{\varepsilon\longrightarrow 0}\frac{1}{n}\int_{\{n<|u_\varepsilon|<2n\}}|h(u)v|\,(1-\psi_\delta^+-\psi_\delta^-)a(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon=0. \tag{A.22}$$

By [40] we know that $T_{2n}(u_\varepsilon)\longrightarrow T_{2n}(u)$ a.e so we have

$$a(x,T_{2n}(u_\varepsilon),\nabla T_{2n}(u_\varepsilon))\longrightarrow a(x,T_{2n}(u),\nabla T_{2n}(u)).$$

Since $|h_n(u_\varepsilon)|\leq 1$ and $h_n(u_\varepsilon)\longrightarrow h_n(u)$ a.e, replacing $a(x,u,\nabla u)$ by $a(x,T_M(u),\nabla T_M(u))$ and letting $n\longrightarrow\infty$, $\delta\longrightarrow 0$ we have

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\lim_{n\longrightarrow\infty}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_\Omega h_n(u_\varepsilon)h^{'}(u)v(1-\psi_\delta^+-\psi_\delta^-)\left[a(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\right]\nabla u \tag{A.23}$$
$$=\int_\Omega h^{'}(u)v\left(a(x,u,\nabla u)\right)\nabla u.$$

In the same way

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\lim_{n\longrightarrow\infty}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_\Omega h_n(u_\varepsilon)h(u)(1-\psi_\delta^+-\psi_\delta^-)\left(a(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\right)\nabla v \tag{A.24}$$
$$=\int_\Omega h(u)\left(a(x,u,\nabla u)\right)\nabla v,$$

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\lim_{n\longrightarrow\infty}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_\Omega h_n(u_\varepsilon)h(u)v\left[a(x,u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\right]\nabla(1-\psi_\delta^+-\psi_\delta^-)=0. \tag{A.25}$$

Using the point-wise convergence of u_ε and the definition of h_n and the definition of $\psi_\delta^+, \psi_\delta^-$ we obtain

$$\lim_{\delta \longrightarrow 0} \lim_{n \longrightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_\Omega f_\varepsilon h_n(u_\varepsilon) h(u) v(1 - \psi_\delta^+ - \psi_\delta^-) = \int_\Omega f h(u) v. \quad (A.26)$$

To conclude that u is a renormalized solution we have to prove

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_{n<u<2n} a(x, u, \nabla u) \nabla u \varphi = \int_\Omega \varphi d\mu_s^+, \quad (A.27)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_{-2n<u<-n} a(x, u, \nabla u) \nabla u \varphi = \int_\Omega \varphi d\mu_s^-, \quad (A.28)$$

$\forall \varphi \in C_b^0(\Omega)$.
By the pointwise convergence of u_ε and by Fatou Lemma it follows

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_{n<u<2n} a(x, u, \nabla u) \nabla u \varphi \leq \int_\Omega \varphi d\mu_s^+ \quad (A.29)$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_{-2n<u<-n} a(x, u, \nabla u) \nabla u \varphi \leq \int_\Omega \varphi d\mu_s^- \quad (A.30)$$

$\forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ with $\varphi \geq 0$.
Since u is a solution in the sense of distribution, taking $h_n(u)\psi$ as test function where h_n is defined in $(A.12)$ and $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, letting $\eta \to \infty$, $\delta \to 0$ we obtain

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int_{n<u<2n} a(x, u, \nabla u) \nabla u \varphi \geq \int_\Omega \varphi d\mu_s^+ \quad (A.31)$$

$\forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega})$ with $\varphi \geq 0$.
If we take $\varphi(1 - \psi_\delta^+)\psi_\delta^-$ as test function we have $(A.28)$
Fourth step
Now we want to prove that $T_k(u_\varepsilon)$ converges to $T_k(u)$ strongly in $H_0^1(\Omega)$ for any $k > 0$. By (3.2), the point-wise convergence of $u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon$ we have

$$\int_\Omega a(x, T_k(u), \nabla T_k(u)) \nabla T_k(u) \leq \liminf_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_\Omega a(x, T_k(u_\varepsilon), \nabla T_k(u_\varepsilon)) \nabla T_k(u_\varepsilon)$$

If we take $h_n(u_\varepsilon) T_k(u_\varepsilon)$ as test function and letting $n \to \infty, \varepsilon \to 0$ we have

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega a(x, T_k(u_\varepsilon), \nabla T_k(u_\varepsilon)) \nabla T_k(u_\varepsilon) \leq \int_\Omega a(x, u, \nabla u) \nabla T_k(u) \quad (A.32)$$

so we conclude that

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega a(x,T_k(u_\varepsilon),\nabla T_k(u_\varepsilon))\nabla T_k(u_\varepsilon)\le\int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u) \tag{A.33}$$

By $(A.33)$ we have

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega a(x,T_k(u_\varepsilon),\nabla T_k(u_\varepsilon))\nabla T_k(u_\varepsilon)=\int_\Omega a(x,T_k(u),\nabla T_k(u))\nabla T_k(u) \tag{A.34}$$

Because of (3.2) and the point-wise convergence of $\nabla T_k(u_\varepsilon)$ ([41])$\nabla T_k(u_\varepsilon)\to\nabla T_k(u)$ in $(L^p(\Omega))^N$ strongly. ■

References

[1] Alvino, A. *Linear Elliptic Problems with non-H^{-1} data: pathological solutions*, to appear on Ann. Mat. Pura Appl.

[2] Alvino, A. (1997) *Formule di maggiorazione e regolarizzazione per soluzioni di equazioni ellittiche del secondo ordine in un caso limite*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 8, 52, 335-340.

[3] Ben Cheikh Ali, M. and Guibé, O. (1999) *Résultats d'existence pour une classe de problèmes et non coercifs*, C. R. Acad. Sci. Paris 329, 967-972.

[4] Bènilan, P., Boccardo, L., Gallouët, T., Gariepy, R., Pierre, M.and Vasquez, J.L.(1995) *An L^1-theory of existence and uniqueness of nonlinear elliptic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 22, 241-273.

[5] Betta, M.F., Del Vecchio, T.and Posteraro, M.R.(1998) *Existence and regularity results for nonlinear degenerate elliptic equations with measure data*, Ricerche Mat. 47, 277–295.

[6] Betta, M.F., Mercaldo, A., Murat, F. and Porzio, M.M. (2002) *Existence and uniqueness results for nonlinear elliptic problems with a lower-order term and measure data*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 334, 757-762.

[7] Betta, M.F., Mercaldo, A., Murat, F. and Porzio, M.M. (2003) *Existence of renormalized solutions of nonlinear elliptic equations with a lower-order term and right-hand side in measure*, J. Math. Pures Appl. 82, 90-124.

[8] Betta, M.F., Mercaldo, A., Murat, F. and Porzio, M.M. (2002) *Uniqueness of renormalized solutions of nonlinear elliptic equations with a lower-order term and right-hand side in $L^1(\Omega)$*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 8 (A tribute to Jacques-Louis Lions), 239-272.

[9] Betta, M.F., Mercaldo, A., Murat, F. and Porzio (2005) *Uniqueness results for nonlinear elliptic equations with a lower-order term,* Nonlinear Anal 53,153-170.

[10] Boccardo, L. *Some Dirichlet problems with lower order terms in divergence form*, Preprint.

[11] Boccardo, L. and Gallouët, T. (1989) *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*, J. Funct. Anal. 87, 149-169.

[12] Boccardo, L. and Gallouët, T. (1992) *Nonlinear elliptic equations with right-hand side measure*, Comm. Partial Differential Equations 17, 641-655.

[13] Boccardo, L., Gallouët, T. and Orsina, L. (1996) *Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations with measure data*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 13, 539–551.

[14] Bottaro, G. and Marina, M.E. (1973) *Problema di Dirichlet per equazioni ellittiche di tipo variazionale su insiemi non limitati*, Boll. Un. Mat. Ital. 8, 46-56.

[15] Chong, K.L. and Rice, N.M. (1971) *Equi-measurable Rearrangements of Functions*, Queen's Pap. Pure Appl. Math. 28, Queen's University.

[16] Cirmi, G.R. and Porzio, M.M. (1995) L^∞ *- solution for some nonlinear degenerate elliptic and parabolic equations*, Ann. Mat. Pura Appl.169, 67-86.

[17] Dal Maso, G., Murat, F., Orsina, L. and Prignet, A. (1999) *Renormalized solutions for elliptic equations with general measure data*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 28, 741-808.

[18] Del Vecchio, T. (1995) *Nonlinear elliptic equations with measure data*, Potential Anal. 4, 185-203.

[19] Del Vecchio, T. and Porzio, M.M. (1995) *Existence results for a class of noncoercive Dirichlet problems*, Ricerche Mat. 44, 421-438.

[20] Del Vecchio, T. and Posteraro, M.R. (1996) *Existence and regularity results for nonlinear elliptic equations with measure data*, Adv. Differential Equations 1, 899-917.

[21] Del Vecchio, T. and Posteraro, M.R. (1998) *An existence result for nonlinear and noncoercive problems*, Nonlinear Anal. 31, 191-206.

[22] Dolzmann, G., Hungerbühler, N. and Müller, S. (2000) *Uniqueness and maximal regularity for nonlinear elliptic systems of n-Laplace type with measure valued right-hand side*, J. Reine Angew. Math. 520, 1-35.

[23] Ferone, V. (1994) *Estimates and regularity for solutions of elliptic equations in a limit case,* Boll. Un. Mat. Ital. 7, 257-270.

[24] Fukushima, M., Sato, K. and Taniguchi, S. (1991) *On the closable part of pre-Dirichlet forms and finite support of the underlying measures*, Osaka J. Math. 28, 517-535.

[25] Guibé, O. (2002) *Remarks on the uniqueness of comparable renormalized solutions of elliptic equations with measure data*, Ann. Mat. Pura Appl. 180, 441-449.

[26] Guibé, O. and Mercaldo, A. *Existence and stability result for renormalized solutions to noncoercive nonlinear elliptic equations with measure data,* to appear on Potential Anal.

[27] Guibé, O. and Mercaldo, A. *Existence of renormalized solutions to nonlinear elliptic equations with two lower order terms and measure data,* to appear on Trans. Amer. Math. Soc.

[28] Hunt, R. (1966) *On L(p, q) spaces*, Enseign. Math. 12, 249-276.

[29] Kawohl, B. (1985) *Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE*, Lecture Notes in Math. 1150, Springer-Verlag, Berlin, New York.

[30] Leray, J. and Lions, J.-L. (1965) *Quelques résultats de Visik sur les problémes elliptiques semilinéaires par les méthodes de Minty et Browder*, Bull. Soc. Math. France 93, 97-107.

[31] Lions, J.-L. (1969) *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod et Gauthier–Villars, Paris.

[32] Lions, P.-L. and Murat, F. *Solutions renormalisées d'équations elliptiques non linéaires,* to appear.

[33] Lorentz, G. (1950) *Some new functional spaces*, Ann. Math. 51, 37-55.

[34] Malusa, A. and Prignet, A. (2005) *Stability of renormalized solutions of elliptic equations with measure data,* Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia 52 (2004), 151-168.

[35] Maz'ja, V.G. (1985) *Sobolev spaces*, Springer-Verlag, Berlin.

[36] Murat, F. (1993) *Soluciones renormalizadas de EDP elipticas no lineales*, Preprint 93023, Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Paris VI.

[37] Murat, F. (1994) *Équations elliptiques non linéaires avec second membre* L^1 *ou mesure*, Actes du 26èmeCongrès National d'Analyse Numérique, Les Karellis, France, A12-A24.

[38] Murthy, M.K.W and Stampacchia, G. (1968) *Boundary value problems for some degenerate elliptic operators*, Ann. Mat. Pura Appl. 80, 1-122.

[39] O'Neil, *R.* (1968) *Integral transform and tensor products on Orlicz spaces and L(p, q) spaces* I, J. Anal. Math. 21, 1-276.

[40] Prignet, A. (1995) *Remarks on existence and uniqueness of solutions of elliptic problems with right-hand side measures*, Rend. Mat. Appl. 15, 321-337.

[41] Rakotoson, J.M. (1993) *Resolution of the critical cases for problems with* L^1*-data*, Asymptot Anal. 6, 285-293.

[42] Serrin, J. (1964) *Pathological solutions of elliptic differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 18, 385-387.

[43] Stampacchia, G. (1965) *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 15, 189-258.

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXXIII, (2006) pp. 457-479

L'aritmometro donato da Thomas de Colmar a Ferdinando II di Borbone (Re delle Due Sicilie) Conservato alla Reggia di Caserta

Nota di Nicla Palladino[1]

Presentata dal socio Luciano Carbone
(Adunanza del 3 Novembre 2006)

Key words: arithmometer, stepped cylinders, Thomas de Colmar.

Abstract - In the royal palace of Caserta, there is the arithmometer that Thomas de Colmar gave Ferdinand II of Borbone, king of Regno delle Due Sicilie. It is one of the arithmometers that, in the early 1850s, the inventor distributed to numerous crowned and titled heads of Europe (e.g. the emperor Nicholas I of Russia). The de Colmar arithmometer was the first commercial calculating machine used diffusely in the civil society because it was solid and reliable: indeed it was produced industrially and was sold at a reasonable price. Counting out the four operations and extraction of the root square were executed by this arithmometer that rests on Thomas' prior innovation of the stepped cylinder mechanism, first introduced by Leibniz.

Riassunto - Presso la Reggia di Caserta si trova l'aritmometro che Thomas de Colmar donò a Ferdinando II di Borbone, re del Regno delle Due Sicilie. Esso è uno degli aritmometri che, nei primi anni Cinquanta dell'Ottocento, l'inventore donò principalmente a nobili e regnanti d'Europa (tra cui l'imperatore Nicola I di Russia). Quella di de Colmar fu la prima macchina calcolatrice utile al commercio e usata diffusamente nella società civile perchè solida e affidabile. Prodotta su scala industriale, fu venduta a prezzo accessibile. Il meccanismo che permetteva di effettuare le quattro operazioni e l'estrazione della radice quadrata si basava sostanzialmente su innovazioni apportate da de Colmar ai cilindri a gradini inventati da Leibniz.

[1] Dipartimento di Matematica e Informatica – Università degli Studi di Salerno.

1 Introduzione

Presso il palazzo reale di Caserta, la Reggia vanvitelliana, è custodita una macchina per eseguire automaticamente le operazioni fondamentali dell'aritmetica, un *aritmometro*[2].

La macchina è contenuta in una scatola, a forma di parallelepipedo, costituente l'involucro con cui fa un solo corpo. La scatola è provvista di un coperchio che sulla faccia esterna ha, quale fregio, una corona regale con tre gigli borbonici sottostanti e la sigla "*F II*" che sta per "*Ferdinando II*" di Borbone. Questa faccia del coperchio recava, sovrapposta e incollata, un'etichetta di carta che ora si trova invece sulla faccia posteriore, esterna, della scatola. Sull'etichetta è stampato: "*Soprintendenza per i Beni Ambientali e Architettonici della Campania – Napoli – Reggia di Caserta – Inventario – N. 2550 – Data [19]77/78*"[3].

Sollevato il coperchio, che è incernierato alla scatola stessa, si trova, impressa sulla sua superficie interna, la seguente scritta che è cinta da un fregio dal profilo ellittico: "À *sa Majesté Ferdinand II – Roi des deux Siciles – Hommage respectueux de l'inventeur*" (perciò nel seguito si denoterà questa macchina calcolatrice semplicemente come l'"Aritmometro di Ferdinando II"), mentre guardando il piano metallico (fatto di un materiale che sembra essere ottone piuttosto che rame[4]) dell'aritmometro si vede inciso, in basso a sinistra, la dicitura: "*Inventé par M.r Thomas de Colmar. Chevalier de la Lég.on d'Honneur*".

Si può notare, *en passant*, che l'aritmometro si trova ancora nella stessa sede, la Reggia di Caserta, in cui, molto probabilmente, fu collocato fin dalla sua accettazione, circa 150 anni fa, pur essendosi susseguiti vari eventi storici: la caduta del Regno borbonico nel 1860, gli episodi della Seconda Guerra Mondiale che comportarono l'occupazione tedesca della stessa reggia, in conseguenza dell'armistizio dell'8 settembre 1943, e poi, in seguito alla ritirata

---

[2] La sua presenza fu segnalata, molti anni fa, dal dottore Maurizio Crispino, attualmente responsabile informatico della Reggia di Caserta, a cui va un vivo ringraziamento. Un grazie si desidera esprimere anche al sig. Vincenzo Biasiucci, caposervizio presso la stessa Reggia, per l'aiuto fornito recentemente nel prendere visione, da vicino, della macchina che, collocata fino a qualche anno fa nella *Biblioteca palatina*, oggi si trova in una delle sale di esposizione poste nei piani interrati della Reggia e precisamente alla "*Sala XIII. Vita a corte*".

[3] I numeri sono scritti a penna. Nella collocazione attuale, a fianco di quest'etichetta (che si chiamerà la *prima*), ve ne sono altre due, più antiche, una delle quali reca scritto: "*Inventario 1907 di Caserta N. 7838*" (essa si chiamerà la *seconda*); mentre sull'altra vi è: "*1951-54 Caserta N.V. 7838. N. 3609*" (si chiamerà la *terza*). Anche per queste altre due etichette accade che solo i numeri, che vi compaiono, sono scritti a penna.

[4] Nel brevetto (per il quale si può consultare la successiva nota 6) concesso a Thomas de Colmar, l'8 dicembre 1850, e riguardante un modello di aritmometro perfezionato rispetto all'originario ideato dello stesso inventore, è detto che l'esemplare presentato (il quale tanto da vicino è rapportabile a quello che qui si viene a descrivere) ha il piano in rame.

delle truppe germaniche riposizionatesi sulla *linea Gustav* (dalla costa tirrenica a Montecassino, non lontano da Caserta, e di qui ad Ortona a Mare, sull'Adriatico), all'occupazione, non breve, degli alleati anglo-americani.

Al fine di dare dei termini, come si suole dire, *post quem* e *ad quem* per la datazione dello strumento e, cosa altrettanto importante, delle istruzioni ad esso allegate (consistenti in un fascicoletto di nove fogli manoscritti più uno bianco)[5], va ricordato che il destinatario, Ferdinando II di Borbone (Palermo 1810 – Caserta 1859), salì al trono del Regno delle Due Sicilie (così denominato dal 1815 – in conseguenza del Congresso di Vienna – e derivato dalla fusione del Regno di Napoli col Vice-regno di Sicilia), l'8 dicembre del 1830 e regnò fino alla sua morte. Sotto l'aspetto dei "termini temporali", un'indicazione che permette di avviare la restrizione dell'intervallo di tempo entro il quale l'aritmometro di cui si tratta giunse nel Regno del Meridione d'Italia è offerta da Stephen Johnston nell'articolo *Making the arithmometer count* dove l'autore ricorda l'invio, da parte di Thomas de Colmar, di esemplari del suo aritmometro a varie "teste coronate", a partire da quelle regnanti in Europa: "*In the early 1850s Thomas distributed examples of the arithmometer to numerous crowned and titled heads of Europe. Surviving examples of these presentation machines are individually ornamented with engraved dedications on scrollwork inside the case lid*". In ragione anche di questa iniziativa, un certo numero di aritmometri prodotti da Thomas sono presenti ancora oggi nel mondo, sparsi presso pubbliche istituzioni e qualche luogo privato. Johnston, nell'articolo citato, ne menziona (alla nota 24) tre o quattro (se si include anche quello donato dal figlio di Charles Xavier Thomas de Colmar, il cui nome era Louis Thomas de Bojano, all'Imperatore del Brasile, nel 1872), di cui uno, modello anni Cinquanta dell'Ottocento, ricevuto in dono da Maria Luisa di Borbone, reggente il Ducato di Parma e Piacenza (in nome del figlio, ancora bambino, Roberto I) dal 1854 al 9 giugno 1859 (vale a dire alla vigilia dell'unificazione d'Italia), messo, o forse rimesso, in vendita in anni relativamente recenti: "*was offered at Drouot-Richelieu, Paris, 10 May 1990, lot 114*", informa Johnston.

Un altro aiuto per la datazione, forse ancora meglio approssimata, dell' "Aritmometro di Ferdinando II" viene dalla consultazione del sito-web *www.arithmometre.org*, particolarmente ricco e qualificato, e dalla conseguente comparazione tra la macchina di cui si parla in quest'articolo e le altre presentate nel sito mediante riproduzione fotografica: l'"Aritmometro di Ferdinando II", nella sua realizzazione evoluta e nella sua forma esteticamente

[5] Si tratta di un fascicoletto, manoscritto, in lingua francese, composto di pagine non numerate, la cui prima pagina ha per titolo *Arithmomètre* e per sottotitolo *Instruction Sommaire*, e reca, inoltre, le otto regole preliminari. Sulla seconda pagina è scritto semplicemente *Arithmomètre*, con la terza partono le istruzioni relative all'*Addition*, e così via fino alla decima pagina, mentre la nona è bianca. Il fascicoletto è protetto da una copertina di colore rosso che reca due etichette: sono la *prima* e la *terza* precisate alla nota 3.

raffinata, è uguale a quello donato da C.X. Thomas de Colmar a "*Nicolas I, Empereur de toutes les Russies*" – il quale visse dal 1796 al 1855 –, con la solita formula degli "*Hommage respectueux de l'inventeur*" e questa volta con la "*N*" sulla faccia esterna del coperchio della scatola. L'"Aritmometro di Nicola I", costruito tra il 1852 ed il 1853, quasi certamente realizzato sul progetto registrato con un nuovo brevetto, di validità quindicennale, l'8 dicembre del 1850[6], fu donato, come è ovvio pensare, prima della morte dell'Imperatore, avvenuta nello stesso anno – 1855 – in cui si svolse la *guerra di Crimea* (la quale vedeva le due nazioni su opposti schieramenti) e, molto probabilmente, prima che essa scoppiasse.

Per quanto detto, si può affermare che l'"Aritmometro di Ferdinando II" appartiene alla classe degli "aritmometri reali" donati intorno al 1855.

Nel medesimo sito-web, prima citato, è compilato, grazie ai contributi di Michel Bardel, vice-presidente dell'*ANCMECA* (*Association Nationale des Collectionneurs de Machines à Ecrire et à Calculer Mécaniques*), di Stephen Johnston, autore dell'articolo *Making the arithmometer count* e conservatore del *Museum of the History of Science* di Oxford, e di Bob Otnes, direttore del *Journal of the Oughtred Society*, un lungo elenco di aritmometri presenti nei più grandi musei e università del mondo, ma non vi è notizia dell'esemplare della Reggia di Caserta.

L'"Aritmometro di Nicola I" e l'"Aritmometro di Ferdinando II", destinati a due personaggi che erano, rispettivamente, imperatore e re, stanno senz'altro al vertice per ricchezza di dotazioni, anche rispetto a quello donato, negli stessi anni, alla reggente Maria Luisa di Borbone; per esempio, i primi due sono dotati di un evoluto dispositivo denominato da Thomas col termine francese di *mémento* (o, se si vuole, si potrebbe dire anche *promemoria*), poco noto agli studiosi di queste macchine e al quale si accennerà più oltre, cosa che l'"Aritmometro di Maria Luisa" non possiede; ma non vi è solo ciò: quest'ultimo è abilitato per l'immissione, o impostazione, di numeri aventi al massimo 5 cifre, rispetto invece alle 8 possibili per gli altri due "regi apparecchi" (per quanto il "regio aritmometro" donato "À *sa Majesté le Roi du Portugal*" ha le stesse caratteristiche, non brillanti al massimo grado, di quello destinato alla reggente Maria Luisa).

L'aritmometro, ideato e realizzato da Charles Xavier Thomas de Colmar (questi nacque in Francia, a Colmar, cittadina dell'Alsazia, nel 1785 e morì nel 1870), occupa un posto molto importante nella storia delle macchine calcolatrici. Fu la prima macchina calcolatrice (meccanica, ovviamente) utile al commercio e usata diffusamente nella società civile: solida, affidabile, prodotta su scala industriale, a prezzo accessibile; e queste sue caratteristiche contrastavano profondamente con gli aritmometri realizzati in precedenza, i quali

[6] Brevet n° 10990 (numéro de registre 6261) consultabile al sito-web *www.arithmometre.org*

erano poco funzionali e destinati, pressoché esclusivamente, ad ornare le collezioni di "oggetti curiosi" posseduti da nobili e regnanti.

Thomas de Colmar progettò il primo aritmometro nel 1820. Per la realizzazione egli si serviva di esperti in macchine di precisione che, all'inizio, furono specialmente orologiai. Uno stimolo forte a pensare alla possibilità di avere a disposizione una macchina per il calcolo automatico gli venne dal servizio prestato sia presso l'amministrazione reale francese e sia, con qualifiche di alto livello, nelle armate francesi operanti in Spagna e in Portogallo in età napoleonica: attività amministrative e contabili fatte special-mente durante il servizio svolto presso il generale N.-J. de Dieu Sault, duca di Dalmazia, il quale fu, tra l'altro, governatore generale dell'Andalusia, che procurarono a Thomas de Colmar la nomina a *Chevalier de la Légion d'Honneur* nel 1821; attività che egli proseguì, dal 1819, nel settore delle assicurazioni: ne creò persino una, ben riuscita, contro gli incendi, dal nome "*le Soleil*", autorizzata ad operare nel 1829.

È con l'ingresso negli anni Settanta dell'Ottocento che la macchina ebbe, però, veramente successo poiché l'inventore, Thomas de Colmar, suo figlio, Louis, e suo nipote continuarono a perfezionarla per risolvere notevoli problemi al fine di mettere a punto le doti funzionali caratteristiche di un moderno aritmometro del tipo di quelli ancora in uso per un pezzo del XX secolo. In questa prospettiva, vi è da segnalare che L. Jacob, autore del volume *Le Calcul mécanique*, edito nel 1911, scrive al riguardo (p. 48) che "*il a été perfectionné par le constructeur [Louis] Payen et est très répandu en France*"; e, inoltre, nel volume curato da E.M. Horsburgh, *Modern Instruments and Methods of Calculation. A Handbook of the Napier Tercentenary Exhibition* (esposizione organizzata nel tricentenario della pubblicazione dell'opera famosa di Nepero dal titolo *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*), del 1914, si legge (p. 122): "*It is still a useful machine, but its place is now being taken by lighter and better types*", modelli più agili, leggeri e migliorati ma non diversi nella concezione.

Negli anni Settanta del XIX secolo la macchina di Thomas fu prodotta, sostanzialmente uguale, anche in Germania – si pensi alla *Rechenmaschine* di A. Burkhardt, ingegnere a Glashütte i./S. – e in un secondo momento in Gran Bretagna – Johnston, nell'articolo citato, allude alla *Calculating-Machine*, progettata da J. Edmondson, in Halifax, e alla macchina di S. Tate[7]–.

[7] Nel volume curato da Horsburgh, *Modern Instruments and Methods of Calculation*, alla presentazione (pp. 102-104) del *Layton's Improved Arithmometer*, costruito a Londra, vale a dire dell'aritmometro progettato da S. Tate e realizzato nel 1883, su mandato di questi, in forma più evoluta da Charles e Edwin Layton (che subito poi ne acquistarono il brevetto), è affermato che quello costruito dai Layton fu il primo aritmometro (evidentemente con quei requisiti di fruibilità che prima si sono definiti per l'aritmometro di Thomas) inglese. Alla presentazione, vi è aggiunto, per la descrizione della macchina, un passo di una relazione letta dal professor C.V. Boys alla *Society of Art*, seduta del 3 marzo 1886 (pubblicata, nello stesso anno, nel tomo 34 del *Journal of*

Al fine di rendere maggiormente circostanziato il quadro di riferimento, sia scientifico che tecnologico, in cui è collocato l'aritmometro di Thomas, è interessante segnalare che nel *Katalog*, curato da W. Dyck, in occasione dell'esposizione, organizzata dall'*Associazione dei matematici tedeschi*, che doveva tenersi a Norimberga nel 1892[8], è realmente detto, in rapporto alla macchina di A. Burkhardt (si veda, ivi, p. 150, la breve presentazione del modello da esporre) che questa macchina è identica, per il funzionamento e per la forma, a quella di Thomas, per quanto, è aggiunto, la meccanica interna presenti alcuni miglioramenti: "*In Bezug auf die Handhabung und äussere Gestalt stimmt diese Maschine mit dem bekannten 'Arithmometer' von Thomas überein, das Innere weist jedoch Verbesserungen und Ergänzungen auf*". Inoltre, al punto successivo, è elencato un "modello didattico", utile per tenere lezioni, dell'aritmometro di Thomas eseguito da A. Burkhardt e appartenente alla raccolta di "strumenti cinematici" della Scuola Tecnica Superiore (*Technische Hochschule*, oggi *Technische Universität*) di Berlino-Charlottenburg: "*Unterrichtsmodell zur Thomas'schen Rechenmaschine, ausgeführt von A. Burkhard in Glasshütte i. S. – Kinematische Sammlung der techn. Hochschule Berlin-Charlottenburg, Vorstand Geh. R. Professor [Franz] Reuleaux*". Nello stesso testo è segnalato ancora, vicino alla macchina precedente, un altro aritmometro, pur esso derivato da quello di Thomas ma diverso in alcuni punti (ne sono ivi considerati almeno quattro) di non trascurabile importanza: trattasi della *Rechenmaschine* di Otto Büttner, venduta, allora, dalla ditta W. Brückner di Dresda. Per curiosità, si evidenzia che nel *Katalog* del Dyck sono riportati i prezzi della *Rechenmaschine* di Burkhardt (quella a 6 cifre costava 375 marchi; a 8 cifre 475; a 10 cifre 675) e della macchina di Brückner (quella a 6 cifre costava 325 marchi; a 8 cifre 425; a 10 cifre 625), così pure è presentato un modello (accompagnato, come è fatto per i due prima citati, dalla figura illustrativa) della *Circular Calculating-Maschine*

---

the Society of Art, col titolo di *Calculating machines*), dove è affermato che il *Layton's Improved Arithmometer* è solo "*in appearance identical with the de Colmar machine*" ma se ne discosta per le belle rifiniture, l'accuratezza della costruzione, l'eccellenza del materiale impiegato nonché per i miglioramenti funzionali. (Migliorato sì, ma non nella sostanza del progetto, sembra di capire). Una nitida figura del *Layton's Improved Arithmometer* (con incisi gli estremi del brevetto: *Laytons patents n° 8984 & 12032 – 1909. Bauerles patents 1668 & 15251 – 1907*) è allegata, ivi, a p. 103.

[8] L'esposizione, voluta in occasione del convegno della *Deutsche Mathematiker Vereinigung* (*DMV*), fu rimandata all'anno successivo (si terrà a Monaco di Baviera) per la crisi sanitaria in cui, nel frattempo, fu coinvolta la Germania. Nonostante il differimento, fu compilato, per incarico della presidenza della *DMV*, un voluminoso *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente*, curato, "in collaborazione con numerosi esperti colleghi" da Walther Dyck (professore della *Technische Hochschule* –oggi *Technische Universität*– di Monaco di Baviera) nello stesso 1892, stampato presso la K. Hof- u. Universitätsbuchdruckerei von Dr. C. Wolf und Sohn. Al *Katalog* fu aggiunto un consistente *Nachtrag* nel 1893.

di Edmondson; ma non vi è elencata, tra le macchine inviate per l'esposizione, quella di Tate (si pensa, naturalmente, alla forma, più evoluta, realizzata dai fratelli Layton).

Sembra utile ricordare, infine, che il matematico francese Édouard Lucas, ben noto per i suoi studi sulla teoria dei numeri e sulle macchine calcolatrici[9], in una relazione tenuta, nel 1884, al Congresso di Blois dell'*Association Française pour l'Avancement des Sciences*, dà un elenco di numerose istituzioni e categorie imprenditoriali, di notevole importanza, operanti in Francia, presso le quali l'aritmometro di Thomas era allora utilizzato: "Magasins du Louvre", "Compagnie des petites voitures", "Caisse des dépôts et consignations", "Directions du ministre de la guerre" e "de la marine", "les compagnies d'assurances" e "de chemin de fer", "l'Observatoire", "le Boureau central météorologique", "l'École polytechnique", "l'École des ponts et chaussées", ecc.

Lucas non trascura di precisare, ancora, che si vendevano in media 100 esemplari all'anno di questa macchina, di cui 60 andavano all'estero e 40 erano distribuiti in Francia.

2 Composizione e funzionamento tipici dell'*Aritmometro* di Thomas de Colmar. Elementi distintivi caratterizzanti l'"Aritmometro di Ferdinando II"

Si descrivono ora, per sommi capi, sulla base della bibliografia citata, le **parti** e i **pezzi principali** costituenti la versione che si potrebbe definire tipica dell'aritmometro di Thomas de Colmar, non trascurando di dare, in contemporanea, le informazioni essenziali che spiegano il loro **funzionamento**. Accanto a ciò si metteranno in risalto, quando è possibile farlo, gli elementi distintivi che caratterizzano l'"Aritmometro di Ferdinando II" (costruito in conformità al brevetto dell'8 dicembre del 1850), tenendo conto che non si è potuto accedere, per verificare ulteriori dettagli, all'interno della scatola costituente questo esemplare del quale si è avuto la percezione che alcuni comandi fossero inceppati.

Nell'aritmometro di Thomas vi è una ***piattina fissa d'impostazione*** con una serie di *cursori* o *bottoni d'impostazione* (generalmente in numero di *6* oppure *8*), munito ognuno di *lancetta indicatrice*, ciascuno dei quali è scorrevole in una delle corrispondenti *scanalature graduate*, ivi presenti, scanalature che sono tutte verticali, parallele e della stessa lunghezza. Lungo ogni *scanalatura* sono

[9] Su di lui si può vedere, per esempio, l'articolo di A.-M. Décaillot, *L'arithméticien Édouard Lucas (1842-1891): théorie et instrumentation*, «Revue d'histoire des mathématiques», 4 (1998), pp. 191-236.

scritte, in nero, delle cifre che vanno da *0* a *9*. La *piattina fissa* si trova in basso a destra (Figura 1), guardando dall'alto il piano metallico dell'aritmometro. Questo dispositivo serve per **impostare** (o **immettere**) **le cifre dei numeri** (naturalmente con un massimo di cifre impostabili dato dal numero di *scanalature graduate* disponibili) con cui di volta in volta si viene a trattare (esso funziona come un *abaco universale* ad astine in ciascuna delle quali si possano infilare da *0* a *9* anellini).

Vi è poi una ***piattina***, o ***carrello***, ***mobile*** (o *piattina totalizzatore* che, come accade nelle realizzazioni maggiormente evolute della macchina, viene ad essere una *piattina totalizzatore-contatore*), posta nella parte alta del piano dell'aritmometro (Figura 1). Su questa *piattina*, attraverso ***fori***, o ***finestrelle*** (ci si riferisce alle *finestrelle-grandi*) che rappresentano il ***totalizzatore*** e che sono in numero doppio di quello delle *scanalature graduate d'impostazione* (o dei *cursori*, quindi sono, rispetto ai casi prima indicati, *12* oppure *16*: moltiplicare due numeri aventi, ciascuno, 6 – o 8 – cifre significa, infatti, avere prodotti a 12 – o 16 – cifre), vi appare una *striscia* (o un *allineamento*) *di cifre*.

Per un aspetto, questa *striscia* costituisce l'*addendo* o il *moltiplicando*, quando si voglia eseguire, rispettivamente, l'operazione di addizione o di moltiplicazione; costituisce poi il *minuendo* o il *dividendo* nel caso che si voglia eseguire, rispettivamente, l'operazione di sottrazione o di divisione.

(Ad impostare, alternativamente, queste operazioni provvede una "*chiave ad orecchie*" – "*clef à oreilles*" è chiamata nelle istruzioni riportate in quest'articolo –, o come si potrebbe anche denominare, considerata la forma, "*chiave a farfalla*", posta quasi al centro del piano dell'aritmometro – Figura 1 –, sulla *piattina fissa d'impostazione*, a confine con la *piattina mobile*. Questa chiave è munita di un'apposita lancetta che può essere posizionata, mediante una rotazione di circa 45°, effettuata a mano, in modo tale che sia possibile eseguire, come indica la lancetta, le operazioni di "*Addition et Multiplication*" e, alternativamente, di "*Soustraction et Division*").

La medesima *striscia di cifre*, che appare sul *totalizzatore*, costituisce, per un altro aspetto, il **risultato numerico** delle operazioni di addizione o sottrazione tra due numeri (naturalmente queste operazioni si possono estendere, iterativamente, a tre o più numeri nel rispetto della quantità di finestrelle disponibili); mentre, nel caso della moltiplicazione tra due numeri, essa rappresenta i prodotti parziali (quando vi siano) e il totale (e naturalmente anche l'operazione di moltiplicazione si può iterare). Nell'esecuzione della divisione tra due numeri, invece, la *striscia* di numeri che appare sul *totalizzatore* rappresenta i resti parziali (quando vi siano) fino al resto zero quando i due numeri siano divisibili: per quanto riguarda, in particolare, le cifre costituenti il quoziente, in quest'operazione di divisione, esse, che sono date via via dal numero di giri di manovella effettuati (con la "*clef à oreilles*" posizionata su "*Soustraction et Division*"), vanno ricordate a mente, man mano che si ottengono, oppure registrate con carta e penna o anche, agevolmente,

mediante "bottoni girevoli e finestrelle", sul *mémento* della macchina, quando esso sia corredato di questi attrezzi, come è nel caso dell'"Aritmometro di Ferdinando II" (dove il *mémento*, con "bottoni e finestrelle", si trova in basso a sinistra, sul piano dell'aritmometro – Figura 1 –). Ma, proprio nel caso di questo tipo di aritmometro, le cifre formanti il quoziente possono anche essere fornite, ad una ad una, da un sistema, del quale si dirà, "semiautomatizzato" rappresentato da una *scanalatura a doppia scala* e *cursore moltiplicatore*.

Non bisogna dimenticare, per ben intendere quanto si va illustrando, che l'aritmometro esegue le operazioni di moltiplicazione (o di divisione) mediante addizioni (o sottrazioni) ripetute.

In questo § 2 si tiene a mettere in evidenza, inoltre, che frequentemente un' "azione" compiuta sull'aritmometro ha forme alternative di esecuzione, cosa che non dovrebbe sfuggire al lettore attento.

Ogni *finestrella* del *totalizzatore* permette di vedere, ovvero di leggere, quella cifra, da *0* a *9*, che è scritta sulla sottostante *ruota* (o *quadrante*) *dei risultati* che sta all'interno della scatola.

Ciascuna *finestrella* del *totalizzatore* è accompagnata da un *bottone*, allineato un pò più in basso, che permette di agire direttamente sulla corrispondente *ruota dei risultati* al fine di azzerare, alla partenza di una nuova operazione, tutte le cifre del *totalizzatore* (*messa a zero* del *totalizzatore*) o, se si vuole, per impostare direttamente, per fare un esempio, il *dividendo* quando si abbia da eseguire un'operazione di divisione.

La *messa a zero* di tutte le finestrelle del *totalizzatore* si può effettuare anche *in un sol colpo* ruotando un *bottone d'avorio*, con la testina zigrinata, avente dimensione più grande dei precedenti, posto all'estremità sinistra della *piattina mobile* (*bottone* che comanda un'apposita *cremagliera* il cui funzionamento si descriverà più avanti), cosa che è possibile fare per l'"Aritmometro di Ferdinando II" (in questo esemplare la *cremagliera* è ben visibile osservando l'interno della scatola da una delle facce laterali dell'aritmometro dove, sotto la *piattina totalizzatore*, che è mobile come si è detto, si viene ad avere un pò di spazio).

Un insieme di cifre (formanti un numero qualsiasi) è **meccanicamente trasferito**, *in un sol colpo*, dalla *piattina fissa d'impostazione* alla *piattina totalizzatore-contatore*, mobile, dando un giro di ***manovella*** (che deve essere *completo*; le istruzioni riportate in quest'articolo dicono pure che essa può girare solo in senso antiorario: "*ne peut tourner que du droite à gauche*"); manovella che è posta in basso, all'estremità destra del piano dell'aritmometro (Figura 1) e indicata con *N* nella Figura 2. Impostato, in partenza, un numero sul *totalizzatore*, ogni giro, completo, di manovella aumenta di altrettanto questo numero di partenza; si potrebbe dire: ogni giro completo di manovella produce i successivi termini di una *progressione aritmetica*.

Il numero di giri di *manovella* appare attraverso le *finestrelle-piccole* o *finestrelle-moltiplicatore* (o, anche, *finestrelle-divisore*) che rappresentano il

contatore. Esse stanno allineate sulla *piattina mobile*, al di sotto delle *finestrelle-grandi*, e il loro numero è, generalmente, maggiore di un'unità di quello complessivo delle *scanalature* (o dei *cursori*; quindi esse sono, rispetto ai casi tipici prima indicati, *7* oppure *9*). Anche queste *finestrelle-piccole* sono accompagnate ciascuna da un *bottone* (la cui dimensione è stavolta più piccola del *bottone* che accompagna ciascuna delle *finestrelle-grandi*) per la *messa a zero*.

L'"Aritmometro di Ferdinando II" (e, naturalmente, quello dell'Imperatore Nicola I) non porta le *finestrelle-piccole* costituenti il *contatore* ma una *scanalatura (supplementare) a doppia scala*, allineata a sinistra (guardando, al solito, dall'alto il piano dell'aritmometro: è la nona in Figura 1, contando le scanalature da destra a sinistra) delle altre *scanalature graduate d'impostazione*. Lungo la *scanalatura supplementare* vi sono segnate, si è detto, due scale graduate: quella a sinistra va da *0* a *9* (*scala del moltiplicatore*), procedendo dal basso verso l'alto, quella a destra va da *0*, posto in alto, a *9* che è in basso (*scala del divisore*), e i numeri sono scritti in rosso. In questa *scanalatura supplementare* scorre un *cursore* o *bottone moltiplicatore* (che nel caso dell' "Aritmometro di Ferdinando II" ha la testina in avorio, diversamente dagli altri otto cursori, dello stesso aritmometro, che l'hanno in ottone) munito di una doppia *lancetta indicatrice*, una a destra e l'altra a sinistra, per indicare il numero di giri di manovella che si vogliono dare in funzione, propriamente, di *moltiplicatore* oppure avere il numero di giri di manovella che dicono quante volte il divisore è contenuto nel dividendo (nel *Brevet d'Invention* dell'8 dicembre 1850 è scritto, in relazione all'operazione di *Division*: "*[...] on met le bouton du moltiplicateur au haut de la fente; on tourne la manovelle jusqu'à ce que la chiffre du dividende soit moindre que le diviseur. Le bouton du moltiplicateur marquera le nombre de fois que le diviseur est contenu*"); ma "*on peut dispenser de s'en servir, on doit alors descendre ce bouton au bas de la coulisse et computer le nombre de tours que l'on fait*", secondo quanto avvertono le istruzioni qui riportate.

È, quest'ultimo, un sistema "semiautomatizzato", presente nella classe che ha tra i suoi esemplari l'"Aritmometro di Ferdinando II" (costruiti, si ricordi, sulla base del brevetto dell'8 dicembre 1850), dopo di che sembra che non verrà però più montato sugli aritmometri di Thomas: al suo posto verrà montato il *contatore* che si è descritto, *contatore* che, in seguito, sarà anch'esso fornito di un *bottone* per effettuare la *messa a zero* contemporaneamente (*in un sol colpo*) di tutte le sue finestrelle.

Se le *scanalature graduate d'impostazione* sono in corrispondenza con i *cilindri a gradini* (indicati con *Y* nella Figura 2), di cui subito dopo qui si dirà, questa *scanalatura supplementare* è invece in corrispondenza con un cilindro (allineato con i *cilindri a gradini*) che porta, in rilievo, una filettatura a spirale in modo da creare, di conseguenza, una gola sul cilindro (*cilindro* indicato con *H* nella Figura 2). Nella gola può scorrere un *braccetto*, comandato dal *cursore*

moltiplicatore, che regola così il numero, esprimente per esempio il *moltiplicatore* (si imposta sulla *scala graduata a sinistra*) per cui si vuol moltiplicare; cioè regola il numero di giri di manovella che bisogna dare con la mano in modo da sommare il moltiplicando tante volte a se stesso quante è indicato dal moltiplicatore: si gira fino a quando la mano non è forzata a fermarsi.

Volendo "guardare" ora agli altri meccanismi che stanno dentro la scatola, sotto il piano, metallico, costituente la faccia superiore dell'aritmometro, bisogna ancora fare qualche considerazione per poi procedere alla loro descrizione.

L'operazione di *impostazione e trasferimento* è fondamentale ed è realizzata usando i celebri ***cilindri a gradini*** (o *cilindri dentati*, a *9 denti*) che furono ideati, per la prima volta da G.W. Leibniz e che Thomas de Colmar "riscopre" utilizzandoli con maestria anche sulla base della più avanzata tecnologia dei materiali disponibile al tempo in cui viene ad ideare il suo progetto: abile utilizzazione dei *cilindri a gradini* e notevole miglioramento del meccanismo di *trasmissione del riporto* attraverso tutte le numerose cifre, di vario ordine (decine, centinaia, migliaia, ecc.), all'occorrenza coinvolte in un calcolo, vengono ad essere le caratteristiche salienti che rendono maneggevole e affidabile l'aritmometro di Thomas.

Ciascun *cilindro a gradini* (il cui asse, longitudinale, ha direzione e lunghezza coincidenti con quella della relativa *scanalatura graduata* posta di sopra, sul piano dell'aritmometro) porta sulla superficie 9 *denti* (o *nervature sporgenti*, rettilinee, come se fossero dei bassorilievi che spuntano dalle *rette generatrici* del cilindro, visibili in Figura 2) a lunghezza variabile: essa s'incrementa gradino per gradino, dal più corto, che è 1/10 della lunghezza dell'asse del cilindro, al più lungo che è i 9/10).

I denti del cilindro possono essere agganciati da un *pignone dentato* (o *puleggia dentata*) che è scorrevole su di un *albero a sezione quadrata* al quale è però, contemporaneamente, solidale nel movimento di rotazione. L'insieme dei *cilindri a gradini* e dei corrispondenti *pignoni dentati* costituiscono il cosiddetto *meccanismo d'immissione* (o *entraîneur*) ed è indicato con *A-A* nella Figura 2.

Lo scorrimento, longitudinale, del *pignone dentato* lungo l'*albero a sezione quadrata* è regolato da una *linguetta*. Essa è collegata, per un estremo, al *cursore d'impostazione*, da cui riceve la misura dello scorrimento in funzione del numero impostato (quando s'imposta lo *0* non vi è scorrimento), e con l'altro estremo, che è fatto a *forcella*, trasmette lo scorrimento a questo *pignone dentato* il quale, di conseguenza, si porterà in posizione tale che nel momento in cui il *cilindro a gradini* si metterà a ruotare (per effetto di *un* giro, che sarà *completo e solo completo*, di manovella) esso sarà "*addentato*" (o, se si vuole, "*addenterà*"), rispettivamente, soltanto da un gradino (il più lungo, per fissare le idee) o soltanto da due, ecc., ruotando così di un arco che sarà 1/9 oppure i 2/9, ecc. dell'*arco massimo* di rotazione (equivalente a *una* rivoluzione).

L'*albero a sezione quadrata*, su cui scorre il *pignone dentato*, porta fissato, ad un estremo (verso le *finestrelle del totalizzatore*), un *manicotto* che a sua volta reca, a ciascuno dei suoi propri estremi, una particolare ruota dentata a forma non piana ma *conica* (all'uno estremo vi è la *ruota per l'addizione e la moltiplicazione* all'altro la ruota per *sottrazione e divisione*, *D-D* nella Figura 2). Ognuna di queste ruote, alternativamente, è capace di ingranare, con la ruota dentata, anch'essa conica ovviamente, che fa girare la *ruota dei risultati*: questa girerà, a comando della "*clef à oreilles*", in un senso o nell'altro, svolgendo quindi la sua funzione "sottrattiva" o "additiva".

Quando si dà un *giro* (completo) *di manovella* si imprime, contemporaneamente, la rotazione (mediante una particolare coppia di ruote dentate "sempre in presa": *coppia conica*) di un giro completo (*una* rivoluzione) a tutti i *cilindri a gradini*, ciascuno di questi farà ruotare poi, di un certo arco, il relativo *pignone dentato* assieme all'*albero a sezione quadrata* (questa rotazione avviene per un arco proporzionale al valore della cifra impostata dal corrispondente *cursore*) e, ancora proporzionalmente, la rotazione è trasmessa, alla fine, alla specifica *ruota o quadrante dei risultati*.

Se sulla *piattina totalizzatore* compare già un numero precedentemente trasferito (si ricordi: questo numero è stato prima impostato, sulla *piattina d'impostazione*, con la *serie di cursori* e dopo si è dato, per il trasferimento, un giro di *manovella*), e ad esso si vuole, per esempio, sommare un secondo numero, allora s'imposta il secondo numero, si dà un giro di manovella e sul *totalizzatore* compare la *somma* (avvertenza: volendo eseguire una somma, all'inizio di questa procedura si è posizionata la "*clef à oreilles*" su "*Addition et Multiplication*").

Se sulla *piattina totalizzatore* compare già un numero che però si vuole eliminare (operazione di *messa a zero*), allora si può agire, come si è spiegato, sui singoli *bottoni* che accompagnano ciascuna *finestrella* del *totalizzatore* o agire, alternativamente, *con un sol colpo*, sul *bottone d'avorio* con la testina zigrinata.

Nei suoi aspetti essenziali, il *dispositivo di messa a zero*, detto *a cremagliera*, abilmente pensato, che appare con gli aritmometri costruiti in base al brevetto del 1850, è realizzato così: al di sotto di ciascuna *ruota dei risultati* si trova, collegata solidarmente ad essa, un'altra *ruota*, che è *dentata*, più piccola, configurata per portare *10* denti ma dalla quale è stato eliminato il dente che corrisponde a quello che avrebbe permesso di far vedere, attraverso la *finestrella del totalizzatore*, la cifra *0* impressa sulla *ruota dei risultati*. Tirando, o facendo ruotare, il *bottone zigrinato*, la *cremagliera* si sposta sia lateralmente che longitudinalmente andando ad ingranare ciascuna *ruota dentata piccola* e facendola ruotare fino a quando essa non raggiunge la posizione di "*dente mancante*" cioè lo *0* della *ruota dei risultati*.

Si vuole, per finire, dare un cenno, al meccanismo di *trasmissione del riporto*, in grado di trasmettere un eventuale riporto attraverso tutte le numerose

cifre, di vario ordine (decine, centinaia, migliaia, ecc.), all'occorrenza coinvolte in un calcolo. All'estremità di ogni *cilindro a gradini* (dalla parte del totalizzatore), e solidale con l'asse del *cilindro*, vi è una ruota liscia (una ruota a tamburo) che porta un *dente sporgente lateralmente* (*K* nella Figura 2): si chiamerà la *ruota col dente*. Essa gira ogni qual volta gira il *cilindro a gradini* ed è tenuta compressa, contro il *cilindro*, da una molla a spirale trattenuta da una *coppiglia*. Sulla *ruota* (o *quadrante*) *dei risultati* vi è una *camma*, detta pure "*piano inclinato*", a forma di mezzo rombo, posta tra le cifre *9* e *0*. Questa *camma* è capace di produrre un temporaneo allentamento della *coppiglia* e quindi una decompressione del *dente laterale* il quale porta allo spostamento di un dente della *ruota dei riporti* posta sullo stesso asse della *ruota* (o *quadrante*) *dei risultati* producendo così la rotazione di quest'ultima ruota e il passaggio alla cifra successiva che, al solito, è visibile dalla *finestrella del totalizzatore*.

***

Volendo dare un esempio di esecuzione di un calcolo, si supponga di dover *moltiplicare* 37456 per 982.

Si portano a zero le cifre del *totalizzatore*.

Si mette la *chiave* su *moltiplicazione*.

S'imposta, con i *cursori*, il numero 37456.

Si danno due giri di *manovella*.

Dalle *finestrelle* del *totalizzatore* si legge il numero 74912 (uguale a 37456 per 2).

A questo punto va osservato che si volesse il solo prodotto di 37456 per 82 (più piccolo, com'è evidente, di 982), bisognerebbe dare 82 giri alla manovella (interpretando, naturalmente, il prodotto come una somma ripetuta). Ma non vi è bisogno di fare ciò.

Dopo aver moltiplicato 37456 per 2, si fa *slittare di un grado* verso destra (guardando dall'alto il piano, metallico, dell'aritmometro) la *piattina totalizzatore-contatore* che è mobile.

Si danno 8 giri di *manovella*. Sul *totalizzatore* si legge 3071392 (uguale a 37456 per 82).

Infine, si fa *slittare di un altro grado*, verso destra, la *piattina totalizzatore-contatore* e si danno 9 giri di *manovella*. Il numero che viene è il *prodotto* desiderato.

Per altri esempi (oltre all'indicazione della procedura per le prove riguardanti le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione), comprese la moltiplicazione con numeri decimali e la divisione con quoziente decimale si rimanda alle istruzioni che seguono.

3 Le istruzioni

Si presentano in questo paragrafo la trascrizione del testo originale, manoscritto, in francese, costituente le istruzioni essenziali per l'uso dell' aritmometro di Thomas de Colmar e la corrispondente traduzione in italiano. Il testo originale è rappresentato da un fascicoletto, composto di pagine non numerate, la cui prima pagina ha per titolo *Arithmomètre* e per sottotitolo *Instruction Sommaire*, e reca, inoltre, le otto regole preliminari. Sulla seconda pagina è scritto semplicemente *Arithmomètre*, con la terza partono le istruzioni relative all'*Addition*, e così via fino alla decima pagina, mentre la nona è bianca. Il fascicoletto è protetto da una copertina di colore rosso che reca due etichette: sono la *prima* e la *terza* precisate qui alla nota 3.

3.1 Arithmomètre. Instruction Sommaire

1. Mettre tous les chiffres à zéro. On soulève la platine et on tourne le boutond'ivoire jusqu'à ce que toutes les lucarnes, sans exception, présentent zéro. On ramène ensuite le bouton-d'ivoire à son point de départ entournant en sens inverse. Puis on laisse retomber la platine qu'il faut également tenir levée, lorsqu'on veut tourner les boutons des lucarnes.
2. Indiquer l'opération qu'on veut faire, an moyen de l'aiguille qu'on tourne hardiment par la clef à oreilles.
3. Poser les nombres avec les boutons à coulisses, comme avec la plume, les unités à l'extrême droite.
4. Chaque tour entier de manivelle reproduit le nombre indiqué par les boutons à coulisses. Celui déjà posé dans les lucarnes est augmenté ou diminué d'autant, suivant que la clef est à addition ou à soustraction.
5. La manivelle ne peut tourner que de droite à gauche; ou doit l'arrêter entre les deux derniers crans; le tour commencé doit toujours s'achever.
6. La platine des lucarnes est mobile; il faut la soulever pour l'avancer ou la reculer d'une, de deux, de trois lucarnes, etc. etc. suivant qu'on opère sur des unités, des dixaines, des centaines, etc.
7. Le bouton d'ivoire de la dernière coulisse à gauche sert à marquer le nombre de tours que l'on veut faire. Ou peut se dispenser de s'en servir, on doit alors descendre ce bouton au bas de la coulisse et compter le nombre de tours que l'on fait.
8. On opère sur l'Arithmomètre suivant les règles de l'Arithmétique.

Addition

Mettre la clef à addition.

Soit à additionner 5345

et 4654

écrire 5345 avec les boutons à coulisses et donner un tour de manivelle.

Puis écrire de même 4654, et donner également un tour de manivelle; le nombre 9999 présenté dans les Lucarnes, est le total demandé.

S'il y avait d'autres nombres à additionner, on les écrirait successivement avec les boutons à coulisses, en donnant chaque fois un tour de manivelle.

Le Total se trouve écrit dans les Lucarnes.

La preuve se fait en opérant de la même manière, mais en mettant la clef à soustraction, chaque tour de manivelle alors au lieu d'ajouter dans les Lucarnes le nombre écrit dans les coulisses, le retranche, et l'on doit trouver zéro.

Soustraction

Soit à soustraire de 9999

la somme [*sic*] de 5345

écrire contrairiment [*sic*] à l'addition 9999 dans les Lucarnes (ce qui se fait en écrivant 9999 avec les boutons à coulisses, en donnant un tour de manivelle).

Mettre ensuite la clef à soustraction.

Puis écrire 5345 somme que l'on veut soustraire, dans les coulisses, et donner un tour de manivelle.

Le reste 4654 écrit dans les Lucarnes, est le résultat de la soustraction proposée.

Si l'on voulait soustraire plusieurs nombres, on les écrirait successivement dans les coulisses en donnant chaque fois un tour de manivelle.

Le reste se trouve écrit dans les Lucarnes.

La preuve se fait en mettant la clef à addition et en ajoutant les sommes qu'on a retranchées, on doit retrouver dans les Lucarnes le nombre primitif.

Multiplication

Mettre la clef à multiplication.

Soit à multiplier 5345 par 3.

On écrit dans les coulisses 5345 et on tourne la manivelle 3 fois pour multiplier par 3. Le produit 16035 se trouve écrit dans les Lucarnes.

Si ou lieu de multiplier 5345 par 3, on voulait le multiplier par 243, on procéderait en commençant par la droite, comme l'indique l'Arithmétique, et l'on donnerait 3 tours de manivelle pour multiplier par chiffre des unités.

Puis on avancerait la platine d'un degré, en la soulevant, a fin que les Dixaines se trouvent sous les Dixaines, et on donnerait 4 tours pour multiplier par 4 chiffre des Dixaines.

Et enfin on avancerait la platine d'un degré, afin que les Centaines se trouvent sous les Centaines.

Le Produit 1.298.835 se trouve écrit dans les Lucarnes.

S'il y avait d'autres chiffres au multiplicateur, on continuerait de la même manière, en ayant soin d'avancer la platine de façon à ce que les chiffres du même ordre se trouvent les uns sous les autres.

Pour faire la Preuve, on tourne la clef à Division, et on procède en sens inverse de la multiplication en commençant par la gauche comme il est expliqué ci après.

S'Il [*sic*] y a des fractions décimales, la virgule portative en ivoire, se place après le 2.^{e} le 3.^{e} ou le 4.^{e} chiffre suivant qu'il y a 2,3, ou 4 décimales au Multiplicateur et au multiplicande réunis; et on procède comme pour des nombres entiers, conformément au règles ordinaires de l'Arithmétique. Soit 9,75 à multiplier par 3,25. Il y a 4 décimales, on porte la virgule après le 4.^{e} chiffre, on écrit 975 dans les coulisses, et on multiplie par 325, et d'abord par 5, puis par 2. puis par 3, en ayant soin d'avancer la platine comme il est dis plus haut.

Le produit 31,6875 se trouve écrit dans les Lucarnes.

Division

Soit à diviser 3264566 par 6242.

Ecrire d'abord le Dividende 3264566 dans les Lucarnes, comme pour la soustration [*sic*].

Puis mettre la clef à Division.

Ecrire dans les coulisses le diviseur 6242, faire glisser la platine en la soulevant et porter le premier chiffre de gauche, et s'il ne le contient pas, le second, au dessus du premier chiffre des coulisses. Et dans ce cas le 6 se trouvera sous le 2 des deux premiers chiffres 32.

Tourner la manivelle autant de fois que 6242 est contenu en 32645, chaque tour retranchant une fois le nombre écrit dans les coulisses de celui qui se trouve marqué dans les Lucarnes, en donnant 5. tours, on le retranchera 5 fois. Il n'y est plus contenu.

5 sera donc le premier chiffre du Quotient.

Rentrer la platine d'un degré.

6 se trouvera sous le 4 de 143566 qui reste dans les Lucarnes.

Tourner autant de fois que 6242 y est contenu, ou donnera 2 tours. Il n'y est plus contenu.

2 sera le second chiffre du Quotient.

Enfin rentrer la platine d'un degré, le 6 se trouvera sous le 8 de 18726. Tourner autant de fois qu'il y est contenu, on donnera 3 tours.

3 sera le troisième chiffre du quotient.

Il reste zéro dans les Lucarnes.

Le Quotient demandé est donc 523.

On peut l'écrire à la main au fur et à mesure de l'opération sur le mémento de la machine.

Il est à remarquer que pour voir si le chiffre inférieur est contenu dans le chiffre supérieur, il suffit d'avoir les yeux sur les 2 premiers chiffres de la platine.

Si l'on commence par erreur un tour, il faut l'achever. Puis tourner la clef à addition, et donner un tour. L'erreur se trouve ainsi réparée, et l'on reprend l'opération.

Il est une remarque utile à faire à l'égard des chiffres du dividende, qu'il faut placer dans les Lucarnes.

S'il doit y avoir des fractions décimales au quotient, il est indispensable, en écrivant le dividende dans les lucarnes, de laisser à sa droite plusieurs zéros, de telle sorte qu'il y ait, en commençant la division, une partie de la platine en dehors.

De cette manière on peut pendant le cours de l'opération rentrer la platine d'un, de deux, de trois degrés etc., et par suite avoir autant de chiffres décimaux qu'il y avait de lucarnes en dehors de la machine.

Exemple – Soit à diviser 31 par 28. Si l'on veut avoir trois décimales, on sort la platine et on écrit 31 suivi de trois zéros, soit 31000. D'après ce qui précède, 28 des coulisses se trouve audessous de 31 des Lucarnes.

Tourner une fois, le chiffre du quotient est 1 il reste 3. 28 n'étant pas contenu le 1.^{er} chiffre sera une décimale.

Rentrer la platine d'un degré.

28 se trouve sous le 20 écrit dans des Lucarnes. Il n'y est pas contenu.

Zéro est le second chiffre.

Rentrer la platine d'un degré.

28 se trouve sous 300. Il y est contenu 7 fois, 7 est le 3^{e} chiffre des décimales.

1,107 est donc le quotient demandé.

À l'aide des 4 règles ci dessus expliquées on peut faire toutes les opérations d'Arithmétique.

L'extraction des racines carrées se fait avec une grande promptitude.

Quand [*sic*] aux ecceptions [*sic*] qui n'auraient pas été expliquées, l'usage les fera facilement connaitre [*sic*].

3.2 Aritmometro. Istruzioni Sommarie

1. Mettere tutte le cifre a zero: si solleva la piattina [delle finestrelle] e si gira il bottone d'avorio finché tutte le finestrelle, senza eccezione, presentino lo zero. Si rimette, successivamente, il bottone d'avorio nel suo punto di partenza girando in senso inverso. Dopo si lascia cadere la piattina che si può anche tenere alzata quando si debba girare di nuovo i bottoni delle finestrelle.
2. Indicare l'operazione che si vuole eseguire mediante la lancetta che si gira agevolmente con la chiave a orecchie.
3. Impostare i numeri mediante i bottoni delle scanalature, come quando si esegue un'operazione con carta e penna, ponendo le unità all'estremità destra.
4. Ciascuno giro intero di manovella riproduce il numero indicato dai bottoni delle scanalature; se vi è già presente un numero nelle finestrelle, allora esso è aumentato o diminuito di questo numero, a seconda che la chiave [a orecchie] è posta sull'addizione o la sottrazione.
5. La manovella non può girare che da destra a sinistra [cioè in senso antiorario, n.d.r.]; si deve fermarla entro le due ultime tacche; il giro, una volta iniziato, deve essere sempre completato.
6. La piattina delle finestrelle è mobile; si deve sollevarla per farla avanzare o indietreggiare di una, di due, di tre finestrelle, ecc., ecc., secondo che si operi sulle unità, sulle decine, sulle centinaia, ecc.
7. Il bottone d'avorio dell'ultima finestrella a sinistra serve a segnalare il numero di giri [della manovella] che si vogliono fare. Si può evitare di servirsene, in tal caso si deve discendere questo bottone nella parte più bassa della scanalatura e contare [a mente] i numeri di giri che si sono fatti.
8. Si opera sull'Aritmometro seguendo le regole dell'aritmetica.

Addizione

Disporre la chiave [a orecchie in posizione] per l'addizione.
Siano da addizionare 5345
e 4654
scrivere 5345 con i bottoni delle scanalature e dare un giro di manovella.

Poi scrivere anche 4654 e dare ugualmente un giro di manovella: il numero 9999, che si presenta nelle finestrelle, è la somma richiesta.

Se vi sono altri numeri da sommare, si scrivono successivamente con i bottoni delle finestrelle dando per ciascun numero scritta un giro di manovella.

La somma finale si legge dalle Finestrelle.

La prova si effettua operando allo stesso modo ma disponendo la chiave [a orecchie] per la sottrazione, allora ciascun giro di manovella al posto di

aggiungere nelle Finestrelle il numero scritto mediante [i bottoni del]le scanalature, lo sottrae e deve venire zero.

Sottrazione

Sia da sottrarre da 9999
il numero 5345

scrivere, contrariamente a quanto si è fatto per l'addizione, 9999 nelle Finestrelle (cosa che si fa scrivendo 9999 con i bottoni delle scanalature e dando un giro di manovella).

Mettere di conseguenza la chiave [a orecchie in posizione] per la sottrazione.

Dopo, scrivere 5345, numero che si vuole sottrarre, mediante [i bottoni del]le scanalature e dare un giro di manovella.

Il resto, 4654, scritto nelle finestrelle, è il risultato della sottrazione proposta.

Se si vogliono sottrarre più numeri, essi si scriveranno successivamente mediante [i bottoni del]le scanalature dando ogni volta un giro di manovella.

Il resto ritrova scritto nelle finestrelle.

La prova si fa mettendo la chiave per l'addizione e aggiungendo i numeri che si sono in precedenza di volta in volta sottratti; si deve trovare nelle finestrelle il primo numero.

Moltiplicazione

Mettere la chiave per la moltiplicazione.

Sia da moltiplicare 5345 per 3.

Si scrive, con i bottoni delle scanalature, 5345 e si gira la manovella 3 volte per moltiplicare per 3. Il prodotto 16.035 si trova scritto nelle Finestrelle.

Se invece di moltiplicare 5345 per 3, si vuole moltiplicarlo per 243, si procederà cominciando dalla destra, come prescrive l'Aritmetica, e si daranno tre giri di manovella per moltiplicare per la cifra delle unità.

Dopo, si avanzerà la piattina di un grado [verso destra, n.d.r.], sollevandola, affinché le decine si trovino sotto le decine, e si daranno 4 giri [di manovella] per moltiplicare per le 4 cifre delle decine.

E, infine, si avanzerà la piattina di un grado [ancora verso destra, n.d.r.] affinché le centinaia si trovino sotto le centinaia.

Il prodotto 1298835 si trova scritto nelle Finestrelle.

Se si hanno altre cifre al moltiplicatore, si continuerà allo stesso modo, avendo cura di avanzare la piattina in modo che le cifre dello stesso ordine si trovino le une sotto le altre.

Per fare la prova, si gira la chiave [a orecchie posizionandola] per la divisione, e si procede in senso inverso a quello della moltiplicazione, cominciando dalla sinistra, com'è spiegato qui di seguito.

Se si hanno dei numeri decimali, la virgola portatile in avorio si piazza dopo la 2ª, 3ª, o 4ª cifra secondo che si abbiano 2, 3, o 4 cifre decimali, sommando quelle del moltiplicatore e del moltiplicando; e si procede come per i numeri interi, conformemente alle regole ordinarie dell'Aritmetica. Sia da moltiplicare 9,75 per 3,25. Si hanno 4 cifre decimali. Si porta la virgola dopo la 4ª cifra, si scrive 975, con i bottoni delle scanalature, e si moltiplica per 325, cominciando a moltiplicare per 5, poi per 2, poi per 3, avendo cura di avanzare la piattina, come si è detto più in alto.

Il prodotto 31,6875 si trova scritto nelle Finestrelle.

Divisione

Sia da dividere 3264566 per 6242.

Scrivere, per iniziare, il dividendo 3264566 nelle Finestrelle, come si fa per la sottrazione.

Dopo, mettere la chiave per la divisione.

Scrivere nelle scanalature il divisore 6242, far scivolare la piattina, sollevandola, e portare la prima cifra di sinistra, e se non la contiene, la seconda, al di sopra della prima cifra delle scanalature. In questo caso [poiché il 6 di 6242 non è contenuto nel 3 di 3264566] il 6 si troverà sotto il 2 delle prime due cifre 32.

Girare tante volte la manovella quante volte 6242 è contenuto in 32645: ciascun giro sottrae una volta il numero scritto nelle scanalature da quello che si trova marcato nelle Finestrelle; dando 5 giri, si sottrarrà 5 volte, e [6242] non è contenuto più di tanto [in 32645].

5 sarà dunque la prima cifra del quoziente.

Rientrare la piattina di un grado:

6 si ritroverà sotto il 4 di 143566 che resta nelle Finestrelle.

Girando tante volte [la manovella] finché 6242 vi è contenuto, [si conterà che] sono stati dati 2 giri.

2 sarà la seconda cifra del quoziente.

Infine, rientrata la piattina di un [altro] grado, il 6 si troverà sotto l'8 di 18726. Girare tante volte quante [6242] è contenuto [in 18726]: si daranno 3 giri.

3 sarà la terza cifra del quoziente.

Resta zero nelle Finestrelle.

Il quoziente richiesto è dunque 523.

Si può scrivere progressivamente a mano l'operazione sul "mémento [*memoria*, n.d.r.]" della macchina.

Va rilevato che per vedere se la cifra inferiore è contenuta in quella superiore, è sufficiente osservare le prime due cifre della piattina.

Se s'incomincia, per errore, un giro, esso va completato; dopo, girare la chiave per l'addizione e dare un giro: l'errore viene ad essere così riparato e si può riprendere l'operazione.

Vi è un utile consiglio da dare per quanto riguarda le cifre del dividendo che si impostano nelle Finestrelle.

Potendosi avere dei numeri decimali come quoziente, è indispensabile, scrivendo il dividendo nelle finestrelle, di lasciare alla sua destra molti zeri, in modo tale che si abbia, cominciando la divisione, una parte della piattina all'esterno [sul lato destro, guardando dall'alto il piano dell'aritmometro, n.d.r.].

In questo modo si può, nel corso dell'operazione, rientrare la piattina di uno, di due, di tre gradi, ecc., e per conseguenza avere tante cifre decimali quante sono le finestrelle che si sono poste fuori il bordo della macchina.

Esempio. Sia da dividere 31 per 28. Se si vogliono avere tre cifre decimali, si fa uscire la piattina e si scrive 31 seguito da tre zeri, ossia 31000. Dopo quanto si è detto, il 28 delle scanalature si trova sotto il 31 delle finestrelle.

Girando una volta, la cifra del quoziente è 1, il resto è tre. 28 non è contenuto [in 3], la prima cifra sarà un decimale.

Rientrare la piattina di un grado.

28 è al di sotto di 30. Dare un giro [di manovella]. [28] è contenuto una volta: 1 è la prima cifra decimale.

Rientrare la piattina di un grado.

28 si trova al di sotto del 20 scritto nelle finestrelle. Esso non è contenuto [in 20].

Zero è la seconda cifra.

Rientrare la piattina di un grado.

28 si trova sotto 300. Esso vi è contenuto 7 volte, 7 è la 3ª cifra dei decimali.

1,107 è dunque il quoziente richiesto.

Con l'aiuto delle quattro regole qui sopra esplicate si possono eseguire tutte le operazioni dell'Aritmetica.

L'estrazione di radice quadrata si fa con una grande rapidità.

Quanto alle eccezioni che non sono state descritte, l'uso le farà facilmente riconoscere.

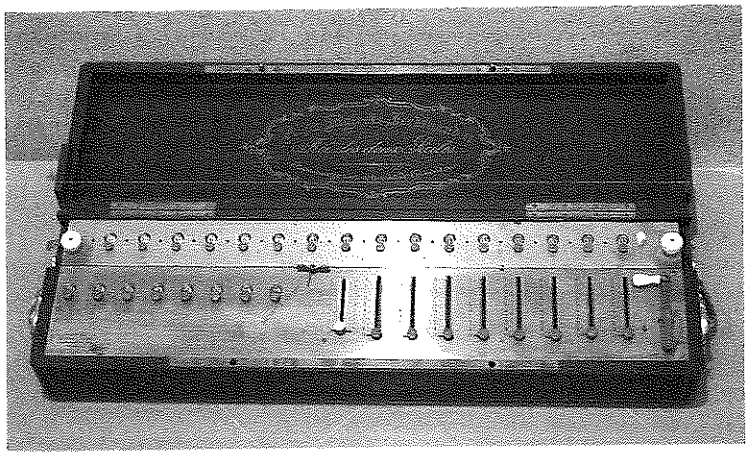


Figura 1 – Riproduzione fotografica dell'Aritmometro di Thomas de Colmar conservato alla Reggia di Caserta.

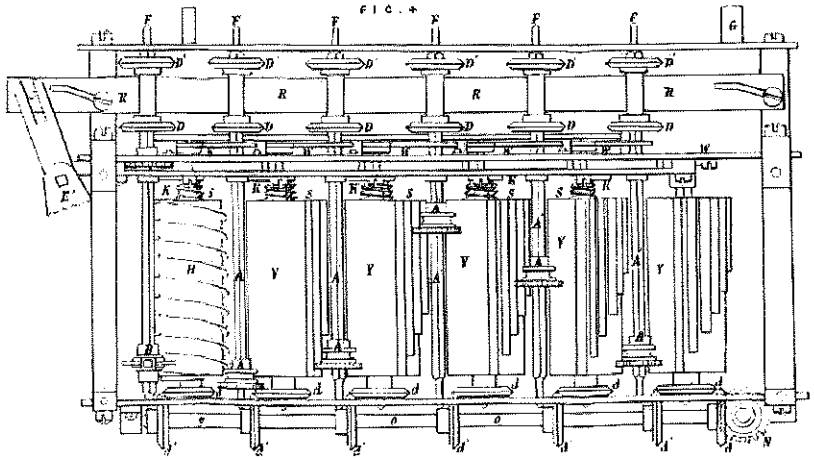


Figura 2 – Schema della parte interna dell'Aritmometro di Thomas de Colmar allegato al brevetto dell'8 dicembre 1850 (tratto dal sito *www.arithmometre.org*).

Riferimenti bibliografici

- M. d'Ocagne, *Thomas de Colmar, inventeur de l'arithmomètre*, «Revue scientifique», 73 (1935), pp. 783-785.
- W. Dyck (Herausgeber), *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente*, Deutsche

Mathematiker-Vereinigung, K. Hof- u. Universitätsbuchdruckerei von Dr. C. Wolf und Sohn, München, 1892.

- A. Galle, *Mathematische Instrumente*, Leipzig und Berlin, Druck und Verlag von B.G. Teubner, 1912.
- E.M. Horsburgh (Edited by), *Modern Instruments and Methods of Calculation. A Handbook of the Napier Tercentenary Exhibition*, London: G. Bell and Sons, Ltd. and The Royal Society of Edinburgh, 1914.
- L. Jacob, *Le Calcul mécanique. Appareils arithmétiques et algébriques. Integrateurs*, "Encyclopédie Scientifique. Publiée sous la direction du D[r] Toulouse – Bibliothèque de Mathématiques appliquées: directeur M. D'Ocagne", Paris, Octave Doin et Fils Editeurs, 1911.
- S. Johnston, *Making the arithmometer count*, «Bulletin of the Scientific Instrument Society», 52 (1997), pp. 12-21, articolo diffuso anche attraverso il «*Museum of the History of Sciences*», Oxford (United Kingdom), all'indirizzo: *http://www.mhs.ox.ac.uk/staff/saj/arithmometer/*
- É. Lucas, *Le calcul et les machines à calculer*, «Association Française pour l'Avancement des Sciences», 13 (1884), pp. 111-141.
- M.R. Williams, *A History of Computing Technology*, 1985, trad. italiana *Dall'abaco al Calcolatore Elettronico*, Franco Muzzio editore, 1989.
- Sito-web: *www.arithmometre.org*, dove, oltre ad ulteriori indicazioni bibliografiche, vi è pure presentata un'autorevole biografia di Thomas de Colmar: è riproposto, infatti, l'articolo di J. Joly, *Un grand inventeur alsacien: Charles-Xavier Thomas*, apparso, nel 1932, in «La vie en Alsace».

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXXIII, (2006) pp. 481-490

On the stability of a binary chemical reaction diffusion system with Turing instability

Nota di Maurizio Gentile[1], Salvatore Rionero[1], Assunta Tataranni [1]

Presentata dal Socio Prof. S. Rionero
(Adunanza del 3 novembre 2006)

Abstract - The linear stability-instability of the equilibrium state of a binary reaction-diffusion system of P.D.Es modelling a chemical autocatalytic reaction, is studied. The onset of Turing instability is obtained.

Riassunto - Si studia la stabilità lineare dello stato di equilibrio di un sistema binario di P.D.Es del tipo reazione-diffusione che modella una reazione chimica autocatalitica. L'insorgere della instabilità di Turing è messa in evidenza.

1 Introduction

The reaction-diffusion system of P.D.Es, often are used for modelling the chemicals reactions{see [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] and the references quoted therein}. Generally, the domain in which the chemical reaction takes place is considered fixed, although this does not happen in the real chemical reactions. Here we consider the system

$$\begin{cases} U_t = \gamma(a - U + U^2V) + \Delta U \\ V_t = \gamma(b - U^2V) + d\Delta V \end{cases} \tag{1}$$

[1]Università di Napoli Federico II. Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli". Complesso Universitario Monte S. Angelo. Via Cinzia, 80126 Napoli - ITALIA. E-mail: m.gentile@unina.it, rionero@unina.it, assunta.tataranni@dma.unina.it

in a smoothly variable domain $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^3$ such that $(x, y, z) \in \Omega \Longrightarrow z \in [0, l]$ with $l = const. > 0$ under Dirichlet boundary conditions

$$\begin{cases} U = a + b \\ \\ V = \dfrac{b}{(a+b)^2} \end{cases} \qquad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{2}$$

with a, b, γ and d constants such that

$$\begin{cases} a + b > 0 \\ b > 0, d > 0 \end{cases} \tag{3}$$

System (1) contains as particular case the system introduced by Schnackenberg for trimolecular autocatalytic reactions and is contained in the Segel-Jackson ([7]). Our aim is to study the longtime behaviour of the solution of (1)-(2). Setting

$$\begin{cases} U = u^* + C_1 \\ V = v^* + C_2 \end{cases} \tag{4}$$

with

$$\begin{cases} u^* = a + b \\ v^* = \dfrac{b}{(a+b)^2} \end{cases} \tag{5}$$

critical point of (1)-(2), the longtime behaviour of the solution of (1)-(2) is then reduced to the stability of (5).

The plan of the paper is as follows. Section 2 is devoted to some preliminaries. In Section $3-4$ we obtain conditions necessary and sufficient respectively for the linear stability and the linear instability. In the last Section (Section 5) the onset of diffusion driven instability (Turing effect) is obtained.

2 Preliminaries

It is easily seen that the equations governing the perturbations (C_1, C_2) to the basic state (u^*, v^*) are

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C_1}{\partial t} &= a_1 C_1 + a_2 C_2 + \Delta C_1 + f(C_1, C_2) \\ \\ \dfrac{\partial C_2}{\partial t} &= a_3 C_1 + a_4 C_2 + d\Delta C_2 + g(C_1, C_2) \end{cases} \tag{6}$$

under Dirichlet homogeneous boundary conditions

$$C_1 \equiv C_2 \equiv 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+; \tag{7}$$

with

$$\begin{cases} a_1 = -1 + 2u^*v^* = \gamma\dfrac{b-a}{a+b}, & a_2 = \gamma u^{*2} = \gamma(a+b)^2 \\ a_3 = -2\gamma u^*v^* = -2\gamma\dfrac{b}{a+b}, & a_4 = -\gamma u^{*2} = -\gamma(a+b)^2 \end{cases} \tag{8}$$

and

$$\begin{cases} f(C_1, C_2) = \gamma(C_1^2 v^* + C_1^2 C_2 + 2u^* C_1 C_2) \\ g(C_1 C_2) = -f(C_1, C_2) \end{cases} \tag{9}$$

Following the methodology introduced by Rionero {[8], [9], [10], [11]} we use the scalings

$$C_1 = \alpha u, \qquad C_2 = \beta v \tag{10}$$

with α and β constants and set

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta} \tag{11}$$

Then it turns out that

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a_1 u + \dfrac{a_2}{\mu} v + \Delta u + f^* \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \mu a_3 u + a_4 v + d\Delta v + g^* \end{cases} \tag{12}$$

under the boundary conditions

$$u = v = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{13}$$

with

$$\begin{cases} f^* = \dfrac{1}{\alpha}[f]_{\substack{C_1 = \alpha u \\ C_2 = \beta v}} \\ g^* = \dfrac{1}{\beta}[g]_{\substack{C_1 = \alpha u \\ C_2 = \beta v}} \end{cases} \tag{14}$$

Denoting by
$< \cdot, \cdot >$ the $L^2(\Omega)$ scalar product,
$\| \cdot \|$ the $L^2(\Omega)$-norm,
we study the problem in the variable functional space $W_0^{1,2}[\Omega(t)]$. In this space the Poincaré inequality

$$\|\nabla\varphi\|^2 \geq \bar{\alpha}\|\varphi\|^2 \tag{15}$$

holds. It is well known that $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\Omega)$ is the lowest eigenvalue of

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0, \quad \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{16}$$

and an approximate value is given by $\bar{\alpha} = \pi^2/l^2$ ([12]). Setting

$$\begin{cases} b_1 = a_1 - \bar{\alpha} = \gamma\dfrac{(b-a)}{a+b} - \bar{\alpha} \\ \\ b_4 = a_4 - d\bar{\alpha} = -[\gamma(a+b)^2 + d\bar{\alpha}] \end{cases} \tag{17}$$

(12) becomes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = b_1 u + \dfrac{a_2}{\mu} v + f^* + f_1^* \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \mu a_3 u + b_4 v + g^* + g_1^* \end{cases} \tag{18}$$

with

$$\begin{cases} f_1^* = \Delta u + \bar{\alpha} u \\ \\ g_1^* = d(\Delta v + \bar{\alpha} v) \end{cases} \tag{19}$$

3 Linear stability

Setting

$$\begin{cases} I = b_1 + b_4 \\ \\ A = b_1 b_4 - a_2 a_3 \end{cases} \tag{20}$$

and introducing the Rionero-Liapunov functional ([8], [9])

$$W = \frac{1}{2}[A(\|u\|^2 + \|v\|^2) + \|b_1 v - \mu a_3 u\|^2 + \|\frac{a_2}{\mu} v - b_4 u\|^2], \tag{21}$$

in view of the Reynolds transport theorem and the boundary conditions, along the solutions of (18) it turns out that

$$\frac{dW}{dt} = AI(\|u\|^2 + \|v\|^2) + \psi^* + {\psi_1}^* \tag{22}$$

with

$$\begin{cases} \psi^* =< \alpha_1 u - \alpha_3 v, f^* > + < \alpha_2 v - \alpha_3 u, g^* > \\ \psi_1{}^* =< \alpha_1 u - \alpha_3 v, f_1{}^* > + < \alpha_2 v - \alpha_3 u, g_1{}^* > \\ \alpha_1 = A + b_4{}^2 + \mu^2 a_3{}^2, \qquad \alpha_2 = A + b_1{}^2 + \dfrac{a_2^2}{\mu^2} \\ \alpha_3 = \mu a_3 b_1 + \dfrac{1}{\mu} a_2 b_4 \end{cases} . \tag{23}$$

If one linearize (18), then (22) reduces to

$$\frac{dW}{dt} = AI(\|u\|^2 + \|v\|^2) + \psi_1{}^* \tag{24}$$

Theorem 1. *Let*

$$\begin{cases} I < 0 \\ A > 0 \end{cases} \tag{25}$$

then (u^*, v^*) *is linearly asymptotically stable with respect to the* $L^2(\Omega)$*-norm according to*

$$W \leq W_0 e^{-\delta t} \tag{26}$$

with $\delta \leq \dfrac{2A|I|}{k_2}$ *and* k_2 *given by (29).*

Proof. In the case $b_1 < 0$, on choosing

$$\mu^2 = \left| \frac{a_2 b_4}{a_3 b_1} \right| \tag{27}$$

it follows that $\alpha_3 = 0$, hence

$$\psi_1{}^* = -\alpha_1 \left[\|\nabla u\|^2 + \bar{\alpha} \|u\|^2 \right] - d\alpha_2 \left[\|\nabla v\| + \bar{\alpha} \|v\|^2 \right] \leq 0$$

which implies

$$\frac{dW}{dt} \leq AI(\|u\|^2 + \|v\|^2). \tag{28}$$

By virtue of

$$\begin{cases} \dfrac{k_1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2) \leq W \leq \dfrac{k_2}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2) \\ \\ k_1 = A, \quad k_2 = A + 2({b_1}^2 + \dfrac{{a_2}^2}{\mu^2} + \mu^2 {a_3}^2 + {b_4}^2) \end{cases} \tag{29}$$

it turns out that

$$\frac{dW}{dt} \leq -\frac{2A|I|}{k_2} W \tag{30}$$

and hence (26) immediately follows.

In the case $b_1 > 0$, following ([11]), let $\{\bar{\alpha_n}\}, \{\varphi_n\}$ be respectively the sequence of the eigenvalues of (16) and the sequence of the associate eigenfunction in $W_0^{1,2}(\Omega)$. Assuming that:
(**i**) $\{\varphi_n\}$ is complete and orthogonal in $W^{1,2}(\Omega)$;

(**ii**) u, v and their first and second (spatial) derivatives can be expanded in a (Fourier) series absolutely and uniformly converging in Ω according to

$$\begin{cases} u = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(t)\varphi_n \\ \\ v = \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n(t)\varphi_n \end{cases} \tag{31}$$

and differentiable term by term, from the linearized system (18) (for $\mu = 1$) we obtain

$$\begin{cases} \dfrac{dX_n}{dt} = b_{1n}X_n + a_2 Y_n \\ \\ \dfrac{dY_n}{dt} = a_3 X_n + b_{4n} Y_n \end{cases} \tag{32}$$

with

$$\begin{cases} b_{1n} = a_1 - \bar{\alpha}_n \\ \\ b_{4n} = a_4 - d\bar{\alpha}_n \end{cases} \tag{33}$$

Then

$$\begin{cases} I_n < 0 \\ A_n > 0 \end{cases} \tag{34}$$

imply the stability of the zero solution with respect the perturbation (u_n, v_n).
But

$$\begin{cases} I < 0 \Rightarrow I_n < 0 \\ \\ A > 0 \Rightarrow A_n > 0 \end{cases} \tag{35}$$

In fact

$$\begin{cases} I_n = a_1 + a_4 - (1 + d\bar{\alpha}_n) = b_1 + b_4 - d(\alpha_n - \alpha_1) < I \\ \\ A_n = b_{1n}b_{4n} - a_2a_3 = [b_1 - (\alpha_n - \alpha_1)][b_4 - (\alpha_n - \alpha_1)] - a_2a_3 = \\ \quad = A + (\alpha_n - \alpha_1)^2 - (b_1 + b_4)(\alpha_n - \alpha_1) = \\ \\ \quad = A + (\alpha_n - \alpha_1)^2 + |b_1 + b_4|(\alpha_n - \alpha_1) \end{cases} \tag{36}$$

Then, setting

$$W_n = \frac{1}{2}[A_n(\|u_n\|^2 + \|v_n\|^2) + \|b_{1n}v_n - a_3u_n\|^2 + \|a_2v_n - b_{4n}u_n\|^2]$$

it follows that

$$W_n \leq W_n(0)e^{-\delta_n t} \tag{37}$$

where

$$\delta_n = \frac{2A_n|I_n|}{k_2^{(n)}} \tag{38}$$

with

$$k_2{}^{(n)} = A_n + 2[b_{1n}{}^2 + b_{4n}{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2]. \tag{39}$$

Setting

$$W = \sum_{n=1}^{+\infty} W_n \tag{40}$$

it follows that ([11])

$$W \leq W_0e^{-\delta t} \tag{41}$$

with δ positive constant independent of n.

In the case $b_1 = 0$ it turns out that

$$\alpha_1 = A + {b_4}^2 + \mu^2 {a_3}^2, \qquad \alpha_2 = A + \frac{a_2^2}{\mu^2}, \quad \alpha_3 = \frac{a_2 b_4}{\mu} \tag{42}$$

and for μ such that

$$(1+d)|\alpha_3| \leq 2\sqrt{d\alpha_1\alpha_2} \tag{43}$$

one obtain {See [10] Lemmas $1-3$}

$$\psi^* < 0.$$

4 Instability

Theorem 2. *Let either*

$$I > 0 \tag{44}$$

or

$$A < 0 \tag{45}$$

then (u^*, v^*) *is unstable.*

Proof. We refer for the sake of concreteness to the case (44). Then for $n = 1$, (32) gives

$$\begin{cases} \dfrac{dX_1}{dt} = b_1 X_1 + a_2 Y_1 \\ \dfrac{dY_1}{dt} = a_3 X_1 + b_4 Y_1 \end{cases} \tag{46}$$

with the eigenvalues

$$\lambda_{1,2} = \frac{I \pm \sqrt{I^2 - 4A}}{2} \tag{47}$$

and at least one either has positive real part or is zero.

5 Diffusion driven instability

Let us consider the system inequalities

$$\begin{cases} I_0 = a_1 + a_4 = \gamma\dfrac{b-a}{a+b} - \gamma(a+b)^2 < 0 \\ A_0 = \gamma^2(a+b)^2 > 0 \\ A = A_0 - \bar{\alpha}(a_1 d + a_4) + d\bar{\alpha}^2 < 0 \end{cases} \tag{48}$$

Condition (48) are the conditions for the onset of driven instability (Turing effect) i.e. (u^*, v^*) *is stable in the absence of diffusion, but is destabilized by diffusion.* It is easily seen that (48) hold if and only if ([11])

$$\begin{cases} b > a \\ b - a < (a+b)^3 \\ d > \dfrac{A_0 + \bar{\alpha}|a_4|}{\bar{\alpha}(|a_1| - \bar{\alpha})} \end{cases} \tag{49}$$

In view of (49), in particular it follows that the onset of Turing instability is guaranteed by $\{l = 1, a < 1, b > 1, \gamma < \pi^2\}$.

Acknowledgements

This work has been performed under the auspicies of the G.N.F.M. of I.N.D.A.M. and M.I.U.R. (P.R.I.N. 2005): "Nonlinear Propagation and Stability in Thermodinamical Processes of Continuous Media."

References

[1] Schnackenberg, J. (1979) *Simple chemical reaction systems with limit cycle behaviour*, J. Theor. Biol., **81**, 389-400.

[2] Turing, A.M. (1952) *The chemical basis of morphogenesis*, Phil. Trans. R. Soc. B, **237**, 37-72

[3] Dillon, R. Maini, P.K. and Othmer, H.G. (1994)*Pattern formation in generalized Turing systems*, J. Math. Biol., **32**, 345-393.

[4] Madzvamuse, A. Thomas, R.D.K. Maini, P.K. and Wathen, A.J.(2002) *A numerical approach to the study of spatial pattern formation in the ligaments of arcoid bivalves*, Bull. Math. Biol., **64**, 501-530.

[5] Murray, J.D. (2003) *Mathematical Biology.I. An introduction*, Third edition,Interdisciplinary Applied Mathematics **17**, Springer Verlag, New York.

[6] Murray, J.D. (2003) *Mathematical Biology.II. Spatial model and Biomedical Applications*, Third edition,Interdisciplinary Applied Mathematics **18**, Springer Verlag, New York.

[7] Segel, L. and Jackson, J. (1972) *Dissipative structure: an explanation and an ecological example*, J. Theor. Biol., **37**, 545-559.

[8] Rionero, S. (2006) *A rigorous reduction of the $L^2(\Omega)$-stability of the solutions to a nonlinear binary reaction-diffusion system of P.D.Es. to the stability of the solutions to a linear binary system of O.D.E's*, Journal of Math. Anal. Appl., **319**, 377-397.

[9] Rionero, S. (2006) *A nonlinear L^2-stability analysis for two-species population dynamics with dispersal*, Math. Biosci. Eng., **3**, 189-204.

[10] Rionero, S. (2005) *L^2 stability of the solutions to a nonlinear binary reaction-diffusion system of P.D.ES.*, Rend. Accad. Naz. Lincei, Serie IX, **XVI**, 227-238.

[11] Rionero, S. *Diffusion Driven Stability and Turing Effect Under Robin Boundary data*, (to appear).

[12] Flavin, J.N. Rionero, S. (1996) *Qualitative estimates for partial differential equations: an introduction*, CRC Press, Boca Raton, Florida.

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXXIII, (2006) pp. 491-507

I Falconidi del Museo Zoologico dell'Università di Napoli Federico II (Aves, Falconiformes, Falconidae). Catalogo aggiornato della collezione con note storiche

Nicola Maio*, Alessio Usai** & Fausto Barbagli***

Presentato dal socio Antonio Giuditta
(Adunanza del 1 dicembre 2006)

Key words: Falconidae, collection, revision, Zoological Museum, Naples, Italy.

Abstract – *The Falconidae of Zoological Museum of the University of Naples Federico II (Aves, Falconiformes, Falconidae). Update catalogue of the collection with historical notes.* The Falconidae specimens preserved in the ornithological collection of the Zoological Museum of University of Naples are 119 (stuffed and osteological specimens belonging to 19 species) and they come from various old collections during a period between 1812 and 1980. A review of taxonomical determination of these birds, a thorough research on archive data, ancient museum collections and literature was performed. The list of the specimens now lost, is reported. The most important historical and faunistic records are: *Falco peregrinus calidus* for Italian Adriatic coast, *F. biarmicus* for Apulia Region and some specimens of *F. vespertinus* and *F. tinnunculus* for urban ornithological fauna of Naples.

Riassunto – Il Museo Zoologico di Napoli possiede una collezione di Falconidi che comprende 119 reperti (19 specie) provenienti dalla fusione di diverse collezioni preesistenti tra il 1812 e il 1980. Nel presente lavoro è stata eseguita una revisione della determinazione delle specie e sono state effettuate indagini d'archivio su documenti inediti, collezioni di vari musei oltre che ricerche bibliografiche. Viene inoltre riportato l'elenco di tutti i reperti oggi perduti. Le segnalazioni più importanti dal punto di vista storico sono: *Falco peregrinus calidus* per la costa adriatica, *F. biarmicus* per la Puglia e alcuni esemplari di *F. vespertinus* e *F. tinnunculus* per l'ornitofauna urbana di Napoli.

* Museo Zoologico, Centro Museale «Musei delle Scienze Naturali», Università degli Studi di Napoli Federico II, via Mezzocannone, 8 - 80134 Napoli.

** Dipartimento di Zoologia, Università degli Studi di Napoli Federico II, Via Mezzocannone, 8 - 80134 Napoli.

*** Museo di Storia Naturale, Sezione di Zoologia "La Specola", Università degli Studi di Firenze, via Romana, 17 - 50125 Firenze.

1 Introduzione

Nel 1992 il Museo Zoologico della "Regia Università degli Studj di Napoli", istituito nel 1813, è entrato a far parte del nuovo Centro Interdipartimentale «Musei delle Scienze Naturali» (Botte & Scillitani, 1999; Botte & Maio, 2002). A partire da questo anno è iniziata un'opera di ricatalogazione e recupero di tutto il materiale sino ad oggi conservato in museo oltre che di raccolta di nuove collezioni. Nel 1984 Fraissinet *et al.* effettuarono una prima revisione dei reperti della sola fauna italiana della collezione dei Falconiformi del Museo.
Nel presente lavoro viene presentato il catalogo aggiornato e ragionato dell'intera collezione di Falconidi del museo (Aves, Falconiformes, Falconidae) corredato di tutti i dati storici recuperati da varie fonti inedite e l'elenco dei reperti ormai dispersi delle collezioni antiche con le relative informazioni.

2 Materiali e metodi

Essendo andati persi gli originali cataloghi antichi delle varie collezioni confluite nel Museo Zoologico è stato necessario realizzare un'accurata indagine storica per recuperare tutte le informazioni possibili. Si è proceduto inoltre alla revisione della determinazione tassonomica, alla contestualizzazione dei reperti di Falconidi presenti in museo e alla raccolta delle informazioni relative agli esemplari perduti. A tale scopo, oltre alla ricerca di fonti disponibili in letteratura sono stati consultati documenti inediti conservati negli archivi delle seguenti istituzioni napoletane: Archivio di Stato; Biblioteca del Dipartimento di Scienze Biologiche; Archivio Storico dell'Università di Napoli Federico II; Biblioteca Universitaria; Biblioteca dell'Accademia delle Scienze Matematiche e Fisiche, Biblioteca dell'Accademia Pontaniana, Biblioteca Nazionale Vittorio Emanuele III. Fondamentali informazioni sulla storia dei reperti sono state inoltre desunte da un accurato esame critico dei cartellini originali di diversa tipologia.
Per comodità sono stati indicati con sigle i seguenti musei scientifici dell'Università di Napoli: Museo Zoologico (MZN), Gabinetto di Anatomia Comparata (GAC), Gabinetto di Anatomia Generale e Patologica (GAGP); sigle sono state utilizzate anche per i cataloghi manoscritti oggi dispersi: Elenco del Museo Zoologico richiesto dal Rettore Gaetano Errichelli del 1861 (Elenco Errichelli); Catalogo del Regio Museo Zoologico di Napoli del 1845-1922 (Cat. RMZ); Inventario di Mobili, Utensili, Cristalli ecc... del Real Museo Zoologico (Inv. MUC); Catalogo del GAC (Cat. GAC) ed Inventario del GAC (Inv. GAC) e per il Catalogo attuale del Museo Zoologico del 1984-2000 (Cat. MZN).
Per l'inquadramento tassonomico e la revisione nomenclaturale dei reperti ci si è basati sulla "Check-list degli uccelli italiani" datata 13-02-2004 del C.I.S.O.-C.O.I. pubblicata on line sul sito web *http://www.ciso-coi.org* e su Brichetti & Massa (1998), Clements (1991), Monroe (1993) e Wells (1998). Per i nomi

italiani si è fatto riferimento a Massa *et al.* (2000) e Fraissinet *et al.* (2003); per l'identificazione dei reperti sono stati consultati i lavori di Mebs (1968), Cramp & Simmons (1980), Géroudet (1984), Allan (1996) e Brichetti & Fracasso (2003). Non è stato possibile determinare con certezza i preparati anatomici: in tal caso è stata considerata la specie riportata sui cartellini.
Per il catalogo aggiornato sono stati seguiti i criteri utilizzati in Maio *et al.*, (2003). Le informazioni relative agli esemplari oggi presenti nel MZN sono riportate secondo il seguente schema: binomio linneano; nome comune italiano e inglese; numero del Cat. MZN in grassetto con la «Z» iniziale; numero dell'inventario amministrativo del MZN tra parentesi tonde; tipo di reperto[1]; luogo di provenienza (toponimo e provincia[2]; nazione per i reperti non italiani) e data di raccolta o di acquisizione. Sono stati inoltre riportati: numero del Cat. RMZ in grassetto senza la «Z» iniziale; numero di inventario amministrativo del Cat. RMZ tra parentesi tonde e in corsivo; numero del Cat. GAC tra parentesi quadre; numero dell'Inv. GAC in corsivo; la collezione di origine[3]. Vengono riportate, infine, le note storiche, le eventuali osservazioni e le fonti bibliografiche. Le incertezze sono indicate con il (?).

3 Risultati

3.1 *Cenni storici della collezione*

I primi reperti di Falconidi acquisiti dal Museo Zoologico risalgono al 1812 per opera di Luigi Petagna, all'epoca Professore aggiunto alla cattedra di Zoologia e successivamente direttore del Museo: si tratta di otto reperti provenienti, molto probabilmente, dalle riserve di caccia reali dei Borbone (cfr. Tabella 1) nessuno dei quali è stato possibile ricondurre a reperti oggi presenti in collezione.
Giosuè Sangiovanni, direttore dal 1832 al 1849, incrementò notevolmente la collezione ornitologica, soprattutto grazie al dono di numerosi reperti del Sud America che nel 1834 furono donati dal governo brasiliano. Gli esemplari acquisiti durante la direzione di Sangiovanni e quella di Luigi Laruccia (1850-1856) furono riportati in un elenco, firmato dal Rettore Errichelli, con data 23 gennaio 1861, successivamente indicati nel Cat. RMZ come "collezione antica". Sotto la direzione di Ettore Cerulli non sono state acquisite ulteriori collezioni.

---

[1] Sono state utilizzate le seguenti abbreviazioni: es. nat.=esemplare naturalizzato, *juv.*=giovane, M♂= maschio; F♀= femmina.

[2] Per brevità sono state indicate le province italiane con le sigle delle targhe automobilistiche.

[3] Coll. Sangiovanni = collezione donata dal Governo Brasiliano a Sangiovanni nel 1834; coll. antica, RMZ = reperti del RMZ raccolti dal 1812 al 1856; coll. Schettino = collezione di Mario Schettino donata al RMZ nel 1937; coll. RMZ = reperti del RMZ raccolti dal 1860 al 1930; coll. O. G. Costa = collezione osteologica di Oronzio Gabriele Costa, ceduta nel 1863 al GAC; coll. GAC = reperti del GAC raccolti da 1860 al 1905, ceduti nel 1950 al MZN; coll. MZN = collezione Museo Zoologico di Napoli dal 1950 ad oggi.

Il direttore del MZN dal 1860 al 1898, Achille Costa, ha arricchito il museo con esemplari provenienti dall'Italia meridionale allo scopo di formare la "collezione di fauna locale", oltre che dal resto del mondo, costituendo la "collezione storica del RMZ". Questa collezione sino al 1899 comprendeva 23 esemplari di Falconidi. Sotto la direzione di Francesco Saverio Monticelli (1900 - 1928), sino al 1922 furono acquistati solo 4 esemplari di Falconidi.
La collezione ornitologica durante la direzione di Umberto Pierantoni (1928-1948) fu arricchita notevolmente da Mario Schettino, curatore volontario della collezione ornitologica del museo (Maio *et al.*, 1995) che nel 1937 donò al Museo Zoologico di Napoli la sua collezione ornitologica privata che comprendeva vari esemplari di falconidi interessantissimi sia dal punto di vista storico che faunistico. Di questi sono rimasti 70 esemplari naturalizzati, ancora perfettamente conservati e provvisti di cartellino originale che riporta il nome specifico, la località di provenienza, l'esatta data di cattura e talvolta il sesso, lo stadio di sviluppo e l'abito (Nappi & Maio, 2003; Maio & Nappi, 2001a, 2001b).
Paolo Panceri, primo direttore del GAC, raccolse, oltre ai preparati del GAGP, anche la collezione privata di reperti anatomici di Uccelli di O. G. Costa nel 1863 (cfr. Tabella 6). Tra il novembre 1873 e maggio 1874 Panceri organizzò una spedizione scientifica in Egitto con Achille Costa del Museo Zoologico di Napoli ed Emilio Cornalia direttore del Museo di Storia Naturale di Milano, per esplorare l'alta valle del Nilo e raccogliere esemplari per le collezioni dei rispettivi musei (Gasco, 1876a, 1876b). In totale il GAC ha posseduto una collezione di 14 reperti osteologici e altri preparati anatomici di Falconidi: di questi oggi si conservano ancora in museo solo 7 reperti.
Durante la II Guerra Mondiale gran parte delle collezioni del MZN fu danneggiata e, con esse, i reperti di Falconidi. Nel 1948, Mario Salfi, divenuto direttore, integrò quanto rimasto con le collezioni del GAC, riuscendo a riorganizzare il museo in occasione del XXVIII Congresso dell'Unione Zoologica Italiana, tenutosi a Napoli nel 1956. La collezione ornitologica, compresi i resti della collezione Schettino, fu riordinata ed esposta nel salone minore.
Nel 1969-70 fu donata al museo una collezione di Uccelli e micromammiferi dell'Ing. Rossetti dalla famiglia dopo la sua morte: tale collezione è andata dispersa tra il 1970 ed il 1971 subito dopo la morte di Salfi. Dal dopoguerra ai primi anni '90 vi sono state solo acquisizioni occasionali dovute a ritrovamenti di esemplari morti e successivamente naturalizzati.

3.2 *Catalogo sistematico*

Ordine FALCONIFORMES Sharpe, 1874

Famiglia FALCONIDAE Leach, 1820

Herpetotheres cachinnans (Linnaeus, 1758)
Falco sghignazzante - Laughing Falcon
Z5593 - es. nat.; Guyana, 1834; **502**; coll. Sangiovanni, RMZ. L'Inv. MUC lo riportava al n. 60 col nome iniziale: "*Astur cachinnans* coll. antica ".

Caracara plancus (Miller, 1777)
Caracara crestato - Crested Caracara
Z5675 - es. nat.; Brasile, 1834; **441**; coll. Sangiovanni, RMZ. Riportato sull'Elenco Errichelli come: "*Caracaras* (sic!) *communis* Cuv." e sull'Inv. MUC al n. 12 col nome: "*Polyborus brasiliensis* Gml., coll. antica, originariamente riportato come *Caracara communis*". Reca cart. 1956: "*Polyborus* sp.".

Micrastur ruficollis (Vieillot, 1817)
Falco di foresta barrato - Barred Forest Falcon
Z6809 - es. nat.; Brasile, 1863; **504**; coll. RMZ. Il Cat. RMZ riportava: "*Accipiter* (*Micrastur*) *xanthothorax* Tem., Museo di Torino". Inv. MUC n. 62.

Milvago chimachima (Vieillot, 1816)
Caracara testagialla - Yellow-headed Caracara
Z5592 - es. nat. M♂; Brasile, 1834; **439**; coll. Sangiovanni, RMZ. L'Inv. MUC lo riportava al n. 47 col nome iniziale: "*Astur* ..., coll. antica".
Z5743 - es. nat. M♂; Brasile, 1834; **440**; coll. Sangiovanni, RMZ. L'Inv. MUC lo riportava al n. 48 col nome iniziale: "*Astur* ..., coll. antica". Il cart. del 1956 riporta: "*Ibycter chimachima* (Vieill.)".

Falco alopex (Henglin, 1861)
Gheppio volpino - Fox Kestrel
Z5453 - es. nat. F⊘; Adua (Eritrea), 1897-98; **47937**; (*43597)*; coll. RMZ. Il cart. RMZ riporta: "*Falco (Tinnunculus) rupicolus* Leth. Abissinia". Il cart. 1956 riporta: "*Cerchneis rupicola* (Daud.)".

Falco biarmicus Temminck, 1825
Lanario - Lanner
Z4758 - es. nat. *juv.* F⊘; pressi di Foggia, 20/11/1927; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*F. feldeggi* Lanario, n. 678". Il cart. del 1956 riporta: "*F. b. feldeggii*, Schl. Lanario". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4759 - es. nat. F⊘; pressi di Foggia, 22/10/1927; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*F. feldeggi* adulto Lanario". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4760 - es. nat. *juv.* F⊘; San Severo [di Puglia] (FG), 26/11/1923; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*F. feldeggi*". Il cart. del 1956: "*F. b. feldeggii*, Schl.,". (Fraissinet *et al.*, 1984).

Z4761 - es. nat. *juv.* F⊘; Foggia, 06/01/1930; coll. Schettino, RMZ. Il cart. del 1956: "*F. b. feldeggii*, Schl.". (Fraissinet *et al.*, 1984). Registrato sul Cat. MZN in data 6/11/1986 ma attualmente non rinvenuto in collezione.
Z4762 - es. nat. F⊘; Cerignola (FG). 16/12/1933; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*F. feldeggi* su ramo". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4763 - es. nat. *juv.* F⊘; Foggia, ottobre 1931; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. cita: "*F. feldeggi*". Il cart. 1956: "*F. b. feldeggii*, Schl.". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4764 - es. nat. F⊘; Foggia, novembre 1921; coll. Schettino, RMZ. (Fraissinet *et al.*, 1984). Registrato sul Cat. MZN in data 6/11/1986 ma attualmente non rinvenuto in collezione.
Z4765 - es. nat. *juv.* F⊘.; Cerignola (FG), 26/11/1929; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*F. feldeggi*". Il cart. 1956: "*F. b. feldeggii*, Schl.". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4766 - es. nat. F⊘; Cerignola (FG); 26/12/1933; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig.: "*F. feldeggi*". Il cart. 1956: "*F. b. feldeggii*, Schl.". (Fraissinet *et al.*, 1984). Registrato sul Cat. MZN in data 6/11/1986 ma attualmente non rinvenuto in collezione.
Z4767 - es. nat. M*er*; San Severo [di Puglia] (FG), 06/11/1927; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*F. feldeggi* n. 076" Il cart. del 1956: "*F. b. feldeggii*, Schl., Lanario". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4768 - es. nat. F⊘; San Severo [di Puglia] (FG), 14/01/1935; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*F. feldeggi*" Il cart. del 1956: "*F. b. feldeggii*, Schl., Lanario". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4769 - es. nat. *juv.* F⊘; San Severo [di Puglia] (FG), 05/12/1929; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*Hierfalco feldeggi* Lanario". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4770 - es. nat. F⊘; Foggia, 18/11/1923; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*Hierfalco feldeggi*". Il cart. del 1956 riporta: "*F. b. feldeggii*, Schl., Lanario". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4771 - es. nat. M*er*; Oriolo Romano (VT), 07/12/1926; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*F. feldeggi* Lanario, n. 654". Il cart. del 1956 riporta: "*F. b. feldeggii*, Schl., Lanario". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z3686 – sterno; 1863; [398]; *466*; coll. O. G. Costa, GAC. Reca cart. GAC: "*Falco laniarius* (sic!) Linn., Costa n. 303. Il cat. GAC riporta: "Costa n. 363".
Z6668 - 3 uova, Volga (Russia); coll. RMZ. La scatola reca la scritta: "*Hierofalco Feldeggi* (sic!) A. d. Oddi, Wolga n. cat. 14A". Reca cart. interno col n. 122.
Z6669 - 3 uova, Balcani; coll. RMZ. La scatola reca la scritta: "*Hierofalco Feldeggi* (sic!) A. d. Oddi, n. cat. 14B". Reca cart. interno col n. 116.
Z6670 - 3 uova, Grecia; coll. RMZ. La scatola reca la scritta: "*Hierofalco Feldeggi* (sic!) A. d. Oddi, n. cat. 14C". Reca cart. interno col n. 130.
Z6671 - 2 uova, Sud Italia, 1860; coll. RMZ. La scatola reca la scritta:

"*Hierofalco Feldeggi* (sic!) A. d. Oddi, Regno di Napoli, n. cat. 14D". Reca cart. col n. 133.

Falco cherrug Gray, 1834
Sacro - Saker
Z4772 - es. nat. F♂; Foggia, dicembre 1908; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*Gennaya saker*". Il cart. del 1956 riporta: "*F. cherrug cherrug* Gray, Sacro". (Fraissinet *et al.*, 1984). Registrato sul Cat. MZN in data 11/11/1986 ma attualmente non rinvenuto in collezione.

Falco columbarius Linnaeus, 1758
Smeriglio - Merlin
Z4745 - es. nat. M*er*; Napoli, 02/11/1907; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*F. aesalon,* n. 0.288". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4746 - es. nat. *juv.* M*er*; Posillipo (NA), 18/10/1913; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*F. aesalon* Smeriglio". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4747a - es. nat. M*er*; Acerra (NA), 11/11/1913; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*F. aesalon* Smeriglio". Il cart. del 1956 riporta: "*F. merillus* (Gerini)". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4747b - es. nat. F♂; Capodimonte (NA), 04/10/1913; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*F. aesalon.* Smeriglio". Il cart. del 1956 riporta: "*F. merillus* (Gerini)". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4748 - es. nat. F♂; Europa, prima del 1845; **461**; coll. antica RMZ. reca cart. RMZ con la dic.: "*F. aesalon,* Gmelin, *juv.*; Dono di S.A.R. il Conte di ...". riportato sull'Inv. MUC al n. 24 col nome iniziale "*F. subbuteo*". Reca cart. 1956: "*F. merillus* (Gerini)". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4749 (1221) - es. nat. M*er*; Sesto Fiorentino (FI), 11/12/1923; coll. Schettino, RMZ. Il. cart. orig. riporta: "*F. columbarius aesalon* (Tunsti) adulto, Smeriglio, n. 994". (Fraissinet *et al.*, 1984).

Falco concolor Temminck, 1825
Falco unicolore - Sooty Falcon
Z4757 - es. nat. F♂; Adua (Abissinia), 1897-98; **47936**; (*43538*); coll. RMZ. Il Cat. RMZ riportava: "Acquisto De Luca, n. 52".
Z6842 - es. nat.; Eritrea, 1893-94; **43866**; (*43538*); coll. RMZ. Il Cat. RMZ riportava: "*Falco ardosjiacus* Vieill. (*concolor* Tem.). Dono Ministero".

Falco eleonorae Géné, 1834
Falco della regina - Eleonora's Falcon
Z4755a - es. nat. F♂; Lotzorai (NU), 28/09/1937; coll. Schettino, RMZ. (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4755b - es. nat. M*er*; Lotzorai (NU), 6/10/1907; coll. Schettino, RMZ. (Fraissinet *et al.*, 1984).

Z4756a - es. nat. F♂; Lotzorai (NU), 02/10/1937; coll. Schettino, RMZ. (Fraissinet *et al.*, 1984).

Z4756b - es. nat. F♂; Lotzorai (NU), 30/09/1937. coll. Schettino, RMZ. (Fraissinet *et al.*, 1984).

Falco naumanni Fleischer, 1818
Grillaio - Lesser Kestrel
Z4717 - es. nat. M♂; Foggia, 10/09/1927; coll. Schettino, RMZ. Reca cartellino orig.: "*F. cenchris*, Titta". Reca cart. 1956: "*F. n. naumanni*, Fleisch., Falco Grillaio". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4718 - es. nat. F♂; Palermo, 1882; **32159**(?); coll. RMZ. Il Cat. RMZ lo riportava come: "*Tichornis cenchris* Naum.". Lo stesso reperto era riportato sull'Inv. MUC al n° 2207. Reca cart. del 1956 con la dic.: "*F. n. naumanni*, Fleisch., Falco Grillaio". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4719 - es. nat. F♂; Europa, prima del 1845; **473**; coll. antica, RMZ. Il Cat. RMZ lo riportava come: "*Falco tinnunculus* corr. in *Tichornis cenchris* Naum.". Lo stesso reperto era riportato sull'Inv. MUC al n° 31. Reca cart. 1956: " *F. n. naumanni*, Fleisch., Falco Grillaio". (Fraissinet *et al.*, 1984).

Falco pelegrinoides Temminck, 1829
Falcone di Barberia - Barbary Falcon
Z4794 - es. nat. M♂; Algeria, prima del 1845; **463**; coll. antica, RMZ. Riportato anche nell'Inv. MUC al n. 27 come: "*F. barbarus* L.". (Fraissinet *et al.*, 1984).

Falco peregrinus Tunstall, 1771
Pellegrino - Peregrine
Z4774 - es. nat. *juv.* F♂; presso Manfredonia (FG), 15/01/1924; coll. Schettino, RMZ. Cart. 1956: "*F. p. calidus* Lath., Falco siberiano". Fraissinet *et al.* (1984) riporta: "*F. p. brookei*".
Z4775 - es. nat. *juv.* M♂; Foggia, 08/11/1923; coll. Schettino, RMZ. (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4776 - es. nat. F♂;Torino, dicembre 1919; coll. Schettino, RMZ. (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4777 - es. nat. M♂; Europa, prima del 1845; **460**; coll. antica RMZ. L'es. era riportato sull'Inv. MUC al n. 22 come: "*F. communis*". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4778 - es. nat. M♂; presso Foggia, 16/12/1927; coll. Schettino, RMZ. Reca cart. con la dicitura: "Falco peregrino n° 3". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4779 - es. nat. M♂; Foggia, 12/11/1933; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "Falcone, su ramo". Il cart. del 1956 riporta: "*F. p. calidus*, Lath., Falco siberiano". Fraissinet *et al.* (1984) riporta come data: "12/11/1923". Registrato sul Cat. MZN in data 6/11/1986 ma attualmente non rinvenuto in collezione.

Z4780 - es. nat. F⊘; Ivrea (TO), ottobre 1931; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*Melanoganys*". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4781 - es. nat. F⊘; Foggia, dicembre 1934; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "su ramo". Il cart. del 1956 riporta: "*F. p. calidus*, Lath., Falco siberiano". (Fraissinet *et al.*, 1984). Registrato sul Cat. MZN in data 11/11/1986 ma attualmente non rinvenuto in collezione.
Z4782 - es. nat. *juv.* M♂; Foggia, 25/11/1932; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*F. p.* n. 941". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4783 - es. nat. F⊘; Foggia, febbraio 1921; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "sul tronco". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4784 - es. nat. F⊘; San Severo [di Puglia] (FG). 15/11/1923; coll. Schettino, RMZ. Il cart. del 1956 riporta: "*F. p. calidus*, Lath., Falco siberiano". (Fraissinet *et al.*, 1984). Registrato sul Cat. MZN in data 12/11/1986 ma attualmente non rinvenuto in collezione.
Z4785 - es. nat. F⊘; Sesto Fiorentino (FI), 20/10/1936; coll. Schettino, RMZ.
Z4786 - es. nat. F⊘; Torre del Lago (Viareggio, LU), gennaio 1911; coll. Schettino, RMZ. (Fraissinet *et al.*, 1984). Registrato sul Cat. MZN in data 12/11/1986 ma attualmente in collezione è conservata la sola base.
Z4787 - es. nat. F⊘; Tombolo (PI), ottobre 1937; coll. Schettino, RMZ. (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4788 - es. nat. F⊘; Foggia, 08/09/1935; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "Piedi e cera arancione assai marcato". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4789 - es. nat. M♂; presso Foggia, 26/12/1933; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*F. p. brookei*, Falco minore n. 980". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4790 - es. nat. M♂; Foggia, 04/11/1934; coll. Schettino, RMZ. Il cart. del 1956 riporta erroneamente: "*F. p. pelegrinoides* Temm., Falcone di Barberia". Fraissinet *et al.* (1984) lo riportano come: "*F. p. brookei* n. 129k".
Z4791 - es. nat. *juv.* F⊘; Cerignola (FG), 10/11/1931; coll. Schettino, RMZ. (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4792 - es. nat. *juv.* F⊘; Cerignola (FG), 19/12/1931; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*F. p. calidus*, n. 852". Il cart. del 1956 riporta: "*F. p. calidus* Lath., Falcone Siberiano". (Fraissinet *et al.*, 1984). Registrato sul Cat. MZN in data 12/11/1986 ma attualmente non rinvenuto in collezione.
Z4793 - es. nat. M♂; Marina di Ravenna; 09/11/1935; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*F. p. calidus*, piedi e cera giallo limone verdognolo". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z3681 – sterno; 1866; [1729]; *467*; coll. Henlhe K., GAC. Reca cart. GAC: "*Falco peregrinus* Linn.
Z6672 - 3 uova, Pomerania (Germania); coll. RMZ. La scatola reca la scritta: "*Falco peregrinus* Tunstall, n. cat. 15A". Reca cart. interno col n. 117.

Falco rufigularis Daudin, 1800
Falco golarossa - Bat Falcon

Z6803 - es. nat.; Brasile, 1834; **462**; coll. Sangiovanni, RMZ. Riportato sull'Elenco Errichelli e sull'Inv. MUC al n. 25 col nome "*Falco aurantius* Lath., coll. antica". Reca cart. 1956: "*Falco aurantius* Gm.

Falco rusticolus Linnaeus, 1758
Girfalco - Gyrfalcon
Z4773 - es. nat. F♀; Lapponia (Russia), giugno 1909; coll. Schettino, RMZ. Il cart. orig. riporta: "*Hyerofalco gyrfalco* Girfalco, femmina adulta in cova, preparatore: Riccardo Maghelli". (Fraissinet *et al.*, 1984).

Falco sparverius Linnaeus, 1758
Gheppio americano - American Kestrel
Z5711 - es. nat. M♂; Brasile, 1885; **35219**; coll. RMZ. Riportato sull'Inv. MUC al n. 2233 col nome "*Tinnunculus sparverius* Bp., dono Settembrini". Il Cat. RMZ riporta: "*Cerchneis sparveria* Linn., Matogrosso".
Z5712a,b - 2 es. nat. M♂♂; America, prima del 1845; **471**; coll. antica, RMZ. Il Cat. RMZ riportava: "*Tinnunculus sparverius* Bp." corretto in: "*Cerchneis sparveria*". Riportato anche sull'Inv. MUC al n° 26 come "*Falco biarmicus*".

Falco subbuteo Linnaeus, 1758
Lodolaio - Hobby
Z4750 - es. nat. M♂; Foggia, 01/09/1932; coll. Schettino, RMZ. Il. cart. del 1956 riporta: "*F. s. subbuteo* L., Lodolaio". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4751 - es. nat. M♂; Europa, prima del 1845(?); **466**(?); coll. antica (?), RMZ. Il cart. MZN riporta: "semiadulto". Cart. del 1956: "*F. s. subbuteo*. L.". Forse corrisponde ad uno dei due es. riportati al n. 23 dell'Inv. MUC come: "*Hypotriorchis subbuteo* Linn. = *F. subbuteo*" (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4752 - es. nat. *juv.* M♂; Foggia, 02/08/1929; coll. Schettino, RMZ. (Fraissinet *et al.*, 1984). Registrato sul Cat. MZN in data 6/11/1986 ma attualmente non rinvenuto in collezione.
Z4753 - es. nat. M♂; Sorrento (NA), 24/04/1903; coll. Schettino, RMZ. Il cart. del 1956 riporta: "*F. s. subbuteo* L. Lodolaio". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4754 - es. nat. *juv.* M♂; Capodimonte (NA), 09/10/1911; coll. Schettino, RMZ. Il cart. del 1956 riporta: "*F. s. subbuteo* L. Lodolaio". (Fraissinet *et al.*, 1984).

Falco tinnunculus Linnaeus, 1758
Gheppio - Kestrel
Z4720a - es. nat. ♀F; Posillipo (NA), 02/03/1907; coll. Schettino, RMZ.
Z4720b - es. nat. ad.; Posillipo (NA). 02/03/1907; coll. Schettino, RMZ.
Z4721 - es. nat. M♂. Non reca alcun cartellino.
Z4722 - es. nat. *juv.* M♂; coll. Profazio.
Z4723a - es. nat. F♀; Europa, prima del 1845; **469**; coll. antica, RMZ. Il Cat.

MZN riporta: "Solofra (AV), 26/04/1914; coll. Schettino". Reca cart. con la dic.: "Uccelli n° 30, *T. alaudarius*, Br.". Rec. cart. del 1956 con la dic.: " *F. t. tinnunculus*, L., Gheppio". (Fraissinet *et al.*, 1984).

Z4723b - es. nat. *juv.*; Europa, prima del 1845; **469**; coll. antica, RMZ. Il Cat. RMZ riporta: "*Tinnunculus alaudarius (tinnunculus)* Linn., 1 Mer". Il Cat. MZN riporta: "1 es. F⦸, Posillipo (NA), 02/03/1907; coll. Schettino". Reca cart. con la dic.: "Uccelli n° 30, *T. alaudarius*, Br.". Rec. cart. del 1956 con la dic.: " *F. t. tinnunculus*, L., Gheppio". (Fraissinet *et al.*, 1984).

Z4724 - es. nat.; Il Cairo (Egitto); 1873; **16318**; coll. RMZ. Il cart. RMZ riporta: "*Tinnunculus alaudarius* Briss., Dono del Prof. Panceri in seguito al suo viaggio in Egitto; ai duplicati". Il reperto figurava sull'Inv. MUC al n° 1975. Reca cart. 1956: "*F. tinnunculus tinnunculus* L.". (Gasco, 1876a; Fraissinet *et al.*, 1984).

Z4725 - es. nat. F⦸; Ischitella (CE), 14/11/1912; coll. Schettino, RMZ. (Fraissinet *et al.*, 1984).

Z4726a - es. nat. Mer; Solofra (AV), 23/04/1917; coll. Schettino, RMZ. Reca il cartellino orig. col n° 396 e il cart. del 1956 con la dic.: "*F. t. tinnunculus*, L., Gheppio". (Fraissinet *et al.*, 1984).

Z4726b - es. nat. *juv.* Mer; Capodimonte (NA), 21/07/1914; coll. Schettino, RMZ. Reca il cartellino orig. col n° 372 e il cart. del 1956 con la dic.: "*F. t. tinnunculus*, L., Gheppio". (Fraissinet *et al.*, 1984).

Z4726c - es. nat. *juv.* Mer; Posillipo (NA), 04/10/1914; coll. Schettino, RMZ. Il cart. del 1956 riporta: "*F. t. tinnunculus*, L., Gheppio". (Fraissinet *et al.*, 1984).

Z4727 - es. nat. Mer; Europa, prima del 1845; **468**; coll. antica, RMZ. Non reca cartellini, forse corrisponde ad uno dei due es. riportati sull'Inv. MUC al n° 29.

Z4728 - es. nat. F⦸; Posillipo (NA), 14/01/1914; coll. Schettino, RMZ. Reca il cartellino orig. col n° 333. (Fraissinet *et al.*, 1984).

Z4729 - es. nat. *pullus*; Capodimonte (NA), 04/06/1911; coll. Schettino, RMZ. Reca il cartellino orig. con la dic.: "gheppio F⦸ nidiaceo". Il cart. del 1956 riporta: "*F. t. tinnunculus*, L.". (Fraissinet *et al.*, 1984).

Z4730 - es. nat. F⦸; Egitto. Reca cart. del MZN con la dic.: "*F. t.*, n. 39". Il cart. del 1956 riporta: "*F. t. tinnunculus*, L., Gheppio".

Z4731 - es. nat. Mer; Posillipo (NA), 08/06/1912; coll. Schettino, RMZ. Reca il cartellino del 1956: "*F. t. tinnunculus*, L., Gheppio". (Fraissinet *et al.*, 1984).

Z4732 - es. nat. *juv.* Mer; Eritrea, 1893-94; **43865**; coll. RMZ. Il cart. RMZ riporta: "Scioa [Etiopia], Dono del Ministero". Riportato sull'Inv. MUC al n° 2295. (Fraissinet *et al.*, 1984).

Z4733 - es. nat. Mer; Posillipo (NA), 12/02/1911; coll. Schettino, RMZ. Reca il cartellino orig. con il n. 139. (Fraissinet *et al.*, 1984).

Z4734 - es. nat. Mer; Europa, prima del 1845; **468**; coll. antica, RMZ. Reca cart. RMZ: "*Tinnunculus alaudarius*, Bp. 2er". Il reperto era riportato anche sull'Inv. MUC al n° 29 corr. in: "*Falco tinnunculus*". Il cart. 1956: "*F. t. tinnunculus*, L.".

Z6148 - es. nat.; Campania, anni '80. Milone M. e Kalby M. leg.
Z6804 - es. nat.; Campania, anni '80. Milone M. e Kalby M. leg.
Z6805 - es. nat.; Campania, anni '80. Milone M. e Kalby M. leg.
Z6806 - es. nat.; Campania, anni '80. Milone M. e Kalby M. leg.
Z698 (653) - scheletro; 1864; [1351]; *207*; coll. GAC. Il cart. GAC riportava: "*Falco tinnunculus alaudarius*, 15£". Il cart. 1956 riporta: "*F. t. tinnunculus* L.".
Z3682 - cranio; 1863; [203]; *272*; coll. O. G. Costa, GAC. Reca cart. GAC: "*Tinnunculus alaudarius* Briss.; Costa n. 68".
Z3683 - sterno; 1863; [388]; *472*; coll. O. G. Costa, GAC. Reca cart. GAC: "*Tinnunculus alaudarius* Briss.; Costa n. 393".
Z3684 - sterno; 1863; [389]; *473*; coll. O. G. Costa, GAC. Reca cart. GAC: "*T. alaudarius* Briss.; Costa n. 293. Il Cat. GAC riportava: "Costa n. 394".
Z3685 - sterno; 1865; [1516]; *474*; coll. GAC. Reca cart. GAC: "*Tinnunculus alaudarius* Briss., dono Henlhe".

Falco vespertinus Linnaeus, 1766
Falco cuculo - Red-footed Falcon
Z4735a,b - 2 es. nat. Mer; Europa, prima del 1845; **474**; coll. antica, RMZ. Il Cat. RMZ riportava: "*Erythropus* (*Tinnunculus*) *vespertinus*, Linn.". Riportato anche sull'Inv. MUC al n° 32 come "*Erythropus vespertinus*, Linn., riportato in origine come: *Falco rufipes*". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4736a - es. nat. Mer; Capodimonte (NA), 12/05/1914; coll. Schettino, RMZ. Reca il cartellino con la dic.: "*F. v.* Falco cuculo". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4736b - es. nat. Mer; Capodimonte (NA), 08/05/1914; coll. Schettino, RMZ. Reca il cartellino con la dic.: "*F. v.* Falco cuculo". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4737 - es. nat. F⊘; Bagnoli (NA), 29/04/1914; coll. Schettino, RMZ. Reca il cartellino con la dic.: "Falco cuculo, n. 359". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4738a - es. nat. Mer; Mondragone (CE), 28/04/1914; coll. Schettino, RMZ. Cart. orig.: "n. 358". Il cart. del 1956: "*F. v. vespertinus*". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4738b - es. nat. F⊘; Capodimonte (NA), 15/05/1913; coll. Schettino, RMZ. Cart. orig.: "n. 307". Il cart. del 1956: "*F. v. vespertinus*". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4739 - es. nat. F⊘; Capodimonte (NA), 03/11/1904; coll. Schettino, RMZ. Cart. del 1956: "*F .v. vespertinus* L., Falco cuculo". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4740 - es. nat. Mer; Mondragone (CE), 06/05/1912; coll. Schettino, RMZ. Cart. del 1956: "*F. v.vespertinus* L., Falco cuculo, n. 223". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4741 - es. nat. *juv.* Mer; Napoli, prima del 1845; **475**; coll. antica, RMZ. Il Cat. RMZ riportava: "*Erythropus vespertinus*, Linn., *juv.*". Riportato anche sull'Inv. MUC al n° 33 come "*Erythropus vespertinus*, Linn., riportato in origine come: *Falco rufipes*". (Fraissinet *et al.*, 1984). Un cart. MZN riporta:

"*F. v.*, semi adulto, Europa". Il cart. MUC: "Uccelli n° 33, *Erythropus v.* L. *junior*, Europa". Il cart. del 1956: "*F. v. vespertinus*, L., Falco cuculo". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4742 - es. nat. M♂. Fraissinet *et al.* (1984) riportano: "n. 134L".
Z4743 - es. nat. F♀. Fraissinet *et al.* (1984) riportano: "n. 134G".
Z4744a - es. nat. M♂; Posillipo (NA), 18/04/1911; coll. Schettino, RMZ. Cart. orig.: "n. 196". Cart. del 1956: "*F. v. vespertinus*, L.". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z4744b - es. nat. F♀; Piedimonte Matese (CE), 08/05/1914; coll. Schettino, RMZ. Cart. orig.: "Piedimonte d'Alife". Cart. del 1956: "*F. v. vespertinus*, L., Falco cuculo". (Fraissinet *et al.*, 1984).
Z6807 (87) – Diorama con 1 M♂ e 1 F♀; 1997.

4 Discussione

La collezione di Falconidi del Museo Zoologico consta di 119 reperti appartenenti a 19 specie. Ad esclusione delle due specie accidentali (Falcone di Barberia e Falco dell'Amur) sono presenti tutte le specie di Falconidi dell'avifauna italiana. Tra gli esemplari più importanti dal punto di vista storico sono degni di nota il Falcone siberiano, i Lanari, i Falchi della regina e il Falco sacro per l'ornitofauna italiana e alcuni esemplari di Falco cuculo e Gheppio per l'ornitofauna della regione Campania.
Il reperto di *F. peregrinus calidus* (Cat. MZN n° Z4793) catturato a Marina di Ravenna nel novembre del 1935 è una interessante segnalazione storica della presenza di questa sottospecie nei mesi invernali lungo il litorale adriatico. I numerosi esemplari di *F. biarmicus* provenienti dalla Puglia (Cat. MZN n° Z4758, Z4759, Z4760, Z4763, Z4765, Z4767, Z4768, Z4769, Z4770) confermano la presenza in tempi storici di questa specie in periodo migratorio autunnale e durante lo svernamento in tale regione. Attualmente è considerata per la Puglia come estivante e nidificante (Moschetti *et al.*, 1996) mentre è presunta una regolare presenza invernale (Brichetti & Fracasso, 2003). I quattro esemplari di *F. eleonorae* provenienti dalla Sardegna catturati nei mesi autunnali, rivestono particolare interesse in quanto due individui hanno piumaggio in fase chiara (Cat. MZN n° Z4755a,b) e due in fase scura (Cat. MZN n° Z4756a,b).
Il reperto di *F. cherrug* (Cat. MZN n° Z4772) catturato a Foggia nel dicembre del 1908, rappresenta una segnalazione storica di probabile svernamento di questa specie in Puglia. Attualmente è considerata migratrice irregolare (Moschetti *et al.*, 1996) mentre lo svernamento è ritenuto in tempi storici raro ma regolare per le regioni dell'Italia meridionale (Brichetti & Fracasso, 2003; Cramp & Simons, 1980). Tale reperto purtroppo non è stato rinvenuto in collezione durante questa revisione, per cui per la determinazione si fa riferimento a Fraissinet *et al.* (1984).

Per la fauna campana è interessante l'esemplare di *F. vespertinus* (Cat. MZN n° Z4739) proveniente da Capodimonte (Napoli), che rappresenta la prima di due segnalazioni di questo falconide in Campania nel mese di novembre (Scebba, 1993). Anche diversi esemplari di *F. tinnunculus* (Cat. MZN n° Z4720a,b, Z4726b,c, Z4728, Z4729, Z4731, Z4733) confermano la maggiore diffusione in passato nell'area urbana e suburbana di Napoli e in particolare nella zona tra Posillipo e Capodimonte. Attualmente si sta assistendo ad un graduale aumento della presenza di coppie riproduttive nelle stesse aree (Guglielmi *et al.*, 2003).

5 Riferimenti bibliografici

Allan, D. (1996) *Birds of Prey of Southern, Central and East Africa.* New Holland Ltd. Singapore.

Botte, V. & Maio, N. (2002) *Il Museo Zoologico*: 102-106. In: Ghiara, M. R. (ed.). *Musei delle Scienze Naturali. Immagini ed emozioni.* Electa, Napoli.

Botte, V. & Scillitani, G. (1999) *Museo di Zoologia*: 141-183. In: Fratta, A. (ed.). *I Musei scientifici dell'Università di Napoli Federico II.* Fridericiana, Napoli.

Brichetti, P. & Fracasso, G. (2003) *Ornitologia italiana. Vol. 1 – Gaviidae-Falconidae.* Alberto Perdisa, Bologna.

Brichetti, P. & Massa, B. (1998) *Check-list degli Uccelli Italiani aggiornata a tutto il 1997.* Riv. ital. Orn., Milano: 68: 129-152.

Clements, J.F. (1991) *Birds of the World: a check list.* Ibis Publishing Company, Vista (USA).

Cramp, S. & Simmons, K. E. L. (eds), (1980) *The Birds of the Western Paleartic. 2. Hawks to Bustards.* Oxford University Press, Oxford.

Fraissinet, M., Cavaliere, V., Conti, Milone M., Moschetti, G., Piciocchi S. & Scebba S., (2003) *Check-List degli uccelli della Campania aggiornata al febbraio 2003.* Regione Campania, Napoli. 23-32 pp.

Fraissinet, M., De Filippo, G. & Kalby, M. (1984) *Revisione sistematica dell'ordine dei Falconiformi (Falconiformes) della collezione dell'Istituto e Museo di Zoologia dell'Università degli Studi di Napoli.* Boll. Soc. Natur. Napoli, 93: 257-272.

Gasco, F. (1876a) *Viaggio in Egitto dei socii P. Panceri e F. Gasco nell'anno 1873-1874. Parte prima. Da Napoli a File.* Annuar. Assoc. Natural. e Medici per la mutua Istruzione, Napoli, 1876: 1-44.

Gasco, F. (1876b) *Viaggio in Egitto dei socii P. Panceri e F. Gasco nell'anno 1873-1874. Parte seconda. Ritorno da Assuan. L'oasi del Fayum. Escursioni nei dintorni del Cairo. Caccia sul Lago Menzaleh.* Annuar. Assoc. Natural. e Medici per la mutua Istruzione, Napoli, 1876: 1-146.

Géroudet, P. (1984) *Les Rapaces Diurne et Nocturnes d'Europe.* Delachaux & Niestlé, Neuchatel (Suisse).

Guglielmi, R., Balestrieri, R., Giannotti, M., Usai, A. & Greco, F. (2003) *Consistenza e densità della popolazione di Gheppio* Falco tinnunculus *nidificante a Napoli.* Atti XII Convegno Italiano di Ornitologia. Ercolano (NA), 23-27 Settembre 2003. Avocetta, 27: 55.

Maio, N. & Nappi, A. (2001a) *I Vertebrati del Museo Zoologico dell'Università di Napoli Federico II: interesse scientifico e storico delle collezioni.* Atti Convegno: "Bicentenario Real Museo Mineralogico, 1801-2001". Napoli, 4-6 aprile 2001: 101-103.
Maio, N. & Nappi, A. (2001b) *Le collezioni ornitologiche del Museo Zoologico dell'Università di Napoli Federico II: interesse storico e faunistico.* Atti XI Convegno Italiano di Ornitologia, Castiglioncello (Livorno), 26-30 settembre 2001. Avocetta, 25 (1): 154.
Maio, N., Chiacchio, D. & Nappi, A. (2003) *Gli Strigiformi del Museo Zoologico dell'Università di Napoli Federico II (Aves, Strigiformes). Catalogo della collezione con note storiche.* Rc. Acc. Sc. fis. mat. Napoli, 70 (Serie IV): 33-51.
Maio, N., Picariello, O. & Scillitani, G. (1995) *Storia e vicissitudini del Museo Zoologico dell'Università di Napoli Federico II.* Museol. sci., 12 (3-4): 189-225.
Massa, R., Bottoni, L. & Violani, C. (2000) *I nomi in lingua italiana degli uccelli di tutto il mondo.* Lybra Immagine, Milano.
Mebs, T. (1968) *I Falconidi.* In: Grzimek, B. (ed.), *Vita degli Animali. Vol. 7, Uccelli tomo 1,* pp. 434-455. Bramante, Milano.
Monroe, B. L. jr. (1993) *A World Checklist of Birds.* Yale University Press, New Haven, U.S.A.
Moschetti, G., Scebba, S. & Sigismondi, A. (1996) Check-list degli uccelli della Puglia. Alula III (1-2): 23-36.
Nappi, A. & Maio, N. (2003) *Interessanti reperti della collezione ornitologica "Mario Schettino" nel Museo Zoologico di Napoli.* Riv. Ital. Orn. Milano, 73 (1): 71-77.
Panceri, P. (1868) *Catalogo Sistematico del Gabinetto di Anatomia Comparata nella Regia Università degli Studi di Napoli.* Stamperia del Fibreno, Napoli.
Panceri, P. (1872) *Catalogo Sistematico del Gabinetto di Anatomia Comparata nella Regia Università degli Studi di Napoli. Supplemento I.* Stamperia del Fibreno, Napoli.
Panceri, P. (1878) *Catalogo Sistematico del Gabinetto di Anatomia Comparata nella Regia Università degli Studi di Napoli. Supplemento II.* Tip. dell'Accad. R. delle Sci., Napoli.
Scebba, S. (1993) *Gli uccelli della Campania.* Esselibri, Napoli.
Wells, M. G. (1998) *World bird species check-list.* Wordlist, UK.

Ringraziamenti. Si ringraziano: A. P. Ariani, V. Botte per aver permesso lo studio delle collezioni; O. Picariello per aver seguito lo svolgimento della tesi sperimentale in museologia zoologica.

Tabella I - Reperti di Falconidi riportati nel "Notamento degli Animali che si conservano nel Real Museo Zoologico raccolti da Febbraio a Decembre" del 1812.

N° es.	Nome volgare	Nome scientifico originale	Nome francese riportato da Buffon	Nome attuale
2	Cistarello	*Falco tinnunculus* Linn.	Cresserelle	Gheppio
2	Falcone reale	*Falco gentilis* Linn.	Autour des palombes	Falco pellegrino
2	Falcone reale da caccia var.	*Falco communis* Lin.	Faucon	Falco pellegrino
2	Occhiarinulo	*Falco aesalon* Linn.	Emerillon	Smeriglio

Tabella 2 - Reperti di Falconidi dispersi registrati nell'Inv. MUC.

N° prog.	Specie	Patria	Ind.	Provenienza	Data	Osservazione (nome con cui è provenuto)
23	*Hypotriorchis subbuteo* Linn.	Europa	2	Collezione antica		*Falco subbuteo*
34	*Erythropus vespertinus* Linn.	Napoli	1♂	Collezione antica		*Falco rufipes*
61	*Micrastur brachypterus* Less	Cayenne	1	Collezione antica		*Nisus brachypterus*
1600	*Tichornis cenchris* Naum.	Napoli	1♂	Cambio	1868	
1601	*Lophortyx californicus* Sharp	California	1♂	Cambio	1868	
2118	*Hypotriorchis subbuteo* Linn.	Palermo	1	Acquisto	1880	
2207	*Tichornis cenchris* Naum.	Palermo	1♂	Acquisto	1882	
2296	*Falco ardosiacus* Vieill.	Eritrea	1	Dono Ministero		

Tabella 3 - Reperti di Falconidi registrati nell'Elenco Errichelli, 23-1-1861.

Genere e Specie, Autori	Individui	Osservazione
Falco communis Lin.	1	Falco pellegrino
Falco subbuteo Lin.	5	Lodolaio
Falco tinnunculus Lin.	8	Gheppio
Falco tinnunculoides Lin.	1	Grillaio
Falco rufipes Bech.	4	Falco cuculo
Falco biarmicus? Tem.	1	Lanario
Falco concolor? Tem.	1	Falco unicolore
Milvus brachypterus Less.	1	*Micrastur* [=*Micrastur semitorquatus* (Vieillot, 1817)]
Falco Aldovrandi? Reinus	1	[=*Falco severus* Horsfield, 1821]
Falco aurantius?	2	[=*Falco rufigularis*]*s*
Caracaras (sic!) *communis* Cuv.	1	[=*Caracara plancus*]
Astur cachinnans Bechs.	1	[=*Herpetotheres cachinnans*]

Tabella 4 - Elenco dei reperti di Falconidi dispersi registrati nel Cat. RMZ. Ind. = individui.

N° prog.	Specie	Patria	Ind.	Provenienza	Data	Note
466	*Hypotriorchis subbuteo* Lin.	Europa	2	Coll. antica		
470	*Tinnunculus alaudarius (tinnunculus)* Linn.	Napoli	1	Acquisto	1872	*pullus*
472	*Tichornis cenchris* Naum.	Napoli	1♂	Cambio	1868	
476	*Erythropus vespertinus* Linn.	Napoli	1♂	Coll. antica		
489	*Naucherus* (*Tlanoides*) *furcatus* Linn.	America	1	Coll. antica		(?)
32329	*Tinnunculus alaudarius (tinnunculus)* Linn.	Sardegna	teschio	Acq. per dimostrazione	1882	Gia esistente in museo
32368	*Tinnunculus tinnunculus* Lin.	Napoli	1 *juv.*	Acq. per dimostrazione	1882	Passato nel 1914 coll. Scol. n°1017
49871	*Cerchneis* (*Tinnunculus*) *tinnunculus* Linn.	Napoli	1♂	Dono Schettino	1914	Fauna Napoletana
50072 (*46763*)	*Falco* (Smeriglio)		1	Acquisto 10£	1917	Fauna Napoletana

Tabella 5 - Reperti di Falconidi dispersi registrati nel Catalogo degli animali della Collezione Scolastica (compresi i preparati microscopici) del RMZ di Napoli.

N° prog.	Specie	Patria	Ind.	Provenienza	Data
886	*Falco neglectus* Schleg.	Agorvat	I teschio		1914
885	*Tinnunculus alaudarius* Briss.		I teschio		1914
503	*Micrastur (Accipiter) brachypterus* Less.	Cayenne	1	Coll. antica	
1016	*Falco tinnunculus* Linn.		1		1914
1018	*Falco tinnunculus* Linn.		1		1914

Tabella 6 - Falconidi dispersi riportati nel Cat. GAC (Panceri, 1868, 1872, 1878) e nell'Inv. GAC.

N° Cat.	N° Inv.	Specie	Reperto	Data	Osservazioni
169	206	*Tinnunculus cenchris* Naum.	Scheletro		
393	468	*Erythropus vespertinus* Linn.	Sterno	1863	Costa n° 298
394	470	*Erythropus vespertinus* Linn.	Sterno	1863	Costa n° 299
782	1443	*Tinnunculus alaudarius* Briss.	Tubo digerente	1863	
1718	469	*Erythropus vespertinus* Linn.	Sterno	1866	H. K.
2485		*Tinnunculus alaudarius* Briss.	Scheletro	1870	
3496		*Tinnunculus alaudarius* Briss.	Scheletro	1874	

Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli
Vol. LXXIII, (2006) pp. 509-551

L'Osservatorio Meteorologico di *S. Marcellino* - Napoli Centro: i dati dell'anno 2006

Nota di A. Mazzarella, R. Di Cristo, R.Viola

Presentata dal Socio C. Sbordone
(Adunanza del 1 dicembre 2006)

Osservatorio Meteorologico
Dipartimento di Scienze della Terra
Largo San Marcellino, 10 – 80138 NAPOLI
Università degli Studi di Napoli *Federico II*
Tel. 081.2538347 Fax 081.5522756
e-mail: adriano.mazzarella@unina.it

Indice delle sezioni

	Pag.
L'Osservatorio Meteorologico della Federico II	3
Rapporto Meteorologico per l'anno 2006	4
Legenda	5
Medie orarie	
Gennaio	6
Febbraio	7
Marzo	8
Aprile	9
Maggio	10
Giugno	11
Luglio	12
Agosto	13
Settembre	14
Ottobre	15
Novembre	16
Dicembre	17
Medie giornaliere	
Gennaio	18
Febbraio	20
Marzo	22
Aprile	24
Maggio	26
Giugno	28
Luglio	30
Agosto	32
Settembre	34
Ottobre	36
Novembre	38
Dicembre	40
Medie mensili	42

L'Osservatorio Meteorologico dell'Università di Napoli *Federico II*

La Specola Universitaria fu istituita con decreto dittatoriale di Giuseppe Garibaldi nell'ottobre 1860 e allocata nei locali universitari del cortile del Salvatore su cui si affaccia l'attuale Dipartimento di Zoologia.

Nel 1902 la Specola Universitaria prese il nome di Osservatorio Meteorologico e nel 1908, a causa dei crolli parziali dei locali della Specola, fu trasferito dal prof. Ciro Chistoni, illustre Climatologo e Preside della Facoltà di Scienze nei periodi 1918-19 e 1925-27. sul terrazzo dei locali di S. Marcellino, sede attuale del Dipartimento di Scienze della Terra, a meno di 50 m dall'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli.

I dati meteo sono attualmente rilevati da una centralina automatica sita sulla torretta dell'edificio di S. Marcellino (lat. 40°50' 48" N; long. 14°15'31" E; quota 50 m slm) che gestisce i seguenti sensori SIAP+MICROS

- temperatura dell'aria (°C);
- pressione atmosferica (hPa);
- umidità relativa (%);
- velocità del vento (m/s);
- direzione del vento (°Nord);
- precipitazione (mm);
- radiazione solare globale (W/m^2);
- radiazione UVb (W/m^2).

I dati sono acquisiti con cadenza di 10 minuti ed i valori, fatta eccezione per la pioggia che viene registrata come cumulata, sono quelli istantanei; i dati giornalieri di radiazione globale ed UVb sono mediati sull'intero arco delle 24 ore.

È possibile accedere via web alla consultazione dei dati rilevati in tempo reale all'indirizzo:

http ://www.scienzegeologiche.unina.it/meteo/meteolab.htm

RAPPORTO METEOROLOGICO DELL'ANNO 2006

Il bollettino è così organizzato:

- Una catalogazione dei dati e dei relativi grafici a livello orario, nell'arco delle 24 ore, per ogni mese, con l'indicazione dei valori estremi registrati, e a livello giornaliero e mensile, nell'arco dei 12 mesi.
- Un'analisi mensile di tutti i parametri meteo relativa all'anno in corso.
- La direzione del vento è calcolata come moda sia a scala di 10 minuti per i grafici orari che a scala giornaliera per i grafici mensili.

Dall'analisi di tutti i parametri meteo dell'anno 2006 emerge quanto segue:

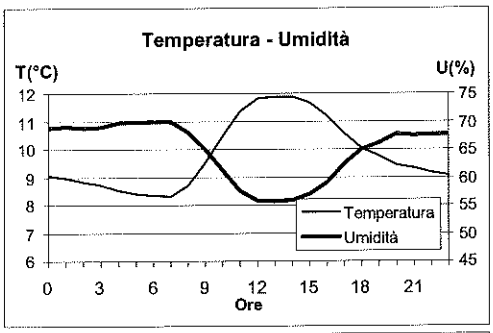
- La pressione atmosferica media mensile oscilla fra 1003.8 hPa di marzo e 1019.4 hPa di dicembre, con una media annua di 1010.3 hPa, con un massimo assoluto di 1034.5 hPa registrato il 31 dicembre alle ore 10.30 e con un minimo assoluto di 977.2 hPa registrato il 20 ottobre alle ore 12.20.
- La temperatura dell'aria media mensile oscilla fra 27.0°C di luglio ed i 9.8°C di gennaio, con una media annua di 18.0°C, con un massimo assoluto di 35.8°C registrato il 20 agosto alle ore 15.20 e con un minimo assoluto di 2.0°C registrato il 26 gennaio alle ore 6.00.
- L'umidità relativa media mensile oscilla fra 59.3% di luglio ed 72.2% di marzo, con una media annua di 66.2%, con un massimo assoluto di 94.7% registrato il 26 ottobre alle ore 2.20 e con un minimo assoluto di 12.3% registrato il 12 febbraio alle ore 16.10.
- La radiazione solare globale media mensile oscilla fra 313.2 W/m^2 di maggio e 87.7 W/m^2 di dicembre, con una media annua di 196.5 W/m^2 e con un massimo assoluto di 1081.9 W/m^2, registrato il primo giugno alle ore 12.40.
- La radiazione solare UVb media mensile oscilla fra 0.4 W/m^2 di luglio e 0.040 W/m^2 di gennaio, con una media annua di 0.210 W/m^2 e con un massimo assoluto di 2.012 W/m^2, registrato il 2 agosto alle ore 12.30.
- L'intensità media mensile del vento presenta un massimo di 2.6 m/s, registrato a febbraio ed un minimo di 1.1 m/s, registrato a novembre, con una media annua di 2.0 m/s e con la raffica più intensa di 21.0 m/s registrata il 6 marzo alle ore 7.10.
- La direzione del vento presenta una moda di 180° (da Sud) nei mesi di agosto, settembre e ottobre e una moda di 0° (da Nord) nei mesi di gennaio, febbraio e dicembre.
- La pioggia presenta un valore cumulato annuale di 847.2 mm, con un massimo mensile di 137.2 mm a settembre e con il giorno più piovoso registrato il 25 settembre con 46.2 mm.

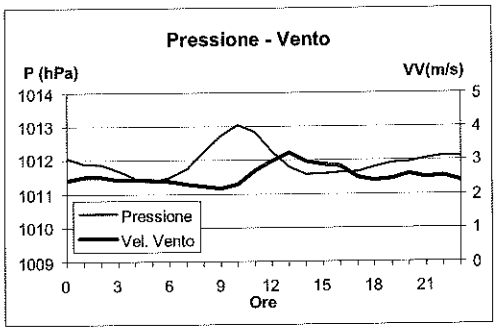
Legenda:

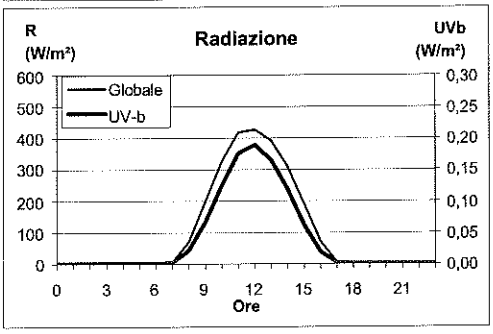
VV	= velocità del vento (m/s)
DV	= direzione di provenienza del vento (°N)
T	= temperatura (°C)
P	= pressione atmosferica (hPa)
U	= umidità relativa (%)
R	= radiazione solare totale (W/m^2)
Pg	= pioggia giornaliera (mm)
UVb	= radiazione ultravioletta (W/m^2)
Tmax	= temperatura massima (°C)
Tmin	= temperatura minima (°C)
Pmax	= pressione atmosferica massima (hPa)
Pmin	= pressione atmosferica minima (hPa)
Rmax	= radiazione solare totale massima (W/m^2)
Umax	= umidità relativa massima (%)
Umin	= umidità minima (%)
VVmax	= velocità massima del vento (m/s)
UVb max	= radiazione ultravioletta massima (W/m^2)

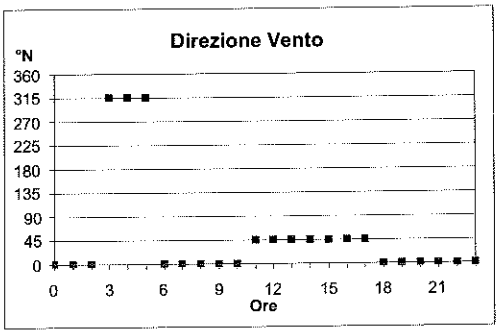
GENNAIO 2006 (medie orarie)

Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m²)	P(hPa)
0	9,1	68,8	5,3	0,0	2,4	0,001	1012,1
1	9,0	69,0	5,3	0,0	2,5	0,001	1011,9
2	8,8	68,8	5,3	0,0	2,5	0,001	1011,9
3	8,7	69,0	5,3	315,0	2,4	0,001	1011,7
4	8,5	69,8	5,3	315,0	2,4	0,001	1011,5
5	8,4	69,9	5,3	315,0	2,4	0,001	1011,4
6	8,4	70,0	5,3	0,0	2,4	0,001	1011,5
7	8,3	70,0	5,5	0,0	2,3	0,003	1011,7
8	8,7	68,1	69,8	0,0	2,2	0,021	1012,3
9	9,5	65,0	200,5	0,0	2,2	0,067	1012,7
10	10,5	61,3	325,2	0,0	2,3	0,124	1013,0
11	11,4	57,6	417,0	45,0	2,7	0,175	1012,8
12	11,8	55,8	427,0	45,0	3,0	0,189	1012,3
13	11,9	55,7	392,5	45,0	3,2	0,165	1011,8
14	11,9	55,9	310,2	45,0	3,0	0,119	1011,6
15	11,7	57,0	189,8	45,0	2,9	0,062	1011,6
16	11,2	59,1	70,3	45,0	2,8	0,019	1011,6
17	10,6	62,4	7,0	45,0	2,5	0,002	1011,6
18	10,0	65,0	5,3	0,0	2,4	0,001	1011,8
19	9,8	66,2	5,3	0,0	2,5	0,001	1011,9
20	9,4	67,8	5,4	0,0	2,6	0,001	1012,0
21	9,3	67,4	5,3	0,0	2,5	0,001	1012,0
22	9,2	67,7	5,3	0,0	2,5	0,001	1012,1
23	9,1	67,7	5,3	0,0	2,4	0,001	1012,1



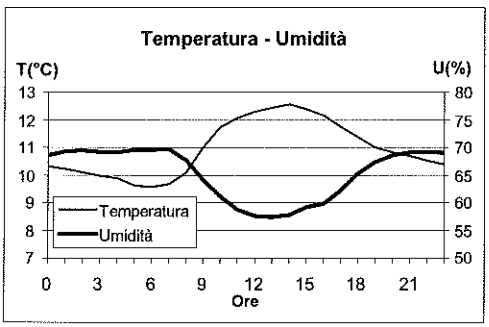


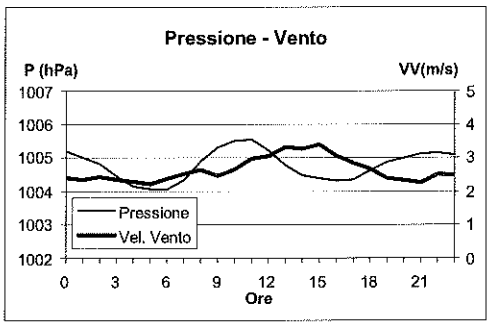


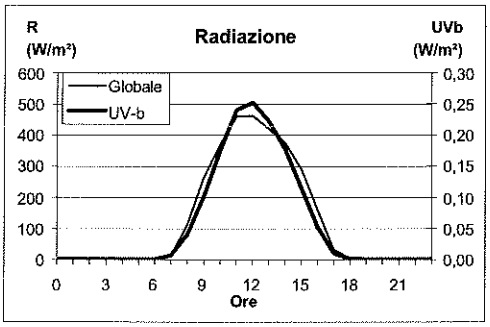


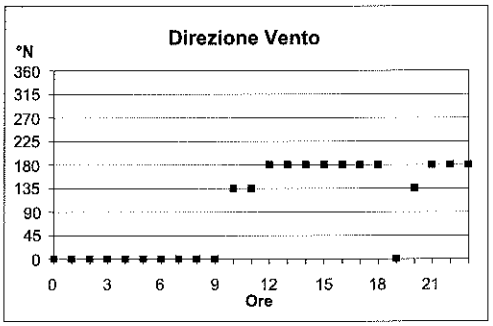
FEBBRAIO 2006 (medie orarie)

Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m²)	P(hPa)
0	10,3	68,6	5,3	0,0	2,4	0,001	1005,2
1	10,2	69,3	5,3	0,0	2,3	0,001	1005,0
2	10,1	69,5	5,3	0,0	2,4	0,001	1004,8
3	10,0	69,2	5,3	0,0	2,3	0,001	1004,5
4	9,9	69,1	5,3	0,0	2,3	0,001	1004,1
5	9,6	69,5	5,3	0,0	2,2	0,001	1004,1
6	9,6	69,5	5,3	0,0	2,4	0,001	1004,1
7	9,7	69,7	12,3	0,0	2,5	0,007	1004,3
8	10,1	67,7	112,0	0,0	2,6	0,040	1004,9
9	11,0	64,1	265,4	0,0	2,5	0,103	1005,3
10	11,7	61,1	369,5	135,0	2,7	0,176	1005,5
11	12,1	58,7	459,3	135,0	3,0	0,240	1005,6
12	12,3	57,6	461,2	180,0	3,1	0,252	1005,2
13	12,4	57,5	418,5	180,0	3,3	0,222	1004,8
14	12,6	57,8	375,3	180,0	3,3	0,177	1004,5
15	12,4	59,2	288,4	180,0	3,4	0,113	1004,4
16	12,1	59,8	159,0	180,0	3,1	0,052	1004,3
17	11,7	62,2	31,4	180,0	2,8	0,010	1004,3
18	11,4	65,3	5,3	180,0	2,7	0,001	1004,6
19	11,0	67,3	5,3	0,0	2,4	0,001	1004,9
20	10,8	68,6	5,3	135,0	2,3	0,001	1005,0
21	10,7	69,1	5,3	180,0	2,3	0,001	1005,1
22	10,5	69,2	5,3	180,0	2,5	0,001	1005,2
23	10,4	69,0	5,3	180,0	2,5	0,001	1005,1



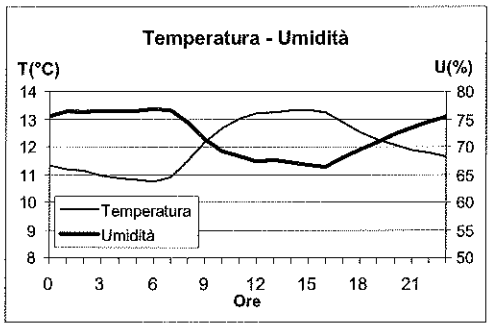


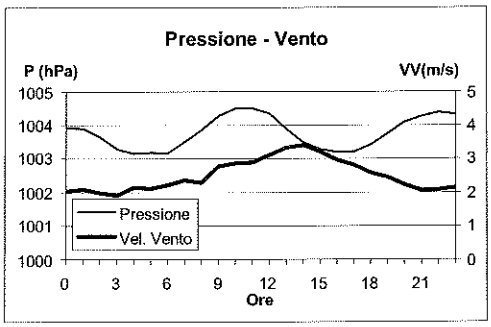


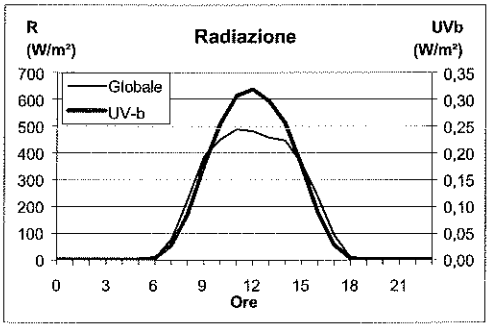


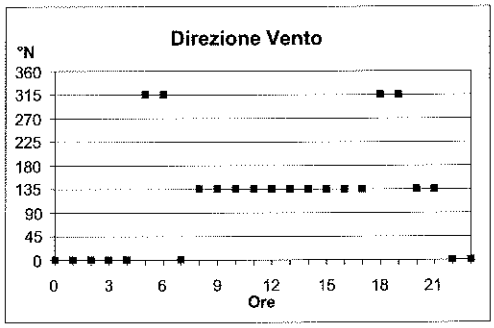
MARZO 2006 (medie orarie)

Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m²)	P(hPa)
0	11,3	75,5	5,3	0,0	2,0	0,001	1003,9
1	11,2	76,4	5,3	0,0	2,1	0,001	1003,9
2	11,1	76,3	5,3	0,0	2,0	0,001	1003,7
3	11,0	76,5	5,3	0,0	1,9	0,001	1003,3
4	10,9	76,4	5,3	0,0	2,1	0,001	1003,2
5	10,8	76,5	5,3	315,0	2,1	0,001	1003,2
6	10,7	76,9	8,1	315,0	2,2	0,004	1003,2
7	10,9	76,6	78,1	0,0	2,4	0,027	1003,5
8	11,5	74,3	224,4	135,0	2,3	0,086	1003,9
9	12,2	71,3	387,0	135,0	2,8	0,177	1004,3
10	12,7	69,2	450,9	135,0	2,9	0,255	1004,5
11	13,0	68,3	489,2	135,0	2,9	0,307	1004,5
12	13,2	67,4	480,8	135,0	3,1	0,319	1004,3
13	13,2	67,6	457,5	135,0	3,3	0,296	1003,9
14	13,3	67,1	446,4	135,0	3,4	0,257	1003,5
15	13,3	66,7	360,1	135,0	3,2	0,175	1003,3
16	13,2	66,3	235,0	135,0	3,0	0,088	1003,2
17	12,9	68,0	94,6	135,0	2,8	0,028	1003,2
18	12,5	69,5	10,2	315,0	2,6	0,004	1003,4
19	12,3	70,8	5,3	315,0	2,5	0,001	1003,8
20	12,1	72,3	5,3	135,0	2,2	0,001	1004,1
21	11,9	73,4	5,3	135,0	2,0	0,001	1004,3
22	11,8	74,5	5,3	0,0	2,1	0,001	1004,4
23	11,6	75,4	5,3	0,0	2,1	0,001	1004,3





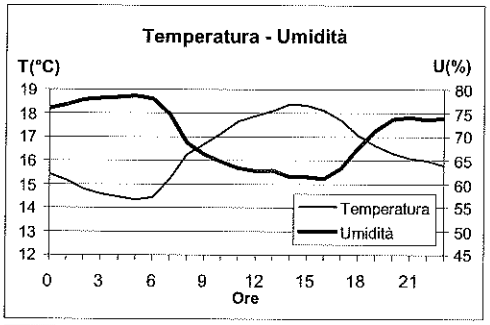


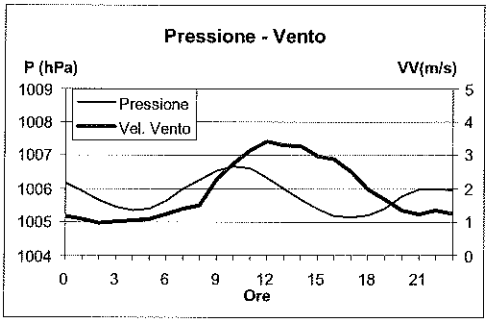


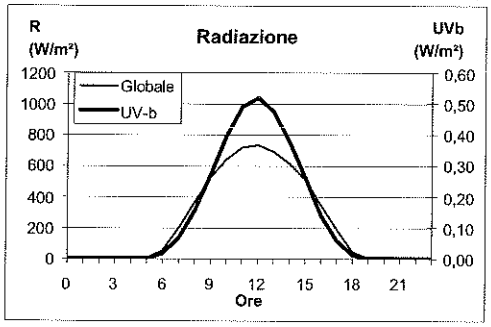
APRILE 2006

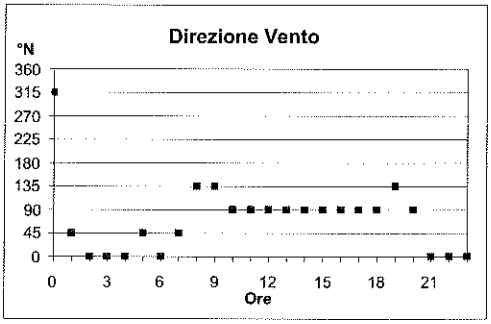
(medie orarie)

Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m²)	P(hPa)
0	15,4	76,0	5,3	315,0	1,2	0,001	1006,2
1	15,2	76,8	5,3	45,0	1,1	0,001	1005,9
2	14,8	77,9	5,3	0,0	1,0	0,001	1005,7
3	14,6	78,1	5,3	0,0	1,0	0,001	1005,5
4	14,5	78,4	5,3	0,0	1,0	0,001	1005,3
5	14,3	78,6	5,4	45,0	1,1	0,002	1005,4
6	14,4	78,0	53,8	0,0	1,2	0,018	1005,6
7	15,2	74,7	202,3	45,0	1,4	0,068	1006,0
8	16,3	68,7	364,1	135,0	1,5	0,154	1006,3
9	16,7	66,3	524,6	135,0	2,3	0,271	1006,5
10	17,1	64,7	643,6	90,0	2,7	0,397	1006,7
11	17,6	63,4	717,3	90,0	3,2	0,490	1006,6
12	17,9	62,8	733,7	90,0	3,4	0,519	1006,3
13	18,1	62,8	690,1	90,0	3,3	0,472	1006,0
14	18,4	61,5	613,9	90,0	3,3	0,378	1005,7
15	18,3	61,6	509,5	90,0	3,0	0,261	1005,4
16	18,1	61,1	346,7	90,0	2,9	0,140	1005,2
17	17,7	63,2	187,6	90,0	2,5	0,059	1005,1
18	17,1	67,5	46,5	90,0	2,0	0,012	1005,2
19	16,6	71,2	5,4	135,0	1,7	0,001	1005,4
20	16,3	73,7	5,3	90,0	1,3	0,001	1005,8
21	16,1	74,1	5,3	0,0	1,2	0,001	1006,0
22	16,0	73,6	5,3	0,0	1,3	0,001	1006,0
23	15,8	73,9	5,3	0,0	1,2	0,001	1006,0



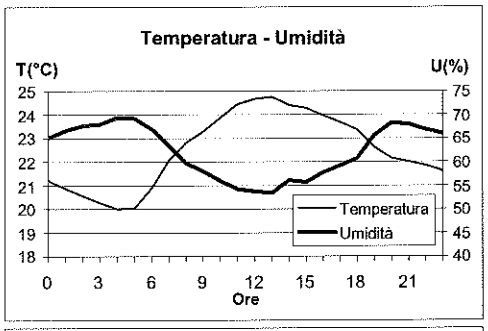


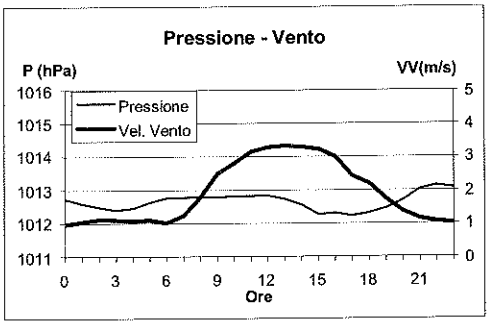


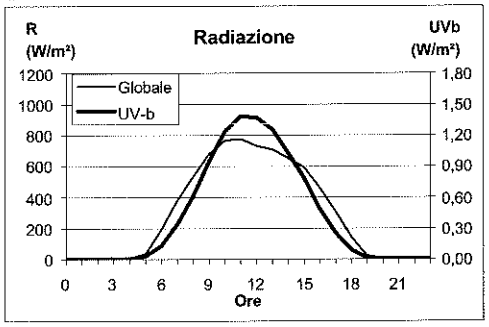


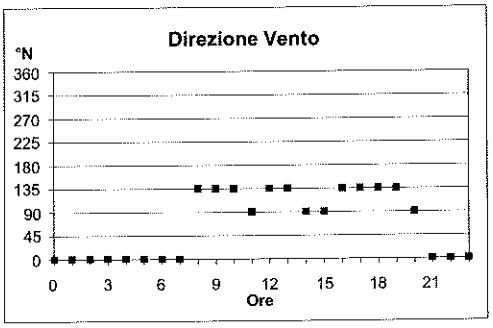
GIUGNO 2006 (medie orarie)

Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m²)	P(hPa)
0	21,2	65,1	5,3	0,0	1,0	0,003	1012,7
1	20,9	66,6	5,3	0,0	1,0	0,003	1012,6
2	20,6	67,7	5,3	0,0	1,1	0,003	1012,5
3	20,3	68,0	5,3	0,0	1,1	0,003	1012,4
4	20,0	69,5	5,3	0,0	1,1	0,004	1012,4
5	20,0	69,2	36,2	0,0	1,1	0,032	1012,6
6	20,9	66,9	191,8	0,0	1,0	0,134	1012,8
7	22,1	63,5	381,5	0,0	1,2	0,340	1012,8
8	22,8	59,7	532,7	135,0	1,8	0,611	1012,8
9	23,3	58,1	679,5	135,0	2,5	0,948	1012,8
10	23,9	56,0	765,2	135,0	2,8	1,240	1012,8
11	24,4	54,3	773,4	90,0	3,2	1,385	1012,8
12	24,7	53,7	731,4	135,0	3,3	1,369	1012,8
13	24,7	53,4	710,0	135,0	3,3	1,255	1012,7
14	24,4	56,1	651,3	90,0	3,3	1,030	1012,5
15	24,3	55,7	592,4	90,0	3,2	0,782	1012,3
16	24,0	57,8	461,0	135,0	3,0	0,489	1012,3
17	23,7	59,2	304,0	135,0	2,4	0,249	1012,2
18	23,4	60,7	140,6	135,0	2,2	0,089	1012,3
19	22,6	65,6	20,7	135,0	1,7	0,016	1012,5
20	22,2	68,3	5,3	90,0	1,4	0,003	1012,7
21	22,0	67,9	5,3	0,0	1,1	0,003	1013,0
22	21,8	66,8	5,3	0,0	1,1	0,003	1013,1
23	21,6	66,0	5,3	0,0	1,0	0,003	1013,1





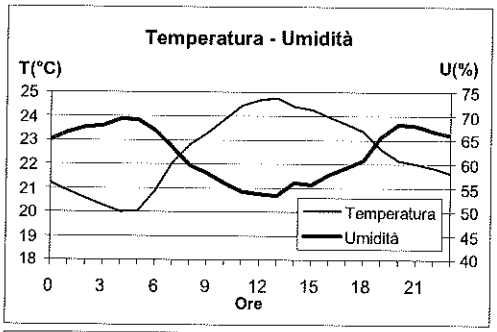


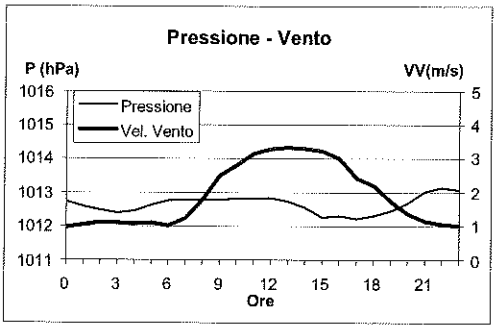


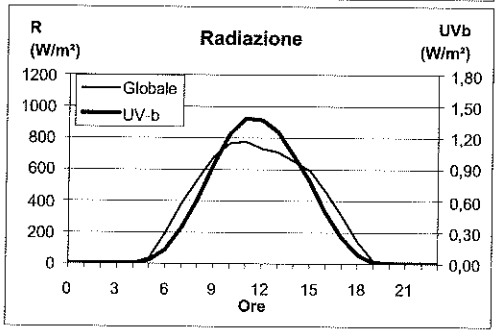
GIUGNO 2006

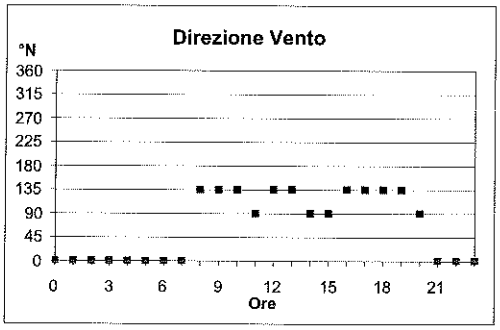
(medie orarie)

Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m²)	P(hPa)
0	21,2	65,1	5,3	0,0	1,0	0,003	1012,7
1	20,9	66,6	5,3	0,0	1,0	0,003	1012,6
2	20,6	67,7	5,3	0,0	1,1	0,003	1012,5
3	20,3	68,0	5,3	0,0	1,1	0,003	1012,4
4	20,0	69,5	5,3	0,0	1,1	0,004	1012,4
5	20,0	69,2	36,2	0,0	1,1	0,032	1012,6
6	20,9	66,9	191,8	0,0	1,0	0,134	1012,8
7	22,1	63,5	381,5	0,0	1,2	0,340	1012,8
8	22,8	59,7	532,7	135,0	1,8	0,611	1012,8
9	23,3	58,1	679,5	135,0	2,5	0,948	1012,8
10	23,9	56,0	765,2	135,0	2,8	1,240	1012,8
11	24,4	54,3	773,4	90,0	3,2	1,385	1012,8
12	24,7	53,7	731,4	135,0	3,3	1,369	1012,8
13	24,7	53,4	710,0	135,0	3,3	1,255	1012,7
14	24,4	56,1	651,3	90,0	3,3	1,030	1012,5
15	24,3	55,7	592,4	90,0	3,2	0,782	1012,3
16	24,0	57,8	461,0	135,0	3,0	0,489	1012,3
17	23,7	59,2	304,0	135,0	2,4	0,249	1012,2
18	23,4	60,7	140,6	135,0	2,2	0,089	1012,3
19	22,6	65,6	20,7	135,0	1,7	0,016	1012,5
20	22,2	68,3	5,3	90,0	1,4	0,003	1012,7
21	22,0	67,9	5,3	0,0	1,1	0,003	1013,0
22	21,8	66,8	5,3	0,0	1,1	0,003	1013,1
23	21,6	66,0	5,3	0,0	1,0	0,003	1013,1



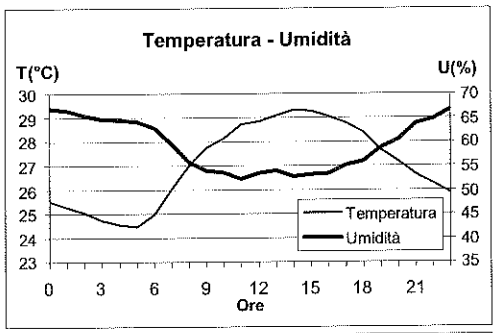


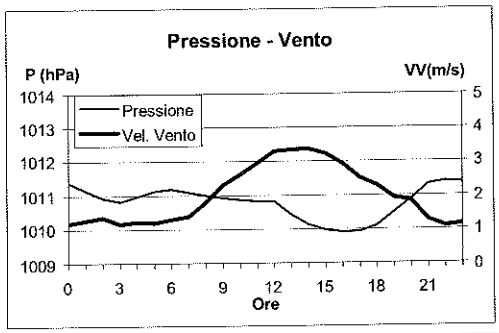


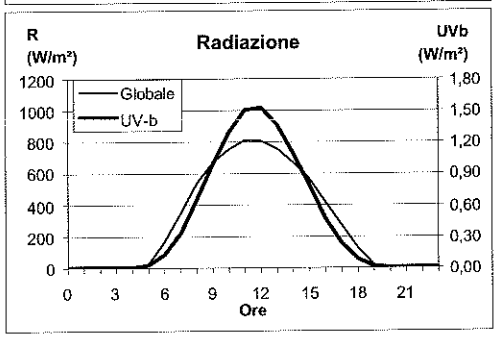


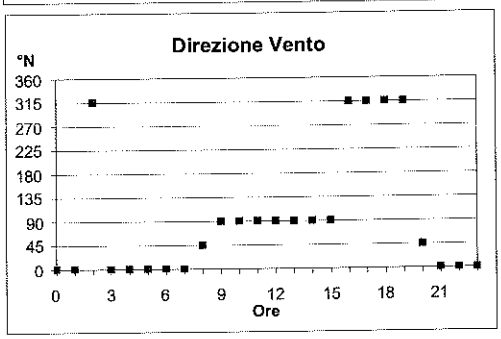
LUGLIO 2006 (medie orarie)

Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m²)	P(hPa)
0	25,5	66,9	5,3	0,0	1,2	0,003	1011,4
1	25,3	66,5	5,3	0,0	1,3	0,003	1011,1
2	25,0	65,5	5,3	315,0	1,3	0,003	1010,9
3	24,7	64,8	5,3	0,0	1,2	0,003	1010,8
4	24,6	64,5	5,3	0,0	1,2	0,004	1011,0
5	24,5	64,2	24,9	0,0	1,2	0,027	1011,1
6	25,0	62,9	168,0	0,0	1,3	0,128	1011,2
7	26,0	59,5	351,0	0,0	1,4	0,331	1011,1
8	27,0	55,8	535,3	45,0	1,8	0,646	1011,0
9	27,7	54,0	671,9	90,0	2,3	0,991	1010,9
10	28,1	53,6	754,1	90,0	2,6	1,288	1010,9
11	28,7	52,2	809,8	90,0	2,9	1,501	1010,8
12	28,8	53,5	806,9	90,0	3,3	1,526	1010,8
13	29,1	54,0	757,0	90,0	3,3	1,360	1010,4
14	29,3	52,7	666,1	90,0	3,4	1,091	1010,1
15	29,3	53,2	563,0	90,0	3,2	0,783	1010,0
16	29,1	53,3	414,9	315,0	2,9	0,469	1009,9
17	28,8	55,1	267,7	315,0	2,5	0,233	1009,9
18	28,4	55,9	126,9	315,0	2,3	0,083	1010,1
19	27,7	58,7	18,4	315,0	1,9	0,014	1010,5
20	27,2	60,5	5,3	45,0	1,8	0,003	1010,9
21	26,6	63,8	5,4	0,0	1,3	0,003	1011,3
22	26,3	64,7	5,3	0,0	1,1	0,003	1011,4
23	25,9	66,7	5,3	0,0	1,2	0,003	1011,4





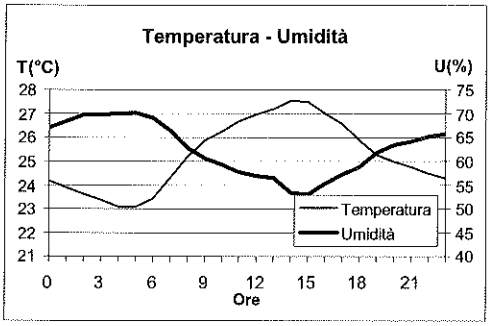


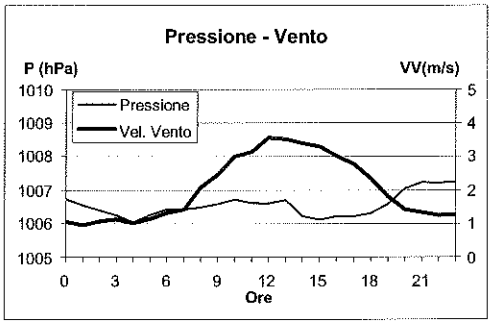


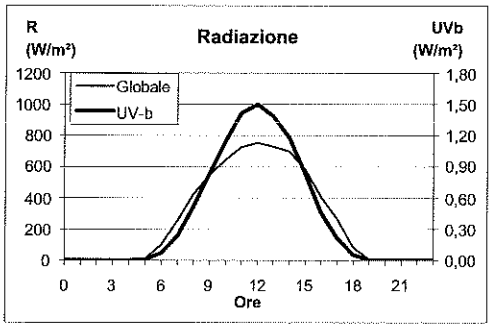
AGOSTO 2006

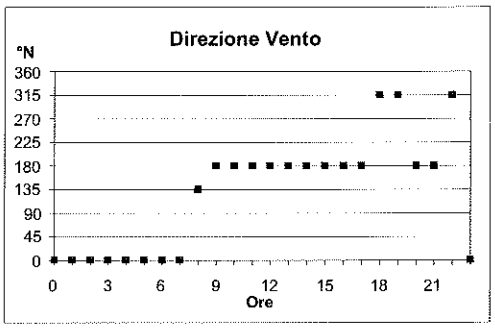
(medie orarie)

Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m²)	P(hPa)
0	24,2	67,0	5,4	0,0	1,1	0,001	1006,7
1	23,9	68,4	5,3	0,0	0,9	0,001	1006,5
2	23,6	69,7	5,3	0,0	1,1	0,001	1006,4
3	23,4	69,7	5,3	0,0	1,1	0,001	1006,2
4	23,1	70,0	5,3	0,0	1,0	0,001	1006,0
5	23,1	70,2	8,6	0,0	1,1	0,008	1006,3
6	23,4	69,2	100,1	0,0	1,3	0,072	1006,4
7	24,3	66,5	254,9	0,0	1,4	0,235	1006,4
8	25,2	62,9	423,3	135,0	2,1	0,513	1006,5
9	25,9	60,7	546,5	180,0	2,5	0,834	1006,6
10	26,2	59,3	646,5	180,0	3,0	1,150	1006,7
11	26,7	57,8	723,6	180,0	3,1	1,416	1006,6
12	27,0	56,9	751,2	180,0	3,6	1,496	1006,6
13	27,2	56,5	728,4	180,0	3,5	1,385	1006,7
14	27,6	53,4	694,9	180,0	3,4	1,178	1006,2
15	27,5	53,0	578,4	180,0	3,3	0,825	1006,1
16	27,0	55,2	405,4	180,0	3,0	0,458	1006,2
17	26,6	57,2	265,0	180,0	2,8	0,211	1006,2
18	25,9	58,8	81,0	315,0	2,3	0,054	1006,3
19	25,3	61,8	6,4	315,0	1,8	0,004	1006,6
20	25,0	63,5	5,3	180,0	1,4	0,001	1007,0
21	24,7	64,1	5,3	180,0	1,3	0,001	1007,2
22	24,5	65,2	5,3	315,0	1,3	0,001	1007,2
23	24,3	65,7	5,3	0,0	1,3	0,001	1007,2



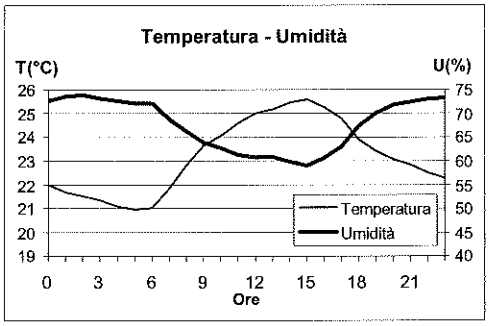


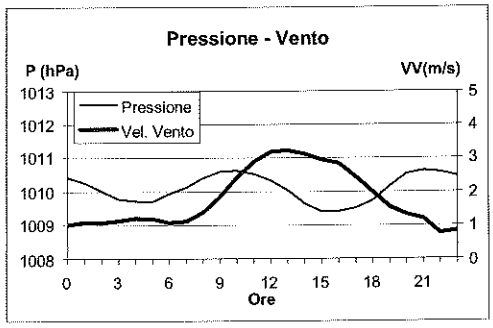


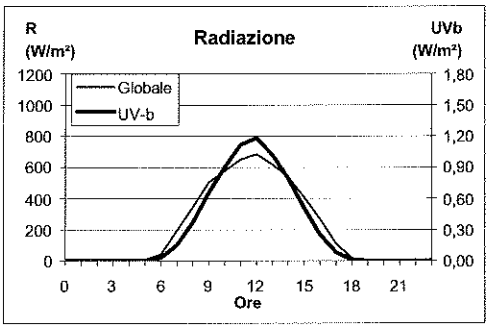


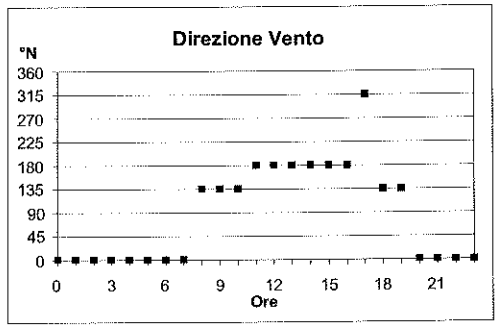
SETTEMBRE 2006 (medie orarie)

Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m²)	P(hPa)
0	22,0	72,6	5,3	0,0	1,0	0,000	1010,4
1	21,7	73,6	5,3	0,0	1,1	0,000	1010,3
2	21,5	73,9	5,3	0,0	1,1	0,000	1010,0
3	21,4	73,1	5,3	0,0	1,1	0,000	1009,8
4	21,1	72,6	5,3	0,0	1,2	0,000	1009,7
5	21,0	72,1	5,3	0,0	1,2	0,001	1009,7
6	21,0	72,1	40,2	0,0	1,1	0,030	1009,9
7	21,8	68,7	196,0	0,0	1,1	0,150	1010,1
8	22,8	66,2	343,9	135,0	1,4	0,369	1010,4
9	23,6	63,9	502,5	135,0	1,8	0,655	1010,6
10	24,1	62,7	577,7	135,0	2,4	0,899	1010,6
11	24,6	61,3	650,4	180,0	2,9	1,113	1010,5
12	25,0	60,7	684,7	180,0	3,2	1,180	1010,3
13	25,2	60,8	616,3	180,0	3,2	1,019	1010,0
14	25,5	59,8	538,1	180,0	3,1	0,793	1009,6
15	25,6	59,0	407,4	180,0	2,9	0,505	1009,4
16	25,3	60,6	268,5	180,0	2,8	0,257	1009,4
17	24,8	63,1	110,8	315,0	2,4	0,079	1009,5
18	23,9	67,3	14,3	135,0	2,0	0,009	1009,7
19	23,4	70,1	5,3	135,0	1,5	0,000	1010,2
20	23,1	71,8	5,3	0,0	1,3	0,000	1010,5
21	22,8	72,4	5,6	0,0	1,2	0,000	1010,6
22	22,5	73,0	5,4	0,0	0,8	0,000	1010,6
23	22,3	73,3	5,3	0,0	0,8	0,000	1010,5





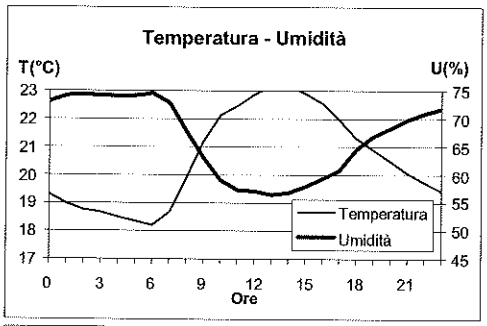


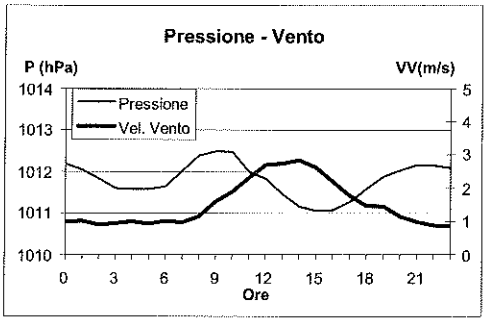


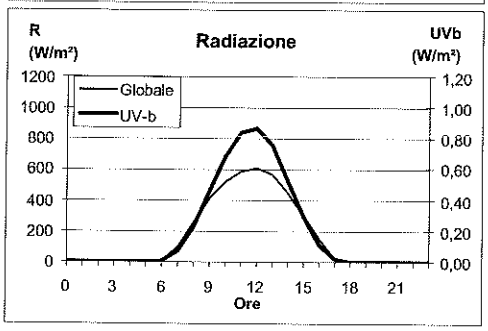
OTTOBRE 2006

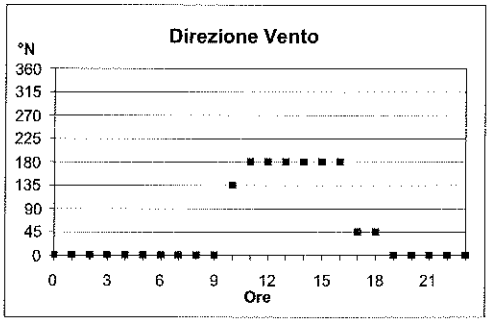
(medie orarie)

Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m²)	P(hPa)
0	19,3	73,1	5,3	0,0	1,0	0,000	1012,2
1	19,0	74,2	5,3	0,0	1,0	0,000	1012,0
2	18,8	74,3	5,3	0,0	0,9	0,000	1011,8
3	18,7	74,2	5,3	0,0	0,9	0,000	1011,6
4	18,5	74,1	5,3	0,0	1,0	0,000	1011,6
5	18,3	74,1	5,3	0,0	0,9	0,000	1011,6
6	18,2	74,5	6,8	0,0	1,0	0,007	1011,6
7	18,7	72,9	98,9	0,0	1,0	0,073	1012,0
8	19,9	67,8	256,5	0,0	1,1	0,226	1012,4
9	21,2	63,0	417,1	0,0	1,6	0,462	1012,5
10	22,1	59,1	520,6	135,0	1,9	0,682	1012,5
11	22,5	57,3	584,8	180,0	2,3	0,838	1012,0
12	22,9	57,1	606,9	180,0	2,7	0,866	1011,8
13	23,2	56,4	566,2	180,0	2,7	0,756	1011,5
14	23,2	56,8	445,8	180,0	2,8	0,525	1011,2
15	22,9	57,9	299,8	180,0	2,6	0,292	1011,1
16	22,5	59,3	151,4	180,0	2,2	0,111	1011,1
17	22,0	60,8	20,1	45,0	1,8	0,018	1011,3
18	21,3	64,5	5,3	45,0	1,5	0,000	1011,6
19	20,9	66,8	5,3	0,0	1,4	0,000	1011,9
20	20,5	68,3	5,3	0,0	1,1	0,000	1012,0
21	20,0	69,8	5,3	0,0	1,0	0,000	1012,2
22	19,7	70,9	5,3	0,0	0,9	0,000	1012,1
23	19,4	71,8	5,3	0,0	0,8	0,000	1012,1



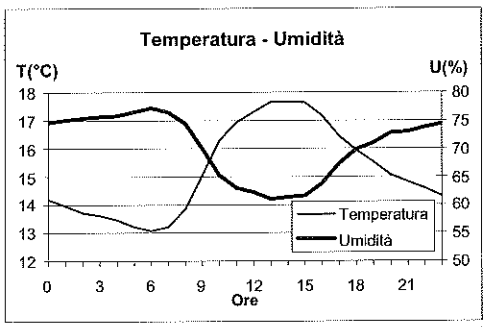


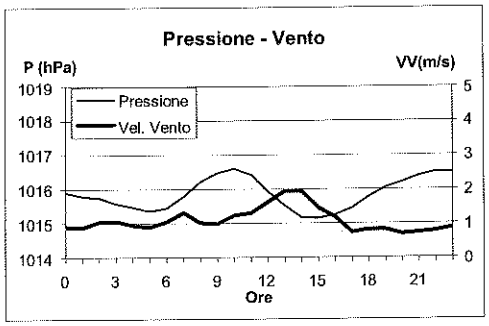


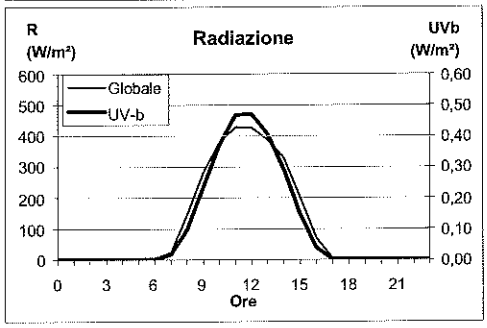


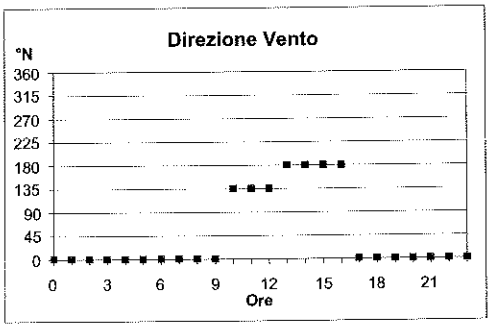
NOVEMBRE 2006 (medie orarie)

Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m²)	P(hPa)
0	14,2	74,6	5,3	0,0	0,9	0,000	1015,9
1	14,0	75,0	5,3	0,0	0,9	0,000	1015,8
2	13,7	75,4	5,3	0,0	1,0	0,000	1015,7
3	13,6	75,6	5,3	0,0	1,1	0,000	1015,6
4	13,5	75,8	5,3	0,0	0,9	0,000	1015,5
5	13,2	76,5	5,3	0,0	0,9	0,000	1015,4
6	13,1	77,2	5,3	0,0	1,0	0,000	1015,4
7	13,2	76,5	23,7	0,0	1,3	0,018	1015,8
8	13,8	74,4	143,6	0,0	1,0	0,096	1016,2
9	15,1	70,1	281,2	0,0	1,0	0,234	1016,5
10	16,3	65,3	378,1	135,0	1,2	0,371	1016,6
11	16,9	63,0	428,6	135,0	1,3	0,467	1016,4
12	17,3	62,3	426,1	135,0	1,6	0,471	1015,9
13	17,6	61,0	386,7	180,0	1,9	0,406	1015,5
14	17,7	61,3	328,6	180,0	1,9	0,293	1015,2
15	17,6	61,6	199,4	180,0	1,4	0,145	1015,1
16	17,2	63,8	69,1	180,0	1,2	0,038	1015,2
17	16,4	67,4	5,4	0,0	0,7	0,002	1015,4
18	15,9	69,9	5,3	0,0	0,8	0,000	1015,8
19	15,5	71,0	5,3	0,0	0,8	0,000	1016,0
20	15,0	72,8	5,3	0,0	0,7	0,000	1016,2
21	14,8	73,0	5,3	0,0	0,7	0,000	1016,4
22	14,6	73,7	5,3	0,0	0,8	0,000	1016,5
23	14,3	74,4	5,3	0,0	0,9	0,000	1016,5



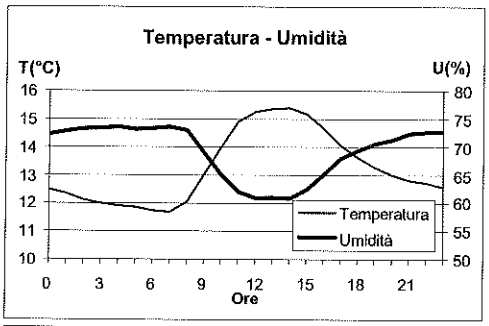


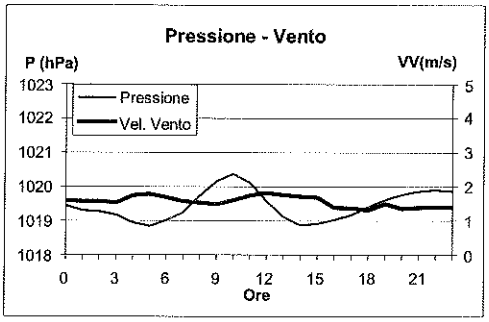


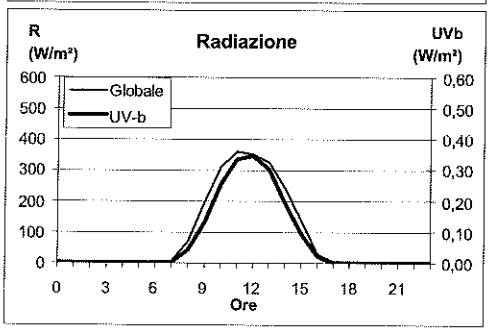


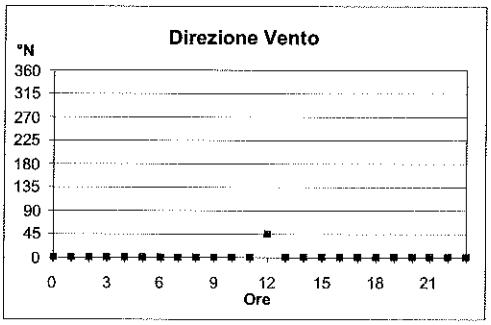
DICEMBRE 2006 (medie orarie)

Ora	T(°C)	U(%)	R (W/m²)	DV(°N)	VV(m/s)	UVb (W/m²)	P(hPa)
0	12,5	72,3	5,3	0,0	1,6	0,000	1019,4
1	12,3	72,8	5,3	0,0	1,6	0,000	1019,3
2	12,1	73,3	5,3	0,0	1,6	0,000	1019,3
3	12,0	73,3	5,3	0,0	1,5	0,000	1019,2
4	11,9	73,5	5,3	0,0	1,8	0,000	1018,9
5	11,9	73,2	5,3	0,0	1,8	0,000	1018,8
6	11,7	73,3	5,3	0,0	1,7	0,000	1019,0
7	11,7	73,6	5,6	0,0	1,6	0,004	1019,2
8	12,0	73,0	69,8	0,0	1,5	0,043	1019,7
9	13,0	69,0	196,4	0,0	1,5	0,133	1020,2
10	14,0	65,1	310,4	0,0	1,6	0,256	1020,4
11	14,9	62,1	360,0	0,0	1,7	0,335	1020,1
12	15,3	61,0	350,4	45,0	1,8	0,347	1019,6
13	15,4	61,0	326,6	0,0	1,8	0,302	1019,1
14	15,4	60,8	242,9	0,0	1,7	0,194	1018,9
15	15,2	62,4	137,1	0,0	1,7	0,092	1018,9
16	14,7	65,1	30,1	0,0	1,4	0,022	1019,0
17	14,1	67,9	5,3	0,0	1,4	0,000	1019,2
18	13,6	69,3	5,3	0,0	1,3	0,000	1019,4
19	13,3	70,5	5,3	0,0	1,5	0,000	1019,6
20	13,0	71,2	5,3	0,0	1,4	0,000	1019,8
21	12,8	72,4	5,3	0,0	1,4	0,000	1019,9
22	12,7	72,6	5,3	0,0	1,4	0,000	1019,9
23	12,6	72,7	5,3	0,0	1,4	0,000	1019,9







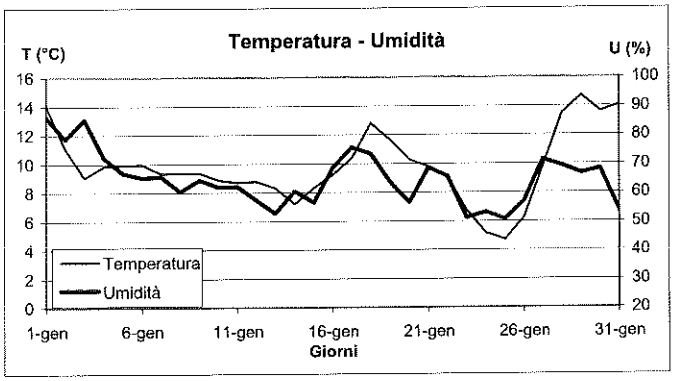


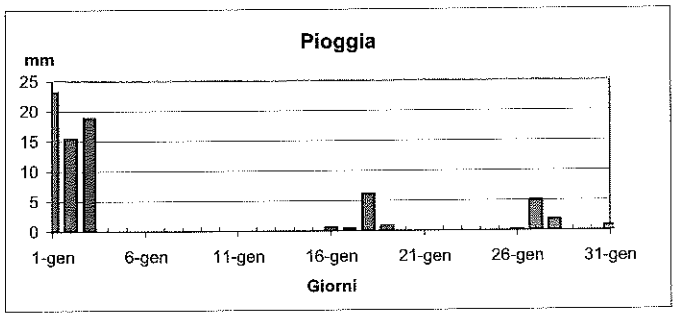
GENNAIO 2006 (medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	T_{min} (°C)	T_{max} (°C)	U_{min} (%)	U_{max} (%)
1/1/06	14,1	86,3	23,2	10,9	14,8	77,8	92,4
2/1/06	11,1	78,5	15,4	8,6	13,7	67,0	88,9
3/1/06	9,0	85,3	18,8	7,5	11,1	69,7	90,8
4/1/06	9,8	72,2	0,0	8,3	12,8	60,1	81,3
5/1/06	9,9	66,8	0,0	8,3	12,7	54,3	74,3
6/1/06	9,9	65,2	0,0	7,8	13,7	48,0	74,2
7/1/06	9,3	65,6	0,0	6,5	13,7	49,1	76,3
8/1/06	9,4	60,4	0,0	7,3	13,3	43,1	69,8
9/1/06	9,4	64,4	0,0	7,8	12,7	50,7	71,9
10/1/06	8,9	61,9	0,0	6,8	11,7	48,2	72,8
11/1/06	8,7	62,1	0,0	7,6	10,2	53,0	68,8
12/1/06	8,8	57,5	0,0	7,3	11,2	46,9	66,8
13/1/06	8,3	52,8	0,0	6,1	10,4	44,4	61,1
14/1/06	7,2	60,5	0,0	4,9	10,6	47,8	67,3
15/1/06	8,3	56,5	0,0	6,7	11,3	42,7	69,7
16/1/06	9,2	68,6	0,6	6,6	13,0	51,5	83,3
17/1/06	10,4	75,6	0,4	6,4	13,1	60,8	83,2
18/1/06	12,8	73,4	6,2	11,4	13,6	62,6	87,1
19/1/06	11,6	63,6	0,8	9,3	13,6	39,2	88,6
20/1/06	10,3	56,5	0,0	7,5	14,1	35,7	68,9
21/1/06	9,8	68,5	0,0	7,6	13,1	54,9	78,3
22/1/06	9,1	65,6	0,0	6,0	12,5	47,3	79,9
23/1/06	6,8	51,2	0,0	4,9	9,5	39,3	60,3
24/1/06	5,1	53,0	0,0	3,9	7,3	44,7	61,1
25/1/06	4,7	50,7	0,0	3,3	7,0	40,6	57,7
26/1/06	6,2	56,9	0,2	2,0	9,1	48,3	71,4
27/1/06	9,8	71,3	5,0	6,9	12,4	55,1	83,9
28/1/06	13,4	69,2	1,8	10,5	15,8	57,1	82,9
29/1/06	14,7	66,5	0,0	13,0	17,7	51,8	76,4
30/1/06	13,6	68,1	0,0	12,8	15,0	62,0	72,6
31/1/06	14,1	53,7	0,8	11,7	18,0	36,5	71,3

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI

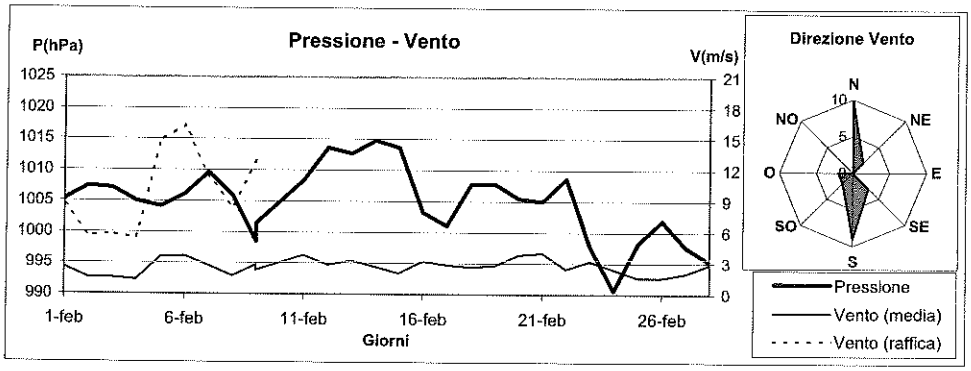
Temperatura
Min: 2.0°C il 26/1 alle ore 6.00
Max: 18.0°C il 31/1 alle ore 14.20
Umidità
Min: 35.7% il 20/1 alle ore 15.40
Max: 92.4% il 1/1 alle ore 0.00
Pressione
Min: 988.7 hPa il 1/1 alle ore 21.00
Max: 1022.3 hPa il 13/1 alle ore 9.30
Velocità del vento
Max: 18.3 m/s il 2/1 alle ore 20.40
Radiazione totale
Max: 699 W/m² il 21/1 alle ore 12.50
Radiazione UV-b
Max: 0.350 W/m² il 29/1 alle ore 12.50

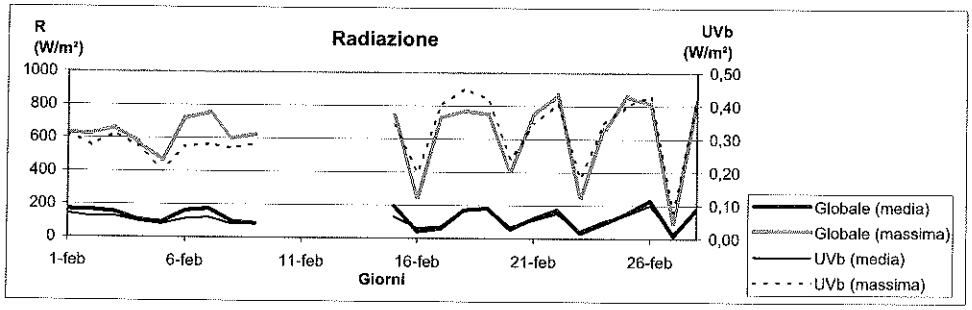




FEBBRAIO 2006 (medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	P_{min} (hPa)	P_{max} (hPa)	VV_{max}(m/s)	R_{max}(W/m²)	UVb_{max}(W/m²)
1/2/06	1005,3	0,0	2,6	166,4	0,070	1004,0	1007,1	8,6	629,0	0,313
2/2/06	1007,4	180,0	1,6	165,9	0,062	1006,4	1008,4	5,6	624,8	0,277
3/2/06	1007,1	135,0	1,5	153,5	0,064	1005,8	1008,9	5,8	663,1	0,313
4/2/06	1005,0	0,0	1,4	107,3	0,048	1003,9	1006,4	5,4	572,3	0,274
5/2/06	1004,1	45,0	3,6	91,6	0,040	1002,8	1005,2	14,9	467,7	0,201
6/2/06	1006,1	45,0	3,7	162,3	0,055	1004,0	1008,9	16,3	718,3	0,273
7/2/06	1009,6	0,0	2,7	174,8	0,061	1008,3	1011,6	11,3	752,4	0,281
8/2/06	1005,9	180,0	1,7	95,7	0,040	1001,5	1008,9	8,4	596,7	0,269
9/2/06	998,5	225,0	2,8	85,9	0,046	996,7	1001,5	12,8	624,2	0,284
10/2/06	1001,4	0,0	2,3			998,8	1005,1			
11/2/06	1008,4	0,0	3,8			1005,2	1012,7			
12/2/06	1013,6	0,0	2,8			1012,6	1015,1			
13/2/06	1012,7	0,0	3,2			1011,5	1014,1			
14/2/06	1014,8	0,0	2,6			1013,5	1016,2			
15/2/06	1013,6	180,0	2,0	193,4	0,065	1009,5	1015,7		739,2	0,341
16/2/06	1003,1	225,0	3,2	41,4	0,031	999,1	1009,6		244,3	0,199
17/2/06	1001,1	180,0	2,8	59,6	0,036	997,9	1006,5		727,9	0,403
18/2/06	1007,7	180,0	2,6	171,2	0,089	1006,4	1009,3		771,2	0,452
19/2/06	1007,8	180,0	2,8	183,1	0,090	1007,0	1008,9		749,4	0,421
20/2/06	1005,5	180,0	3,8	57,0	0,036	1004,4	1007,1		405,6	0,239
21/2/06	1005,0	135,0	4,0	120,2	0,055	1002,3	1007,7		745,0	0,345
22/2/06	1008,7	180,0	2,5	173,5	0,075	1006,4	1010,2		871,1	0,408
23/2/06	997,7	0,0	3,2	31,6	0,024	990,0	1006,4		247,3	0,182
24/2/06	990,7	0,0	2,4	89,8	0,053	987,5	996,0		662,1	0,349
25/2/06	998,2	180,0	1,6	152,4	0,072	996,0	999,9		856,4	0,403
26/2/06	1001,9	270,0	1,6	228,7	0,099	999,7	1003,9		811,4	0,431
27/2/06	997,6	135,0	2,0	18,6	0,016	993,6	1002,7		93,3	0,081
28/2/06	995,2	270,0	2,9	179,8	0,083	990,6	1000,6		827,1	0,420



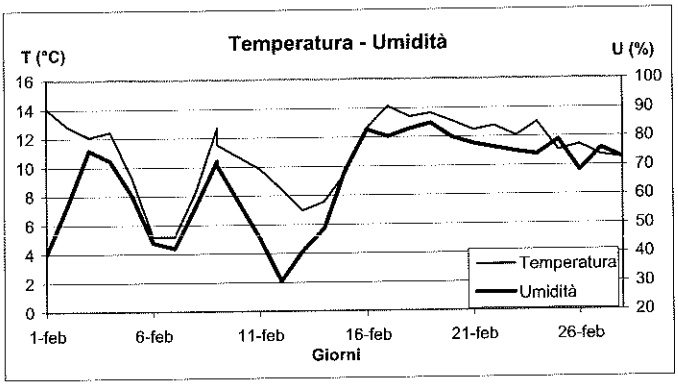


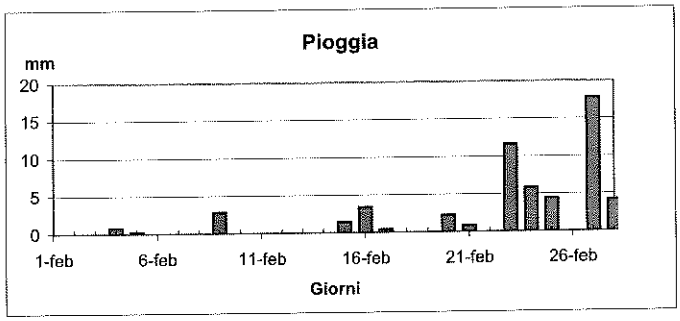
FEBBRAIO 2006 **(medie giornaliere)**

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)
1/2/06	14,0	39,8	0,0	10,8	19,2	24,0	56,0
2/2/06	12,8	56,8	0,0	9,2	15,9	36,1	83,2
3/2/06	12,1	75,9	0,0	9,7	14,1	68,4	84,3
4/2/06	12,4	72,1	0,8	10,9	14,6	51,4	85,0
5/2/06	9,3	60,2	0,2	5,7	11,6	45,2	85,5
6/2/06	5,2	43,8	0,0	3,3	7,8	26,7	53,6
7/2/06	5,2	42,0	0,0	2,7	8,3	31,3	51,0
8/2/06	8,3	56,3	0,0	3,4	12,1	35,4	76,8
9/2/06	12,6	72,0	2,2	11,4	15,0	53,3	82,4
10/2/06	11,5	70,4	2,8	9,4	14,7	49,3	91,3
11/2/06	9,8	45,3	0,0	7,7	12,4	26,3	61,3
12/2/06	8,4	30,4	0,0	6,5	11,2	12,3	49,3
13/2/06	6,9	40,8	0,0	4,0	9,1	28,0	57,0
14/2/06	7,5	48,5	0,0	4,3	11,7	30,0	63,0
15/2/06	9,5	68,5	1,4	6,7	12,4	55,0	84,2
16/2/06	12,6	82,7	3,4	11,2	13,6	72,4	91,7
17/2/06	14,1	80,3	0,4	12,5	16,0	54,3	93,6
18/2/06	13,4	82,8	0,0	12,0	14,9	65,3	90,0
19/2/06	13,6	84,7	0,0	13,0	15,0	77,2	90,9
20/2/06	13,1	79,8	2,2	11,9	14,3	74,1	85,1
21/2/06	12,5	77,6	0,8	11,3	13,5	69,4	85,5
22/2/06	12,7	76,1	0,0	9,7	14,2	69,0	82,3
23/2/06	12,0	74,7	11,6	10,6	14,0	60,9	87,1
24/2/06	13,0	73,7	5,8	10,6	15,6	59,4	88,3
25/2/06	11,0	78,8	4,4	9,4	13,7	63,9	89,7
26/2/06	11,4	68,1	0,0	8,6	13,7	47,8	87,8
27/2/06	10,7	75,9	17,8	9,4	11,9	57,8	91,0
28/2/06	10,5	72,6	4,2	8,1	13,4	54,7	89,7

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI

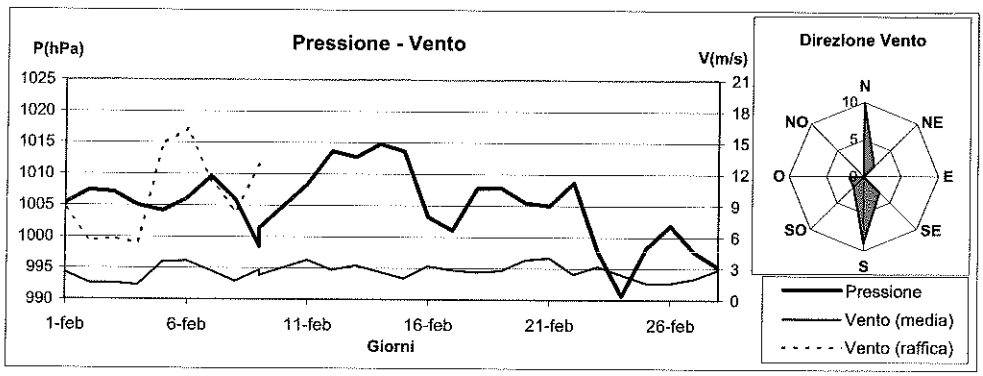
Temperatura
Min: 2.7°C il 7/2 alle ore 6.20
Max: 19.2°C il 1/2 alle ore 14.30
Umidità
Min: 12.3% il 12/2 alle ore 16.10
Max: 93.6% il 17/2 alle ore 5.40
Pressione
Min: 987.5 hPa il 24/2 alle ore 5.30
Max: 1016.2 hPa il 14/2 alle ore 11.40
Velocità del vento
Max: 16.3 m/s il 6/2 alle ore 16.30
Radiazione totale
Max: 871.1 W/m² il 22/2 alle ore 10.50
Radiazione UV-b
Max: 0.452 W/m² il 18/2 alle ore 12.40

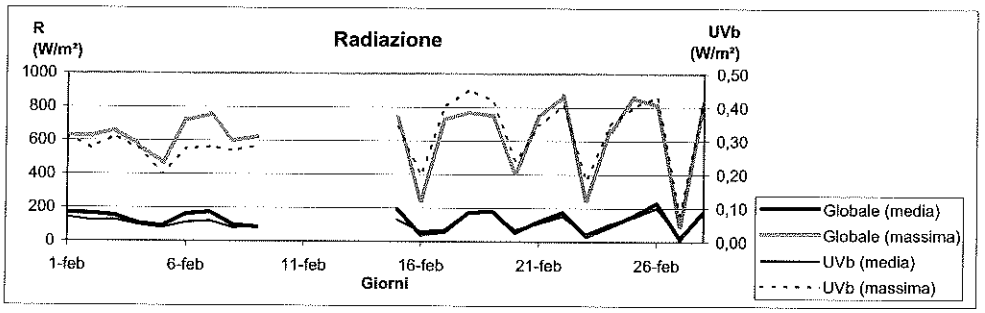




FEBBRAIO 2006 (medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	Pmin (hPa)	Pmax (hPa)	VVmax(m/s)	Rmax(W/m²)	UVbmax(W/
1/2/06	1005,3	0,0	2,6	166,4	0,070	1004,0	1007,1	8,6	629,0	0,313
2/2/06	1007,4	180,0	1,6	165,9	0,062	1006,4	1008,4	5,6	624,8	0,277
3/2/06	1007,1	135,0	1,5	153,5	0,064	1005,8	1008,9	5,8	663,1	0,313
4/2/06	1005,0	0,0	1,4	107,3	0,048	1003,9	1006,4	5,4	572,3	0,274
5/2/06	1004,1	45,0	3,6	91,6	0,040	1002,8	1005,2	14,9	467,7	0,201
6/2/06	1006,1	45,0	3,7	162,3	0,055	1004,0	1008,9	16,3	718,3	0,273
7/2/06	1009,6	0,0	2,7	174,8	0,061	1008,3	1011,6	11,3	752,4	0,281
8/2/06	1005,9	180,0	1,7	95,7	0,040	1001,5	1008,9	8,4	596,7	0,269
9/2/06	998,5	225,0	2,8	85,9	0,046	996,7	1001,5	12,8	624,2	0,284
10/2/06	1001,4	0,0	2,3			998,8	1005,1			
11/2/06	1008,4	0,0	3,8			1005,2	1012,7			
12/2/06	1013,6	0,0	2,8			1012,6	1015,1			
13/2/06	1012,7	0,0	3,2			1011,5	1014,1			
14/2/06	1014,8	0,0	2,6			1013,5	1016,2			
15/2/06	1013,6	180,0	2,0	193,4	0,065	1009,5	1015,7		739,2	0,341
16/2/06	1003,1	225,0	3,2	41,4	0,031	999,1	1009,6		244,3	0,199
17/2/06	1001,1	180,0	2,8	59,6	0,036	997,9	1006,5		727,9	0,403
18/2/06	1007,7	180,0	2,6	171,2	0,089	1006,4	1009,3		771,2	0,452
19/2/06	1007,8	180,0	2,8	183,1	0,090	1007,0	1008,9		749,4	0,421
20/2/06	1005,5	180,0	3,8	57,0	0,036	1004,4	1007,1		405,6	0,239
21/2/06	1005,0	135,0	4,0	120,2	0,055	1002,3	1007,7		745,0	0,345
22/2/06	1008,7	180,0	2,5	173,5	0,075	1006,4	1010,2		871,1	0,408
23/2/06	997,7	0,0	3,2	31,6	0,024	990,0	1006,4		247,3	0,182
24/2/06	990,7	0,0	2,4	89,8	0,053	987,5	996,0		662,1	0,349
25/2/06	998,2	180,0	1,6	152,4	0,072	996,0	999,9		856,4	0,403
26/2/06	1001,9	270,0	1,6	228,7	0,099	999,7	1003,9		811,4	0,431
27/2/06	997,6	135,0	2,0	18,6	0,016	993,6	1002,7		93,3	0,081
28/2/06	995,2	270,0	2,9	179,8	0,083	990,6	1000,6		827,1	0,420



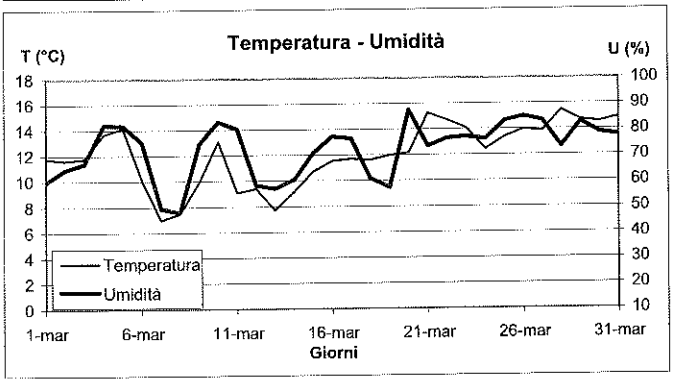


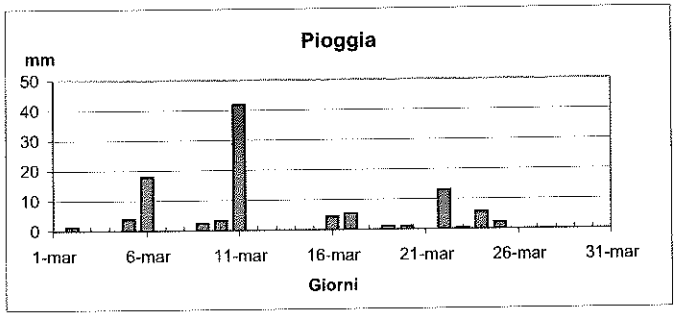
MARZO 2006 (medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)
1/3/06	11,8	59,6	0,0	10,9	13,2	48,2	66,1
2/3/06	11,6	64,6	1,2	9,4	13,7	48,9	81,0
3/3/06	11,8	66,9	0,0	8,9	13,8	55,4	83,1
4/3/06	13,7	81,9	0,0	12,9	15,0	75,5	85,6
5/3/06	14,2	81,9	3,8	13,1	15,4	72,9	89,3
6/3/06	10,1	75,2	17,8	7,3	13,1	53,6	89,9
7/3/06	6,9	49,3	0,0	4,2	9,8	27,6	66,4
8/3/06	7,5	47,8	0,0	3,7	11,1	28,9	74,4
9/3/06	9,9	74,6	2,4	7,3	12,4	47,9	85,1
10/3/06	13,1	83,2	3,4	12,3	14,0	68,9	91,4
11/3/06	9,1	80,5	41,8	5,9	12,7	70,2	89,9
12/3/06	9,4	58,3	0,0	7,7	11,6	41,9	77,5
13/3/06	7,7	56,9	0,0	6,6	9,2	51,0	63,0
14/3/06	9,2	60,6	0,0	5,8	12,2	48,7	69,6
15/3/06	10,7	70,9	0,0	8,0	14,0	47,4	84,6
16/3/06	11,5	77,3	4,4	9,3	13,1	71,6	85,9
17/3/06	11,7	76,5	5,4	9,4	15,1	51,8	90,7
18/3/06	11,6	60,8	0,0	8,4	14,9	46,0	71,3
19/3/06	12,0	57,3	1,0	10,0	14,9	42,8	76,0
20/3/06	12,2	87,5	1,0	10,3	13,5	71,3	94,0
21/3/06	15,3	73,4	0,0	12,7	18,6	51,1	93,8
22/3/06	14,7	76,5	13,0	12,8	16,7	57,1	90,4
23/3/06	14,1	77,2	0,4	12,2	16,7	66,0	88,4
24/3/06	12,5	76,1	5,6	10,4	14,8	57,2	89,6
25/3/06	13,4	83,2	2,2	11,2	16,6	65,3	91,4
26/3/06	14,0	85,0	0,0	11,2	18,9	57,6	94,4
27/3/06	13,8	83,3	0,0	12,6	15,7	72,4	90,4
28/3/06	15,5	73,2	0,0	12,3	18,9	52,3	91,0
29/3/06	14,7	82,9	0,0	13,8	16,0	74,3	90,2
30/3/06	14,6	78,8	0,0	12,5	16,7	62,6	85,8
31/3/06	14,9	77,6	0,0	13,6	17,1	63,6	86,8

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI

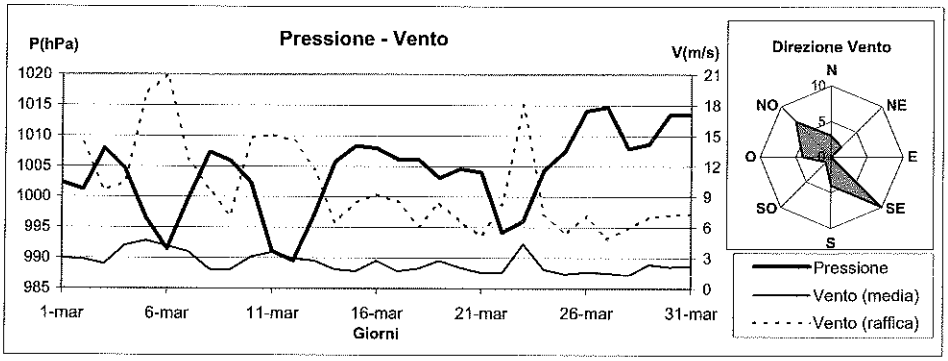
Temperatura
Min: 3.7°C il 8/3 alle ore 3.30
Max: 18.9°C il 28/3 alle ore 13.40
Umidità
Min: 27.6% il 7/3 alle ore 12.40
Max: 94.4% il 26/3 alle ore 8.40
Pressione
Min: 983.3 hPa il 11/3 alle ore 16.00
Max: 1016.8 hPa il 27/3 alle ore 9.50
Velocità del vento
Max: 21.0 m/s il 6/3 alle ore 7.10
Radiazione totale
Max: 953.3 W/m² il 17/3 alle ore 12.00
Radiazione UV-b
Max: 0.689 W/m² il 31/3 alle ore 12.30

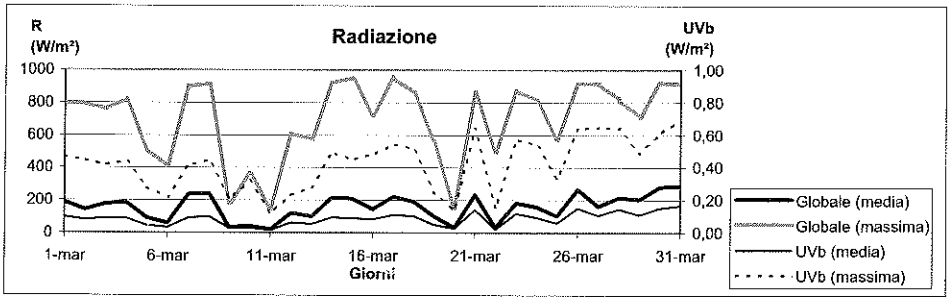




MARZO 2006 (medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	P_{min} (hPa)	P_{max} (hPa)	VV_{max}(m/s)	R_{max}(W/m²)	UVb_{max}(W/m²)
1/3/06	1002,3	225,0	3,0	188,0	0,098	1000,3	1003,6		797,5	0,465
2/3/06	1001,2	270,0	2,9	141,4	0,080	999,1	1005,2	14,3	793,5	0,444
3/3/06	1008,0	180,0	2,4	178,0	0,089	1005,2	1010,1	9,6	758,2	0,416
4/3/06	1004,6	180,0	4,2	187,2	0,088	1001,5	1007,7	10,4	819,3	0,440
5/3/06	996,5	180,0	4,7	90,7	0,044	993,0	1001,8	19,1	509,9	0,274
6/3/06	991,5	45,0	4,2	59,9	0,034	987,4	996,6	21,0	407,2	0,219
7/3/06	999,7	0,0	3,6	236,4	0,091	996,4	1004,5	12,6	899,6	0,410
8/3/06	1007,3	315,0	1,9	243,3	0,100	1003,9	1009,0	9,7	913,6	0,446
9/3/06	1005,9	180,0	1,8	31,4	0,027	1004,6	1008,3	7,1	180,8	0,207
10/3/06	1002,3	270,0	3,1	41,3	0,031	999,2	1005,7	14,8	361,3	0,316
11/3/06	991,1	270,0	3,6	19,5	0,015	983,3	999,7	15,1	146,1	0,118
12/3/06	989,5	315,0	2,9	120,0	0,061	987,7	991,8	14,5	607,5	0,231
13/3/06	997,1	45,0	2,7	99,4	0,053	991,8	1003,3	11,7	574,0	0,280
14/3/06	1005,7	315,0	1,9	213,9	0,095	1003,3	1007,7	6,5	921,8	0,492
15/3/06	1008,3	0,0	1,7	210,9	0,089	1007,0	1009,5	8,4	949,2	0,447
16/3/06	1007,9	135,0	2,7	145,0	0,082	1006,4	1009,5	9,2	721,8	0,480
17/3/06	1006,1	315,0	1,7	221,4	0,109	1005,2	1007,3	8,5	953,3	0,543
18/3/06	1006,0	0,0	2,0	190,7	0,103	1003,9	1007,7	6,1	860,7	0,517
19/3/06	1003,1	315,0	2,7	103,8	0,051	1000,4	1004,6	8,4	562,7	0,255
20/3/06	1004,6	135,0	2,0	31,3	0,028	1002,7	1007,1	6,6	148,9	0,135
21/3/06	1004,0	135,0	1,6	233,7	0,143	999,1	1007,1	5,2	864,2	0,639
22/3/06	994,1	315,0	1,5	32,5	0,020	990,6	999,7	8,2	494,8	0,151
23/3/06	996,1	270,0	4,4	183,5	0,117	991,4	1001,5	18,0	872,3	0,573
24/3/06	1004,3	135,0	1,9	160,0	0,093	1001,5	1005,8	7,3	814,6	0,544
25/3/06	1007,5	315,0	1,4	104,2	0,060	1005,2	1011,4	5,3	575,6	0,329
26/3/06	1014,1	135,0	1,6	265,0	0,151	1011,4	1016,2	7,1	918,3	0,637
27/3/06	1014,7	135,0	1,5	161,6	0,105	1012,6	1016,8	4,9	916,9	0,647
28/3/06	1007,9	135,0	1,3	216,4	0,144	1003,9	1012,6	5,9	820,5	0,639
29/3/06	1008,6	135,0	2,3	204,8	0,110	1005,1	1011,8	7,0	713,1	0,486
30/3/06	1013,5	135,0	2,1	281,1	0,150	1012,0	1015,0	7,2	921,1	0,612
31/3/06	1013,4	135,0	2,2	287,0	0,165	1012,6	1014,8	7,3	914,3	0,689



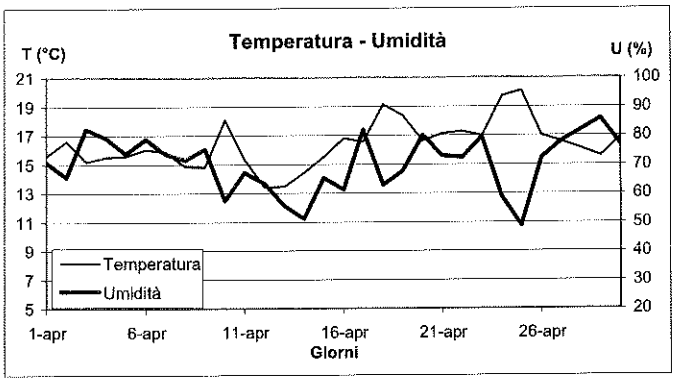


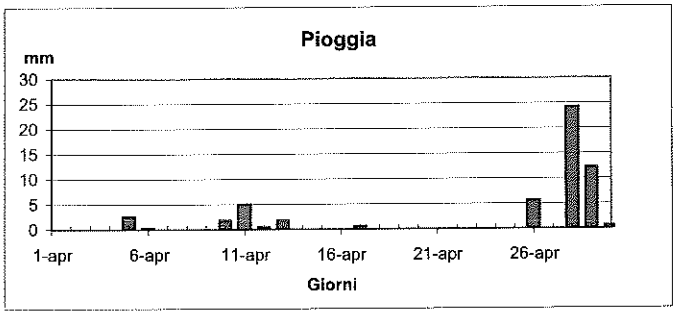
APRILE 2006 (medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)
1/4/06	15,6	70,7	0,0	12,7	18,2	49,1	85,9
2/4/06	16,6	65,6	0,0	13,3	20,3	40,5	84,4
3/4/06	15,2	82,2	0,0	13,6	17,2	68,5	88,4
4/4/06	15,5	79,2	0,0	13,3	18,3	60,0	87,9
5/4/06	15,6	73,8	2,6	13,1	17,8	45,9	89,2
6/4/06	16,0	78,7	0,2	14,1	17,5	46,8	91,2
7/4/06	15,8	73,6	0,0	13,4	19,7	48,9	90,1
8/4/06	14,8	71,6	0,0	12,3	18,0	52,8	81,6
9/4/06	14,8	75,2	0,0	12,6	17,0	58,8	84,8
10/4/06	18,1	57,4	1,8	13,5	22,1	40,5	78,8
11/4/06	15,3	67,1	5,0	11,7	17,8	37,2	91,2
12/4/06	13,4	63,3	0,4	10,6	16,4	41,0	73,7
13/4/06	13,4	55,7	1,8	10,3	16,9	30,3	86,7
14/4/06	14,4	51,0	0,0	10,0	18,5	33,0	82,2
15/4/06	15,5	65,3	0,0	13,0	17,7	33,4	83,1
16/4/06	16,8	61,2	0,0	13,9	19,6	34,8	85,9
17/4/06	16,6	81,9	0,6	14,6	19,2	66,3	89,4
18/4/06	19,1	62,9	0,0	16,6	25,6	40,4	85,3
19/4/06	18,4	67,6	0,0	16,5	21,7	48,7	81,8
20/4/06	16,6	80,0	0,0	15,5	18,5	71,3	85,9
21/4/06	17,1	72,9	0,0	13,9	21,3	52,4	87,3
22/4/06	17,3	72,3	0,0	14,1	21,1	54,8	85,2
23/4/06	17,0	79,5	0,0	14,8	19,0	69,2	89,5
24/4/06	19,7	58,7	0,0	14,5	24,6	29,6	84,6
25/4/06	20,1	48,7	0,0	16,4	22,7	28,4	67,1
26/4/06	17,0	72,1	5,6	15,3	19,0	59,5	84,6
27/4/06	16,6	77,9	0,0	14,5	19,1	61,3	87,0
28/4/06	16,1	81,9	24,2	14,7	19,8	59,0	88,1
29/4/06	15,6	85,9	12,2	14,4	16,7	78,5	91,6
30/4/06	16,9	76,7	0,6	15,3	18,8	67,3	85,8

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI

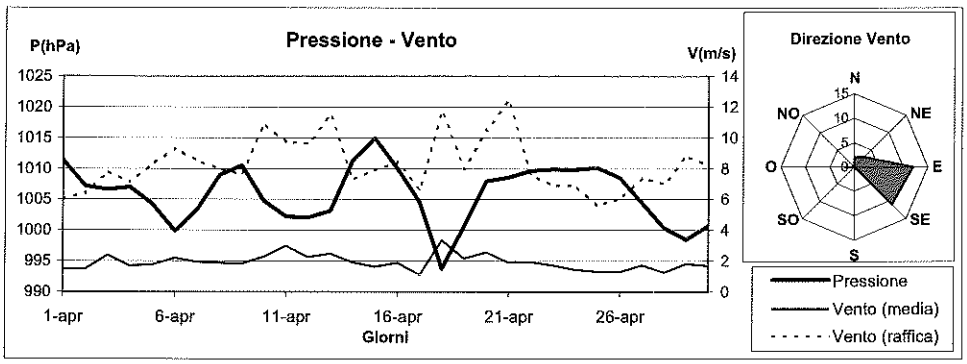
Temperatura
Min: 10.0°C il 14/4 alle ore 5.30
Max: 25.6°C il 18/4 alle ore 14.30
Umidità
Min: 28.4% il 25/4 alle ore 16.00
Max: 91.6% il 29/4 alle ore 6.40
Pressione
Min: 989.9 hPa il 18/4 alle ore 18.00
Max: 1016.7 hPa il 15/4 alle ore 10.10
Velocità del vento
Max: 12.4 m/s il 21/4 alle ore 16.20
Radiazione totale
Max: 1199.6 W/m² il 30/4 alle ore 12.00
Radiazione UV-b
Max: 0.913 W/m² il 30/4 alle ore 11.50

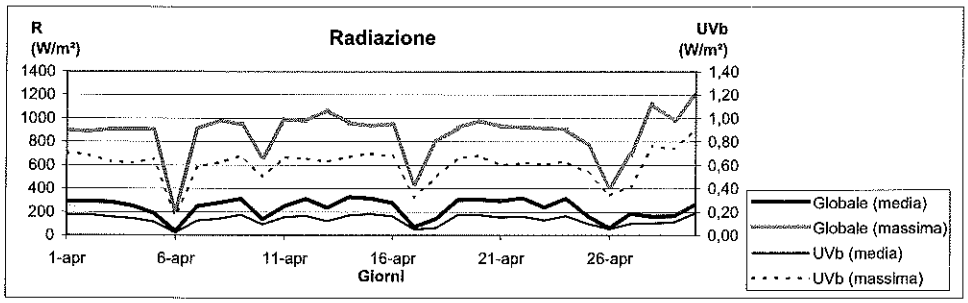




APRILE 2006 (medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	Pmin (hPa)	Pmax (hPa)	VVmax(m/s)	Rmax(W/m²)	UVbmax(W/m²)
1/4/06	1011,4	135,0	1,5	287,8	0,178	998,7	1008,3	6,0	900,6	0,706
2/4/06	1007,1	135,0	1,5	288,0	0,176	999,9	1004,0	6,4	887,7	0,687
3/4/06	1006,6	90,0	2,4	283,5	0,158	1002,7	1005,2	7,8	907,3	0,630
4/4/06	1007,0	90,0	1,7	253,4	0,143	1003,1	1005,1	7,1	906,6	0,618
5/4/06	1004,3	135,0	1,8	191,5	0,116	1002,7	1006,4	8,3	902,9	0,651
6/4/06	999,8	90,0	2,2	33,4	0,021	1006,4	1012,6	9,3	211,4	0,159
7/4/06	1003,4	45,0	1,9	247,4	0,125	1012,6	1016,3	8,5	909,3	0,581
8/4/06	1009,0	90,0	1,9	277,4	0,140	1015,6	1017,5	8,0	983,5	0,624
9/4/06	1010,5	90,0	1,8	310,8	0,172	1014,4	1016,3	7,6	946,1	0,677
10/4/06	1004,7	90,0	2,3	138,2	0,089	1015,7	1019,3	10,9	667,9	0,500
11/4/06	1002,2	270,0	3,0	249,8	0,151	1017,5	1019,3	9,7	987,9	0,665
12/4/06	1002,0	270,0	2,2	310,1	0,163	1016,3	1020,0	9,6	978,0	0,652
13/4/06	1003,2	45,0	2,5	233,6	0,120	1019,9	1022,3	11,5	1067,7	0,632
14/4/06	1011,3	135,0	1,9	324,8	0,171	1017,5	1020,5	7,3	956,3	0,668
15/4/06	1014,9	135,0	1,6	313,4	0,180	1016,7	1018,7	7,9	938,0	0,696
16/4/06	1009,9	135,0	1,9	274,7	0,162	1016,2	1018,1	8,4	950,0	0,672
17/4/06	1004,5	135,0	1,1	70,4	0,049	1012,6	1018,7	6,6	443,0	0,326
18/4/06	993,8	0,0	3,3	140,2	0,062	1002,1	1012,6	11,7	801,4	0,496
19/4/06	1000,7	135,0	2,1	300,9	0,171	1002,1	1016,3	8,0	921,4	0,661
20/4/06	1007,9	135,0	2,6	304,9	0,174	1016,2	1019,9	10,5	980,4	0,683
21/4/06	1008,5	45,0	1,9	294,0	0,153	1009,4	1017,5	12,4	933,1	0,600
22/4/06	1009,7	135,0	2,0	317,0	0,159	1005,2	1009,1	7,6	923,4	0,620
23/4/06	1009,9	90,0	1,7	241,2	0,130	1005,8	1009,6	6,9	916,8	0,609
24/4/06	1009,8	90,0	1,4	315,7	0,165	1009,5	1013,8	6,9	908,0	0,633
25/4/06	1010,1	0,0	1,3	164,3	0,101	1011,4	1014,5	5,6	770,9	0,538
26/4/06	1008,5	90,0	1,3	62,9	0,053	1009,0	1011,5	6,0	417,7	0,340
27/4/06	1004,4	90,0	1,7	186,9	0,099	1010,1	1013,8	7,4	688,0	0,422
28/4/06	1000,3	135,0	1,2	161,7	0,104	1013,8	1016,2	7,0	1123,3	0,760
29/4/06	998,5	90,0	1,8	163,9	0,113	1012,6	1016,3	8,8	984,7	0,741
30/4/06	1000,7	90,0	1,7	265,1	0,188	1006,8	1014,4	8,2	1199,6	0,913



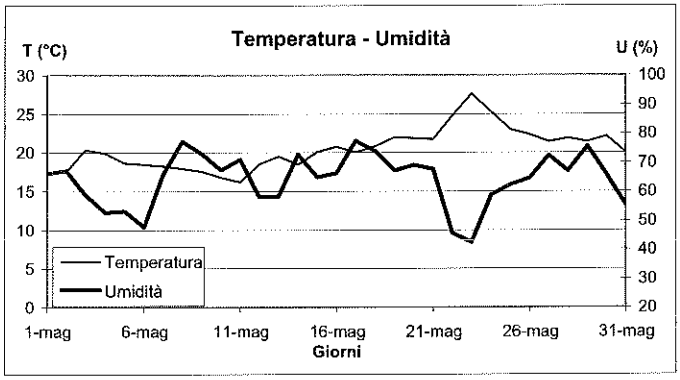


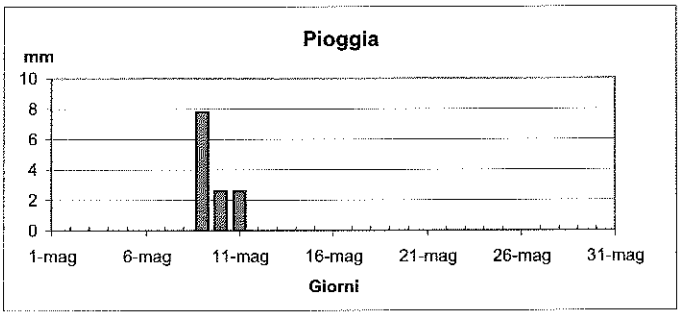
MAGGIO 2006 (medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	T_{min} (°C)	T_{max} (°C)	U_{min} (%)	U_{max} (%)
1/5/06	17,2	66,1	0,0	15,0	19,8	48,8	81,0
2/5/06	17,5	67,2	0,0	14,2	20,1	52,2	78,1
3/5/06	20,3	58,7	0,0	15,4	25,0	38,6	81,3
4/5/06	19,9	52,6	0,0	16,2	23,1	40,0	67,2
5/5/06	18,6	53,3	0,0	15,3	22,7	36,2	69,1
6/5/06	18,5	47,6	0,0	15,2	21,7	28,8	64,3
7/5/06	18,3	66,0	0,0	15,7	21,1	52,9	80,4
8/5/06	18,0	77,2	0,0	16,1	19,7	67,2	83,2
9/5/06	17,6	72,9	7,8	15,5	19,4	53,3	87,4
10/5/06	16,8	67,3	2,6	13,3	19,8	42,6	83,1
11/5/06	16,2	71,0	2,6	14,1	18,3	57,5	80,0
12/5/06	18,5	58,1	0,0	13,4	22,4	41,8	76,3
13/5/06	19,5	58,3	0,0	16,2	22,7	42,6	73,5
14/5/06	18,5	72,6	0,0	16,4	20,0	56,8	78,6
15/5/06	20,1	65,0	0,0	16,2	23,8	51,1	81,6
16/5/06	20,7	66,2	0,0	17,5	25,0	45,6	78,7
17/5/06	20,0	77,4	0,0	18,4	21,5	70,7	85,7
18/5/06	20,8	73,9	0,0	18,1	23,2	55,8	86,1
19/5/06	22,0	67,2	0,0	18,8	25,2	40,6	86,3
20/5/06	21,8	69,1	0,0	20,2	24,7	32,6	88,2
21/5/06	21,7	67,6	0,0	19,2	24,2	49,2	80,1
22/5/06	24,8	45,5	0,0	19,5	29,4	25,0	65,0
23/5/06	27,6	42,4	0,0	22,6	32,8	27,5	54,9
24/5/06	25,2	58,8	0,0	21,1	27,5	42,5	78,5
25/5/06	23,0	62,2	0,0	20,0	25,9	40,3	80,4
26/5/06	22,3	64,6	0,0	19,1	26,1	39,1	77,6
27/5/06	21,4	72,3	0,0	19,0	24,2	44,6	84,6
28/5/06	21,8	67,0	0,0	18,7	24,7	1,6	85,6
29/5/06	21,4	75,6	0,0	19,1	23,0	67,9	80,6
30/5/06	22,1	65,7	0,0	19,5	24,3	29,8	85,0
31/5/06	20,0	55,3	0,0	17,2	22,5	37,7	79,4

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI

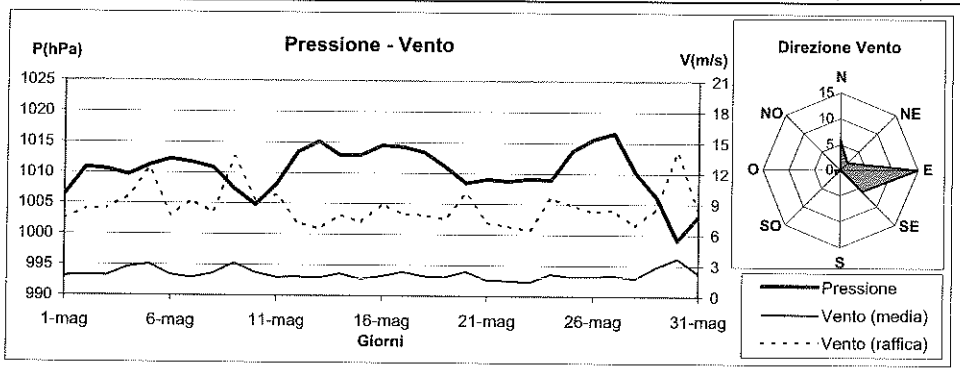
Temperatura
Min: 13.3°C il 10/5 alle ore 5.30
Max: 32.8°C il 25/5 alle ore 16.40
Umidità
Min: 25.0% il 22/5 alle ore 11.50
Max: 88.1% il 20/5 alle ore 5.30
Pressione
Min: 997.6 hPa il 30/5 alle ore 15.40
Max: 1018.0 hPa il 27/5 alle ore 8.20
Velocità del vento
Max: 14.0 m/s il 30/5 alle ore 16.20
Radiazione totale
Max: 1062.6 W/m² il 1/5 alle ore 12.00
Radiazione UV-b
Max: 1.786 W/m² il 28/5 alle ore 12.40

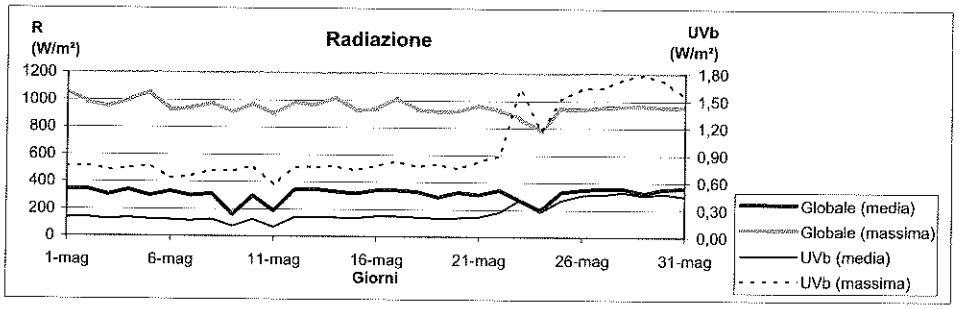




MAGGIO 2006 (medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	Pmin (hPa)	Pmax (hPa)	VVmax(m/s)	Rmax(W/m²)	UVbmax(W/m²)
1/5/06	1006,4	0,0	1,9	339,0	0,200	1003,9	1010,0	7,4	1062,6	0,764
2/5/06	1010,8	135,0	2,0	343,0	0,207	1009,3	1012,0	8,4	982,0	0,772
3/5/06	1010,5	45,0	1,9	304,2	0,186	1009,5	1011,4	8,5	949,0	0,732
4/5/06	1009,6	0,0	2,8	340,9	0,204	1008,2	1010,8	9,7	998,7	0,742
5/5/06	1011,3	45,0	3,1	295,8	0,185	1010,1	1012,6	12,4	1058,0	0,777
6/5/06	1012,2	0,0	2,0	328,5	0,178	1011,3	1013,2	7,8	922,6	0,639
7/5/06	1011,7	270,0	1,8	297,9	0,172	1010,8	1012,6	9,3	938,0	0,660
8/5/06	1010,8	90,0	2,1	310,2	0,184	1009,5	1012,0	8,1	977,2	0,721
9/5/06	1007,4	90,0	3,2	160,8	0,112	1004,3	1010,8	13,5	905,1	0,711
10/5/06	1004,8	225,0	2,3	296,1	0,184	1003,3	1006,5	9,4	974,9	0,776
11/5/06	1008,2	135,0	1,8	187,2	0,101	1006,0	1010,8	9,8	894,5	0,567
12/5/06	1013,4	0,0	1,9	340,9	0,204	1010,8	1015,6	7,1	985,2	0,761
13/5/06	1015,1	135,0	1,7	348,5	0,213	1013,9	1016,8	6,6	958,7	0,763
14/5/06	1012,8	90,0	2,2	328,9	0,205	1010,9	1014,4	7,9	1019,2	0,772
15/5/06	1012,9	90,0	1,6	316,6	0,199	1011,4	1014,4	7,2	923,9	0,725
16/5/06	1014,5	135,0	1,9	340,6	0,221	1013,7	1015,5	9,0	934,3	0,778
17/5/06	1014,3	90,0	2,4	339,6	0,221	1013,6	1015,5	8,0	1014,6	0,824
18/5/06	1013,4	90,0	1,9	330,0	0,214	1012,0	1014,9	7,9	930,7	0,769
19/5/06	1011,1	90,0	1,8	288,7	0,202	1008,3	1013,8	7,5	918,2	0,796
20/5/06	1008,4	90,0	2,4	325,9	0,205	1007,5	1009,5	10,0	920,4	0,751
21/5/06	1009,0	135,0	1,5	308,5	0,218	1008,2	1010,1	7,2	962,1	0,829
22/5/06	1008,8	0,0	1,5	343,3	0,270	1007,6	1010,8	6,8	928,4	0,890
23/5/06	1009,1	0,0	1,4	269,0	0,401	1007,0	1010,8	6,5	874,6	1,629
24/5/06	1008,9	90,0	2,2	198,2	0,275	1006,0	1013,2	9,6	783,5	1,172
25/5/06	1013,7	90,0	1,9	328,8	0,404	1012,0	1015,6	8,9	940,8	1,521
26/5/06	1015,6	90,0	1,9	348,1	0,460	1013,8	1016,8	8,2	938,0	1,641
27/5/06	1016,5	90,0	2,0	357,7	0,468	1015,6	1018,0	8,4	953,3	1,641
28/5/06	1010,2	90,0	1,8	358,3	0,494	600,1	1016,2	6,9	958,0	1,740
29/5/06	1006,2	90,0	2,9	321,7	0,456	1002,7	1010,2	8,6	962,9	1,786
30/5/06	999,1	90,0	3,7	353,5	0,477	997,6	1002,7	14,1	949,6	1,714
31/5/06	1003,1	135,0	2,3	359,1	0,443	1000,4	1005,8	8,3	956,1	1,553



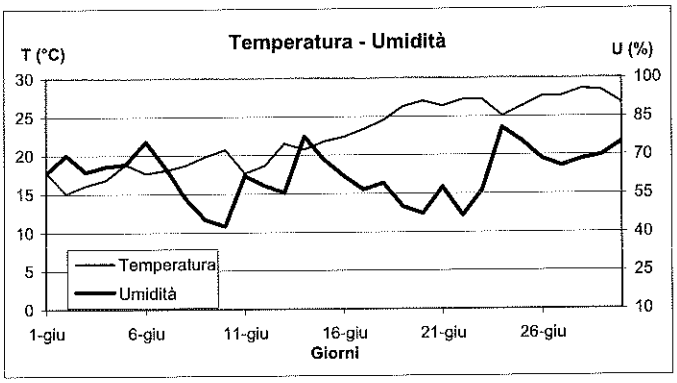


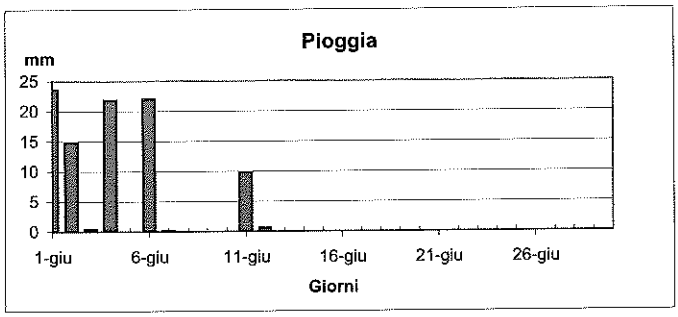
GIUGNO 2006 (medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	T_{min} (°C)	T_{max} (°C)	U_{min} (%)	U_{max} (%)
1/6/06	17,8	63,0	23,6	14,9	20,7	38,3	86,3
2/6/06	15,0	70,1	14,8	12,3	19,2	48,1	85,4
3/6/06	16,1	63,7	0,4	12,9	19,7	41,4	82,2
4/6/06	16,8	65,7	21,8	14,4	20,4	42,5	82,0
5/6/06	18,8	66,5	0,0	15,1	21,7	51,2	80,0
6/6/06	17,7	75,4	22,0	13,8	19,8	64,7	90,7
7/6/06	18,1	65,1	0,2	14,6	22,3	45,6	82,3
8/6/06	18,7	53,3	0,0	14,6	22,3	38,9	64,3
9/6/06	19,9	45,0	0,0	15,9	23,1	34,8	54,1
10/6/06	20,7	42,6	0,0	17,5	24,0	28,6	61,2
11/6/06	17,7	62,0	9,8	13,5	20,4	49,5	82,5
12/6/06	18,6	58,1	0,6	13,8	23,0	44,8	79,4
13/6/06	21,5	55,5	0,0	17,2	26,6	35,3	89,7
14/6/06	20,7	77,3	0,0	18,8	22,7	62,9	89,7
15/6/06	21,8	68,2	0,0	19,1	25,5	43,1	86,1
16/6/06	22,3	61,9	0,0	19,1	26,6	26,2	77,4
17/6/06	23,4	56,6	0,0	18,9	27,5	34,5	79,0
18/6/06	24,5	59,0	0,0	21,3	30,1	39,0	81,7
19/6/06	26,3	50,0	0,0	22,1	33,3	16,1	70,8
20/6/06	27,0	47,2	0,0	24,4	32,6	33,4	68,8
21/6/06	26,3	57,5	0,0	23,8	29,9	32,6	81,1
22/6/06	27,2	46,4	0,0	23,3	30,6	30,7	72,7
23/6/06	27,2	56,3	0,0	23,7	31,0	37,3	82,9
24/6/06	25,0	80,5	0,0	23,6	26,8	68,5	91,1
25/6/06	26,3	75,3	0,0	23,8	29,9	53,5	88,8
26/6/06	27,6	68,6	0,0	25,3	32,6	41,6	82,2
27/6/06	27,6	65,7	0,0	24,7	32,2	44,2	80,4
28/6/06	28,6	68,3	0,0	25,2	32,6	42,5	87,5
29/6/06	28,4	69,9	0,0	25,9	32,1	42,6	88,5
30/6/06	26,7	75,0	0,0	25,0	28,5	64,1	85,2

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI

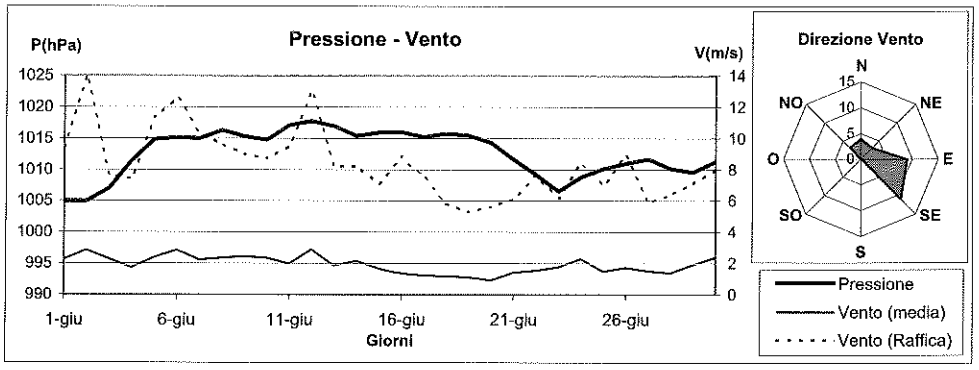
Temperatura
Min: 12.3°C il 2/6 alle ore 21.50
Max: 33.3°C il 19/6 alle ore 14.40
Umidità
Min: 16.1% il 19/6 alle ore 15.00
Max: 91.1% il 24/6 alle ore 23.00
Pressione
Min: 993.1 hPa il 6/6 alle ore 15.40
Max: 1019.3 hPa il 11/6 alle ore 13.10
Velocità del vento
Max: 14.0 m/s il 2/6 alle ore 14.50
Radiazione totale
Max: 1081.9 W/m² il 1/6 alle ore 12.40
Radiazione UV-b
Max: 1.871 W/m² il 17/6 alle ore 12.00

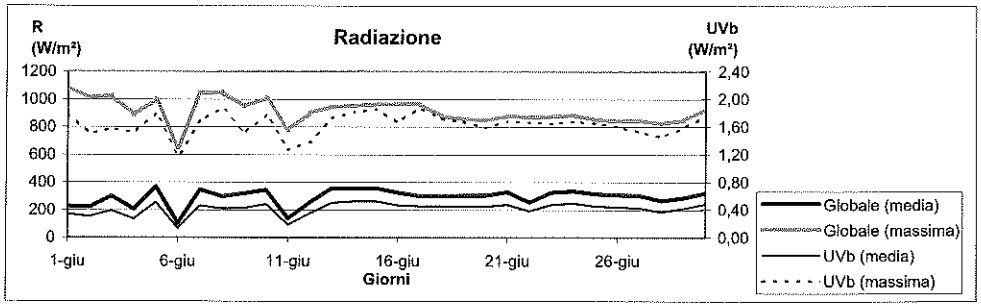




GIUGNO 2006 (medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	Pmin (hPa)	Pmax (hPa)	VVmax(m/s)	Rmax(W/m²)	UVbmax(W/m²)
1/6/06	1005,0	0,0	2,3	226,9	0,340	1004,0	1006,4	9,4	1081,9	1,792
2/6/06	1005,0	0,0	2,9	218,9	0,306	1003,9	1006,4	14,0	1008,2	1,498
3/6/06	1007,0	0,0	2,3	299,7	0,391	1003,9	1010,2	7,6	1027,3	1,569
4/6/06	1011,4	315,0	1,7	203,7	0,269	1009,5	1013,8	7,4	885,8	1,515
5/6/06	1014,8	135,0	2,4	367,3	0,507	1013,2	1016,2	11,3	999,6	1,797
6/6/06	1015,2	90,0	2,9	101,4	0,137	993,2	1016,2	12,6	649,5	1,176
7/6/06	1015,0	45,0	2,2	346,0	0,460	1013,9	1016,2	10,3	1042,9	1,692
8/6/06	1016,3	0,0	2,3	297,1	0,420	1015,5	1017,5	9,6	1051,0	1,866
9/6/06	1015,3	315,0	2,4	319,9	0,425	1013,8	1016,8	9,0	949,0	1,506
10/6/06	1014,8	315,0	2,4	344,9	0,480	1013,7	1016,2	8,7	1004,4	1,779
11/6/06	1017,1	45,0	2,0	139,3	0,183	1014,4	1019,3	9,5	780,5	1,270
12/6/06	1017,7	45,0	2,9	255,6	0,350	1016,8	1018,7	13,0	901,2	1,386
13/6/06	1016,9	135,0	1,9	358,6	0,506	1015,5	1018,1	8,2	945,8	1,722
14/6/06	1015,4	90,0	2,1	353,9	0,521	1014,4	1016,1	8,2	952,9	1,811
15/6/06	1015,9	90,0	1,6	358,0	0,525	1014,9	1016,8	7,1	962,3	1,852
16/6/06	1016,0	90,0	1,4	324,7	0,469	1014,7	1017,1	8,8	963,0	1,672
17/6/06	1015,2	90,0	1,2	300,2	0,451	1013,9	1016,8	7,5	965,5	1,871
18/6/06	1015,7	135,0	1,2	300,6	0,453	1015,0	1016,8	5,8	877,0	1,711
19/6/06	1015,5	135,0	1,1	304,0	0,449	1014,8	1016,3	5,3	856,3	1,672
20/6/06	1014,3	135,0	0,9	305,0	0,443	1013,0	1015,6	5,6	845,7	1,588
21/6/06	1011,6	135,0	1,4	328,8	0,475	1010,1	1013,3	6,1	877,2	1,680
22/6/06	1009,2	135,0	1,5	253,2	0,380	1007,0	1010,8	7,6	871,5	1,663
23/6/06	1006,6	135,0	1,8	326,4	0,475	1005,6	1008,3	6,2	873,2	1,653
24/6/06	1008,8	135,0	2,3	336,8	0,493	1007,9	1010,2	8,4	886,6	1,681
25/6/06	1010,1	90,0	1,5	316,4	0,456	1009,4	1010,8	7,0	853,9	1,647
26/6/06	1011,0	90,0	1,7	307,8	0,439	1009,4	1012,5	8,9	843,0	1,598
27/6/06	1011,7	90,0	1,5	303,5	0,422	1010,7	1012,5	5,9	846,7	1,523
28/6/06	1010,1	135,0	1,4	265,4	0,370	1009,2	1011,3	6,4	824,1	1,452
29/6/06	1009,6	135,0	1,9	287,2	0,421	1008,2	1010,7	7,1	844,6	1,583
30/6/06	1011,3	90,0	2,4	322,8	0,482	1010,1	1012,6	8,0	928,6	1,756



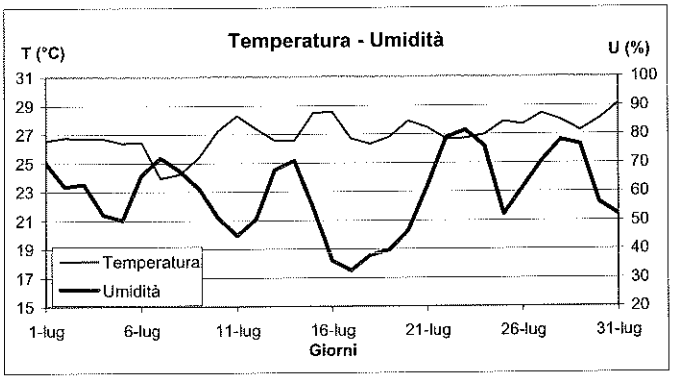


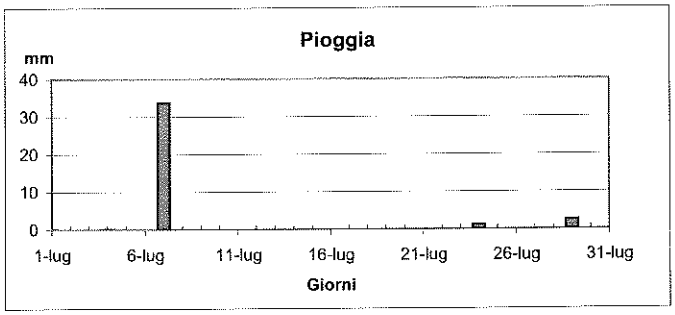
LUGLIO 2006 (medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)
1/7/06	26,6	70,2	0,2	24,3	30,4	55,7	85,4
2/7/06	26,8	61,7	0,0	24,6	29,3	43,9	74,9
3/7/06	26,7	62,6	0,0	24,1	28,7	51,0	75,3
4/7/06	26,7	52,0	0,2	24,6	29,7	41,9	66,3
5/7/06	26,4	50,1	0,0	22,8	29,1	40,4	72,9
6/7/06	26,4	65,8	0,0	24,3	29,0	50,5	84,0
7/7/06	23,9	71,9	33,8	18,5	27,2	52,7	90,1
8/7/06	24,2	67,2	0,0	21,7	28,0	55,3	78,6
9/7/06	25,4	61,0	0,0	21,5	29,1	48,1	71,5
10/7/06	27,3	50,9	0,0	23,2	32,3	35,7	66,4
11/7/06	28,3	44,7	0,0	24,5	31,9	33,8	56,9
12/7/06	27,4	50,5	0,0	24,9	31,0	38,6	79,4
13/7/06	26,5	67,7	0,0	24,1	30,7	37,5	86,0
14/7/06	26,5	70,8	0,0	24,1	29,2	58,1	84,0
15/7/06	28,5	54,2	0,0	24,3	32,8	36,2	79,5
16/7/06	28,5	36,1	0,0	25,6	32,4	20,4	49,0
17/7/06	26,7	32,6	0,0	24,0	30,1	20,8	42,3
18/7/06	26,3	37,7	0,0	22,4	30,4	28,7	44,7
19/7/06	26,8	39,6	0,0	23,0	30,0	27,8	64,4
20/7/06	27,9	46,5	0,0	23,7	33,2	21,9	79,9
21/7/06	27,4	61,7	0,0	24,8	33,0	32,7	86,5
22/7/06	26,6	78,8	0,0	24,3	30,1	64,1	92,2
23/7/06	26,7	81,4	0,0	24,8	28,9	71,3	92,9
24/7/06	27,0	75,6	1,2	24,7	30,7	50,3	92,1
25/7/06	27,9	51,9	0,0	23,7	32,5	36,4	68,7
26/7/06	27,7	61,3	0,0	24,4	32,6	43,1	88,0
27/7/06	28,4	70,6	0,0	25,5	32,2	45,1	87,6
28/7/06	28,0	78,0	0,0	26,0	31,3	54,2	88,9
29/7/06	27,3	76,3	2,6	23,5	29,5	60,4	87,4
30/7/06	28,0	56,2	0,0	24,2	31,7	38,2	83,4
31/7/06	29,1	52,1	0,0	25,6	32,2	40,1	71,6

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI

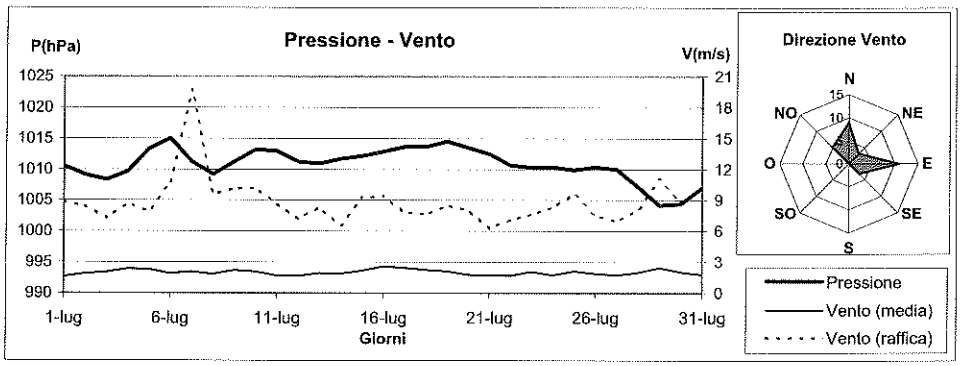
Temperatura
Min: 18.5°C il 7/7 alle ore 12.10
Max: 33.2°C il 20/7 alle ore 13.50
Umidità
Min: 20.4% il 16/7 alle ore 14.10
Max: 92.9% il 23/7 alle ore 1.30
Pressione
Min: 1002.0 hPa il 29/7 alle ore 17.30
Max: 1016.8 hPa il 6/7 alle ore 6.20
Velocità del vento
Max: 19.7 m/s il 7/7 alle ore 12.00
Radiazione totale
Max: 955.4 W/m² il 4/7 alle ore 11.10
Radiazione UV-b
Max: 1.864 W/m² il 16/7 alle ore 12.20

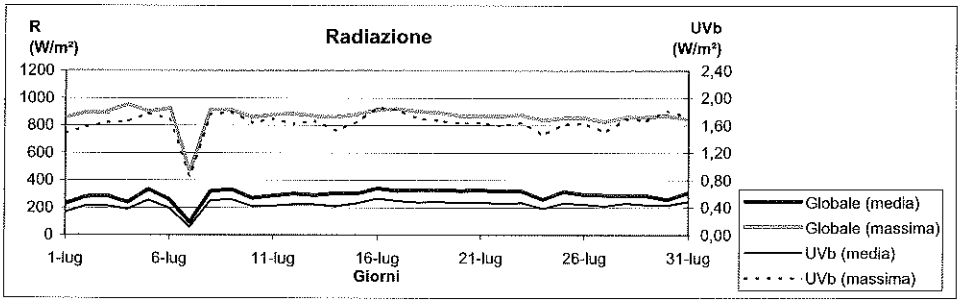




LUGLIO 2006 (medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	P_{min} (hPa)	P_{max} (hPa)	VV_{max}(m/s)	R_{max}(W/m²)	UVb_{max}(W/m²)
1/7/06	1010,5	135,0	1,6	227,6	0,335	1008,8	1012,5	8,9	853,0	1,483
2/7/06	1009,1	315,0	1,9	278,9	0,422	1007,6	1010,2	8,4	896,6	1,582
3/7/06	1008,3	0,0	2,0	288,1	0,425	1007,0	1009,2	7,3	893,9	1,644
4/7/06	1009,6	0,0	2,3	235,4	0,378	1008,3	1012,1	8,7	954,6	1,659
5/7/06	1013,3	0,0	2,3	332,2	0,512	1011,8	1015,4	7,9	897,6	1,769
6/7/06	1015,0	90,0	1,9	257,2	0,392	1012,2	1016,8	10,7	923,4	1,686
7/7/06	1011,2	135,0	2,1	93,2	0,117	1008,8	1016,2	19,7	474,3	0,850
8/7/06	1009,2	0,0	1,8	319,5	0,500	1007,9	1011,4	9,6	914,6	1,757
9/7/06	1011,2	315,0	2,2	331,2	0,515	1010,0	1013,2	10,1	913,1	1,788
10/7/06	1013,2	0,0	2,1	267,9	0,417	1012,0	1015,0	10,2	855,7	1,636
11/7/06	1013,0	0,0	1,7	287,2	0,425	1011,3	1014,7	8,7	879,1	1,690
12/7/06	1011,2	315,0	1,6	299,2	0,445	1009,4	1012,5	7,2	884,2	1,623
13/7/06	1010,9	90,0	1,9	289,6	0,443	1009,4	1012,0	8,3	865,6	1,665
14/7/06	1011,7	90,0	1,9	303,5	0,419	1010,7	1012,7	6,6	859,2	1,520
15/7/06	1012,2	0,0	2,2	301,8	0,458	1011,3	1013,2	9,2	876,5	1,650
16/7/06	1012,8	45,0	2,6	340,8	0,531	1011,9	1014,3	9,4	914,0	1,863
17/7/06	1013,7	45,0	2,5	323,0	0,495	1012,0	1014,4	7,8	919,7	1,816
18/7/06	1013,7	0,0	2,3	328,1	0,475	1012,5	1014,8	7,6	898,8	1,693
19/7/06	1014,5	0,0	2,1	330,3	0,482	1013,7	1015,4	8,5	893,9	1,667
20/7/06	1013,5	90,0	1,8	322,3	0,469	1011,9	1014,7	8,1	866,8	1,629
21/7/06	1012,5	90,0	1,7	325,8	0,478	1011,2	1013,8	6,3	869,0	1,633
22/7/06	1010,6	90,0	1,7	318,8	0,454	1008,8	1012,0	7,1	868,6	1,596
23/7/06	1010,3	90,0	2,1	318,7	0,469	1009,4	1011,3	7,6	873,4	1,637
24/7/06	1010,4	90,0	1,8	259,1	0,379	1008,7	1011,3	8,3	836,6	1,459
25/7/06	1009,9	90,0	2,1	316,2	0,457	1008,1	1011,4	9,6	853,4	1,616
26/7/06	1010,4	90,0	1,9	294,3	0,446	1009,0	1011,3	7,5	857,4	1,629
27/7/06	1010,0	45,0	1,7	288,7	0,415	1008,7	1011,3	6,9	823,3	1,500
28/7/06	1007,1	90,0	2,0	291,8	0,457	1005,7	1008,9	8,1	861,0	1,695
29/7/06	1004,1	135,0	2,4	285,8	0,438	1002,0	1006,1	11,0	860,5	1,674
30/7/06	1004,4	315,0	2,0	258,5	0,431	1002,2	1007,2	8,8	872,5	1,811
31/7/06	1007,0	315,0	1,8	307,3	0,485	1006,3	1007,8	10,3	845,1	1,719



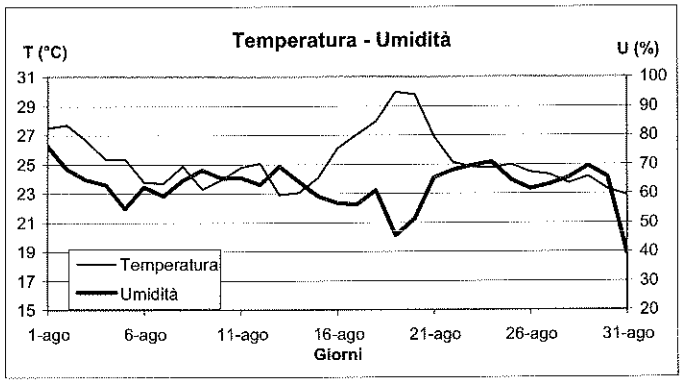


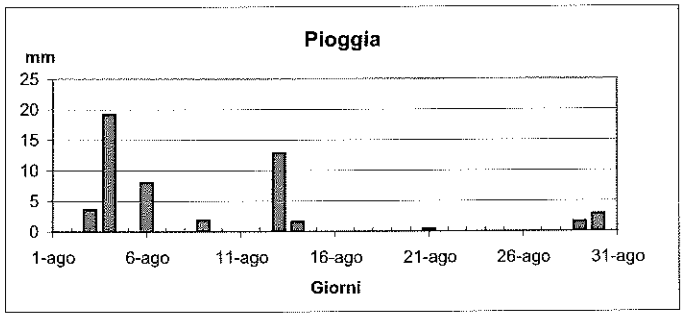
AGOSTO 2006 (medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	T_{min} (°C)	T_{max} (°C)	U_{min} (%)	U_{max} (%)
1/8/06	27,5	76,3	0,0	26,1	29,0	70,1	81,2
2/8/06	27,7	68,3	0,0	26,3	29,9	46,4	84,1
3/8/06	26,6	64,7	3,6	25,1	28,5	55,7	81,2
4/8/06	25,3	63,0	19,2	22,1	28,0	47,5	89,5
5/8/06	25,4	54,8	0,0	22,1	28,3	29,9	70,6
6/8/06	23,8	62,2	8,0	20,4	27,4	42,1	71,0
7/8/06	23,7	59,1	0,0	19,4	27,5	39,9	67,1
8/8/06	24,9	64,6	0,0	23,2	27,2	54,9	72,5
9/8/06	23,3	68,1	1,8	19,7	26,7	46,9	86,6
10/8/06	24,0	65,3	0,0	20,4	27,5	49,3	86,2
11/8/06	24,8	65,4	0,0	22,3	26,8	51,8	71,9
12/8/06	25,1	62,9	0,0	23,3	26,9	41,0	77,8
13/8/06	22,9	69,2	12,8	19,0	24,8	54,1	87,1
14/8/06	23,0	64,0	1,6	20,4	25,9	52,2	74,3
15/8/06	24,1	58,9	0,0	20,5	27,3	40,3	73,1
16/8/06	26,1	56,6	0,0	21,9	30,0	38,1	72,9
17/8/06	27,0	56,3	0,0	23,6	31,0	38,3	72,8
18/8/06	27,9	61,0	0,0	24,9	32,8	34,7	83,9
19/8/06	30,0	45,6	0,0	25,3	35,1	25,2	65,9
20/8/06	29,8	51,3	0,0	26,1	35,8	23,8	74,3
21/8/06	26,9	65,3	0,4	24,3	29,7	50,5	87,0
22/8/06	25,1	67,9	0,0	22,7	28,4	48,9	78,0
23/8/06	24,8	69,6	0,0	22,4	27,9	50,6	79,3
24/8/06	24,7	70,7	0,0	22,6	26,6	58,9	82,6
25/8/06	25,0	64,7	0,0	22,8	28,1	45,4	74,7
26/8/06	24,5	61,6	0,0	22,3	26,8	46,9	70,5
27/8/06	24,3	63,2	0,0	22,9	26,7	47,0	73,1
28/8/06	23,7	65,3	0,0	20,4	27,3	44,6	73,5
29/8/06	24,1	69,4	1,6	22,9	25,6	59,7	78,3
30/8/06	23,3	65,5	2,8	20,9	25,6	44,8	80,5
31/8/06	22,9	39,3	0,0	18,8	27,2	25,9	53,9

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI

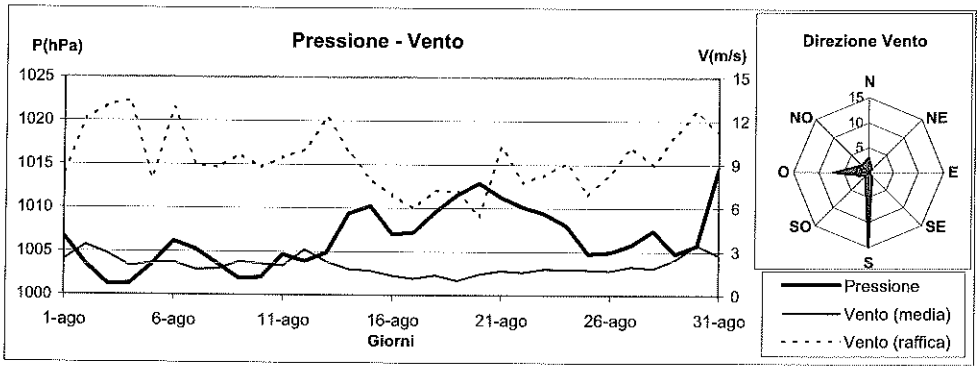
Temperatura
Min: 18.8°C il 31/8 alle ore 6.00
Max: 35.8°C il 20/8 alle ore 15.20
Umidità
Min: 23.8% il 20/8 alle ore 15.20
Max: 89.5% il 4/8 alle ore 01.10
Pressione
Min: 998.3 hPa il 4/8 alle ore 00.20
Max: 1016.8 hPa il 31/8 alle ore 23.50
Velocità del vento
Max: 13.4 m/s il 4/8 alle ore 00.00
Radiazione totale
Max: 965.4 W/m² il 3/8 alle ore 12.00
Radiazione UV-b
Max: 2.012 W/m² il 2/8 alle ore 12.30

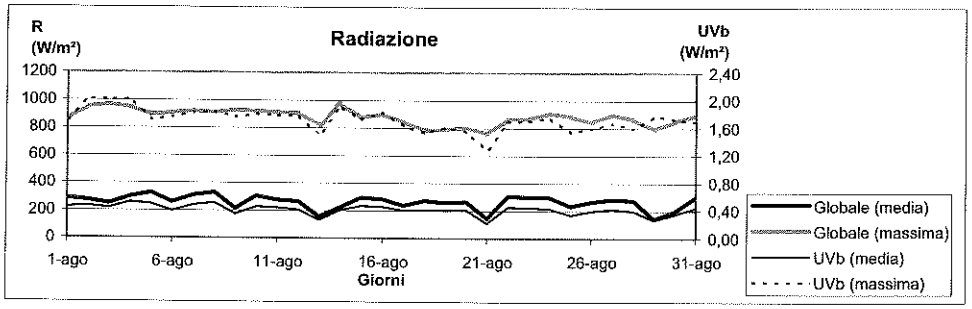




AGOSTO 2006 (medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	Pmin (hPa)	Pmax (hPa)	VVmax(m/s)	Rmax(W/m²)	UVbmax(W/m²)
1/8/06	1006,7	180,0	2,4	286,2	0,443	1005,7	1007,6	8,4	861,3	1,700
2/8/06	1003,5	180,0	3,4	272,6	0,458	1002,5	1005,8	12,1	949,2	2,012
3/8/06	1001,3	180,0	2,8	247,0	0,432	999,5	1003,3	13,1	965,4	2,003
4/8/06	1001,3	225,0	2,0	296,5	0,517	998,3	1002,8	13,4	944,9	2,005
5/8/06	1003,5	0,0	2,2	326,9	0,488	1001,5	1006,4	8,0	893,7	1,713
6/8/06	1006,1	0,0	2,2	256,8	0,390	1005,1	1008,1	12,9	907,4	1,749
7/8/06	1005,3	270,0	1,8	308,8	0,477	1003,8	1007,0	9,0	920,9	1,810
8/8/06	1003,6	180,0	1,8	329,5	0,507	1002,1	1005,2	8,8	910,9	1,827
9/8/06	1001,9	180,0	2,3	211,7	0,344	1000,8	1003,3	9,7	926,5	1,756
10/8/06	1002,0	315,0	2,2	302,7	0,453	1000,8	1004,9	8,8	921,0	1,790
11/8/06	1004,7	180,0	2,0	275,0	0,440	1003,9	1005,6	9,5	912,4	1,775
12/8/06	1003,8	180,0	3,1	264,4	0,413	1003,2	1004,5	10,0	906,0	1,780
13/8/06	1004,9	180,0	2,3	157,0	0,260	1002,1	1008,2	12,2	819,2	1,490
14/8/06	1009,4	180,0	1,8	224,4	0,401	1007,6	1011,3	9,8	975,3	1,910
15/8/06	1010,2	315,0	1,7	293,1	0,468	1008,8	1012,3	8,0	874,1	1,720
16/8/06	1007,0	180,0	1,3	281,5	0,451	1005,7	1008,9	6,9	898,6	1,830
17/8/06	1007,2	180,0	1,1	237,3	0,405	1006,4	1008,1	6,0	843,7	1,630
18/8/06	1009,6	180,0	1,4	271,4	0,409	1007,2	1011,3	7,2	783,0	1,520
19/8/06	1011,5	0,0	1,0	259,0	0,405	1010,4	1013,8	7,1	788,2	1,610
20/8/06	1012,8	135,0	1,5	266,6	0,410	1011,8	1013,8	5,4	803,7	1,540
21/8/06	1011,2	270,0	1,7	143,7	0,221	1009,5	1013,5	10,2	761,9	1,280
22/8/06	1010,1	180,0	1,6	303,1	0,455	1009,2	1011,2	7,8	867,3	1,690
23/8/06	1009,3	180,0	1,8	301,8	0,448	1008,2	1010,1	8,3	868,2	1,700
24/8/06	1008,0	180,0	1,8	296,0	0,431	1007,0	1009,5	9,1	910,4	1,750
25/8/06	1004,8	180,0	1,7	233,7	0,343	1002,5	1007,2	6,9	883,7	1,540
26/8/06	1004,9	270,0	1,7	265,3	0,398	1003,3	1007,0	8,4	843,9	1,590
27/8/06	1005,8	270,0	2,0	284,7	0,428	1005,0	1007,1	10,2	897,6	1,670
28/8/06	1007,4	270,0	1,8	277,2	0,397	1006,4	1008,8	9,0	863,1	1,590
29/8/06	1004,7	270,0	2,4	140,4	0,272	1003,9	1007,0	11,0	793,7	1,780
30/8/06	1005,7	270,0	3,4	198,2	0,352	1003,2	1011,3	12,7	849,0	1,730
31/8/06	1014,5	45,0	2,7	299,6	0,444	1011,3	1016,8	11,2	896,8	1,690



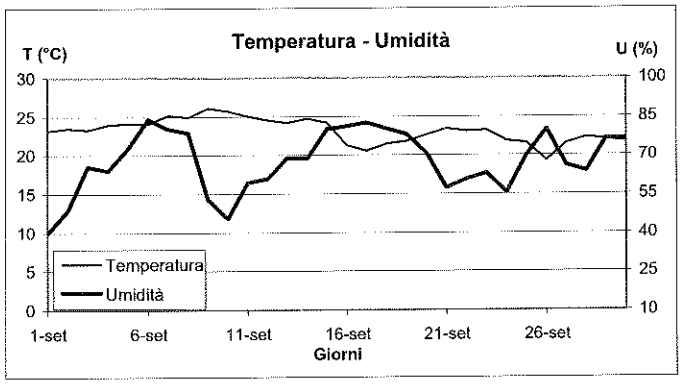


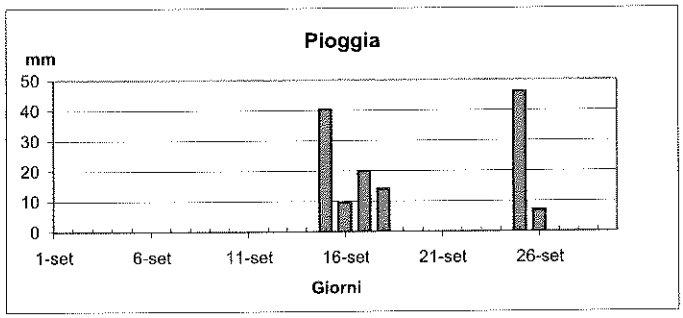
SETTEMBRE 2006 (medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	T_{min} (°C)	T_{max} (°C)	U_{min} (%)	U_{max} (%)
1/9/06	23,2	39,7	0,0	19,3	27,3	21,1	67,9
2/9/06	23,5	48,4	0,0	19,5	28,2	29,4	68,9
3/9/06	23,3	65,6	0,0	20,5	27,8	43,8	73,3
4/9/06	24,0	64,0	0,0	20,8	29,5	34,3	77,0
5/9/06	24,1	72,7	0,0	21,0	29,1	47,2	89,5
6/9/06	24,0	84,0	0,0	21,8	26,1	73,7	89,4
7/9/06	25,2	80,3	0,0	23,2	28,3	61,9	91,0
8/9/06	24,9	78,6	0,0	22,6	28,5	62,3	92,1
9/9/06	26,1	52,8	0,0	23,5	28,7	42,1	78,3
10/9/06	25,7	45,5	0,0	22,2	29,4	32,3	65,8
11/9/06	25,0	59,3	0,0	22,2	27,5	45,6	77,3
12/9/06	24,5	60,9	0,0	22,3	27,4	43,7	80,8
13/9/06	24,2	68,9	0,0	22,0	26,5	55,5	80,1
14/9/06	24,7	68,7	0,0	22,3	26,4	54,3	81,5
15/9/06	24,2	80,0	40,4	22,0	25,8	68,5	92,1
16/9/06	21,2	81,3	9,6	18,3	22,8	69,1	90,5
17/9/06	20,5	82,5	20,0	19,0	22,0	72,6	88,3
18/9/06	21,4	80,2	14,0	18,8	23,9	61,7	91,6
19/9/06	21,8	78,0	0,0	19,7	24,3	67,8	86,5
20/9/06	22,7	70,7	0,0	19,1	26,8	51,9	84,6
21/9/06	23,4	57,4	0,0	19,7	26,8	38,2	77,3
22/9/06	23,1	60,6	0,0	19,8	26,5	42,1	83,0
23/9/06	23,2	63,1	0,0	20,4	27,5	40,3	87,6
24/9/06	21,8	55,6	0,0	18,9	24,8	40,9	65,0
25/9/06	21,6	69,8	46,2	18,1	24,6	58,1	90,7
26/9/06	19,3	80,1	7,0	17,5	21,5	64,9	91,7
27/9/06	21,5	66,1	0,0	18,0	25,2	49,9	84,8
28/9/06	22,3	63,8	0,0	19,0	25,6	48,9	79,1
29/9/06	22,0	76,4	0,0	19,2	24,2	64,9	82,9
30/9/06	22,3	75,8	0,0	19,9	25,5	45,7	88,0

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI

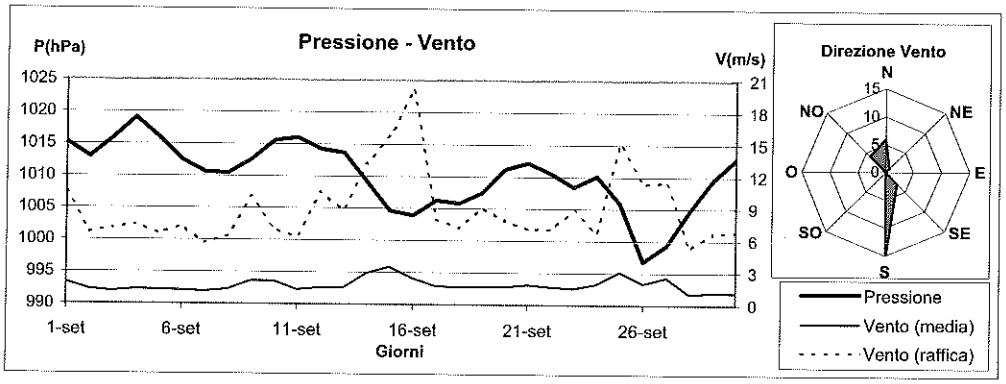
Temperatura
Min: 17.5°C il 26/9 alle ore 6.10
Max: 29.5°C il 4/9 alle ore 15.10
Umidità
Min: 21.1% il 1/9 alle ore 11.10
Max: 92.1% il 15/9 alle ore 06.00
Pressione
Min: 994.7 hPa il 26/9 alle ore 23.00
Max: 1020.3 hPa il 4/9 alle ore 11.30
Velocità del vento
Max: 10.6 m/s il 16/9 alle ore 8.10
Radiazione totale
Max: 897.4 W/m² il 19/9 alle ore 12.20
Radiazione UV-b
Max: 1.640 W/m² il 15/9 alle ore 11.50

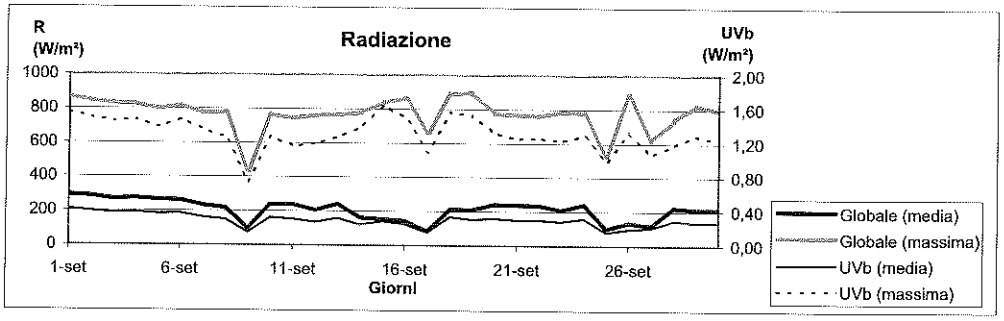




SETTEMBRE 2006

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	Pmin (hPa)	Pmax (hPa)	VVmax(m/s)	(medie giornaliere) Rmax(W/m²)	UVbmax(W/m²)
1/9/06	1015,2	315,0	2,0	293,2	0,417	1013,2	1016,8	10,5	865,8	1,560
2/9/06	1012,9	0,0	1,4	287,5	0,398	1011,9	1013,9	6,7	843,7	1,490
3/9/06	1015,8	180,0	1,2	268,7	0,380	1013,6	1018,8	7,1	828,5	1,450
4/9/06	1019,1	315,0	1,3	274,2	0,384	1018,5	1020,3	7,4	826,9	1,470
5/9/06	1016,0	180,0	1,3	264,1	0,368	1013,7	1018,6	6,6	797,9	1,380
6/9/06	1012,5	180,0	1,3	262,6	0,370	1010,8	1014,4	7,3	817,4	1,470
7/9/06	1010,6	180,0	1,2	233,1	0,326	1009,5	1011,3	5,7	772,1	1,350
8/9/06	1010,5	180,0	1,4	217,3	0,302	1009,4	1011,3	6,4	779,8	1,260
9/9/06	1012,6	0,0	2,1	97,5	0,149	1010,7	1014,9	10,0	431,6	0,740
10/9/06	1015,5	315,0	2,2	239,5	0,325	1014,3	1017,3	7,0	765,2	1,270
11/9/06	1016,0	180,0	1,4	239,4	0,304	1014,4	1017,4	6,3	742,0	1,160
12/9/06	1014,2	180,0	1,5	206,0	0,270	1013,0	1015,5	10,5	762,0	1,190
13/9/06	1013,7	180,0	1,6	242,2	0,319	1012,9	1014,8	8,8	763,9	1,270
14/9/06	1009,2	135,0	2,9	161,6	0,245	1005,0	1013,2	13,2	776,2	1,380
15/9/06	1004,6	180,0	3,5	153,2	0,284	1002,0	1006,9	15,8	837,6	1,640
16/9/06	1003,9	180,0	2,4	145,0	0,246	1000,9	1006,4	20,1	862,4	1,500
17/9/06	1006,3	135,0	1,7	82,6	0,154	1003,9	1007,6	8,0	664,0	1,100
18/9/06	1005,8	180,0	1,6	213,9	0,336	1004,5	1007,0	7,2	887,4	1,560
19/9/06	1007,5	180,0	1,7	209,0	0,305	1006,4	1009,5	9,1	897,4	1,530
20/9/06	1011,2	0,0	1,7	243,1	0,320	1008,9	1013,2	7,9	772,4	1,320
21/9/06	1012,1	0,0	1,9	240,1	0,303	1010,7	1013,3	7,1	766,3	1,250
22/9/06	1010,5	0,0	1,7	236,5	0,303	1009,1	1012,0	7,1	761,0	1,260
23/9/06	1008,4	45,0	1,6	208,8	0,283	1006,9	1010,1	8,9	786,0	1,230
24/9/06	1010,1	180,0	2,0	240,9	0,318	1009,5	1011,0	6,7	777,7	1,290
25/9/06	1005,9	135,0	3,1	99,4	0,160	1000,5	1010,1	15,1	526,8	0,990
26/9/06	996,8	315,0	2,0	136,6	0,198	994,7	1000,8	11,3	886,9	1,320
27/9/06	999,3	0,0	2,6	118,3	0,213	994,8	1002,7	11,5	619,2	1,070
28/9/06	1004,7	180,0	1,0	223,8	0,295	1002,6	1007,6	5,3	739,9	1,180
29/9/06	1009,5	180,0	1,2	211,9	0,273	1007,6	1011,4	6,7	824,5	1,290
30/9/06	1012,8	180,0	1,1	212,0	0,275	1011,4	1014,7	6,8	791,0	1,220



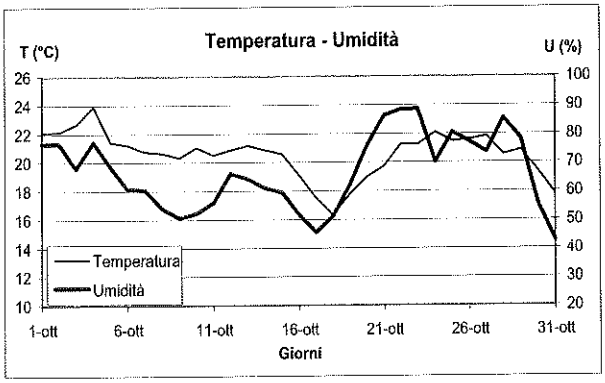


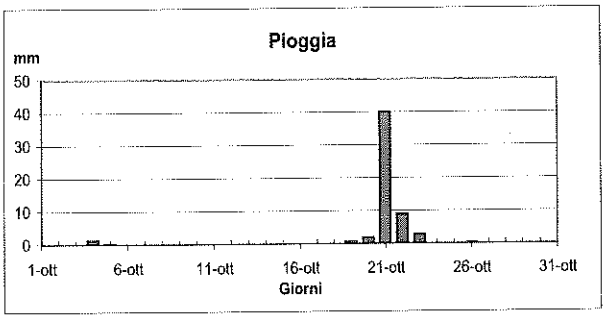
OTTOBRE 2006 (medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)
1/10/06	22,1	76,6	0,0	20,0	24,4	63,2	85,7
2/10/06	22,1	76,5	0,0	19,8	24,8	63,8	87,2
3/10/06	22,7	67,9	0,0	19,1	26,2	49,0	85,6
4/10/06	23,9	77,0	1,2	21,5	25,6	56,6	89,2
5/10/06	21,4	68,5	0,2	19,3	22,8	57,7	79,4
6/10/06	21,2	60,8	0,0	17,7	25,0	43,0	77,8
7/10/06	20,7	60,5	0,0	17,5	24,3	38,1	72,3
8/10/06	20,6	54,1	0,0	18,1	24,7	37,5	75,7
9/10/06	20,3	50,7	0,0	17,5	23,7	41,2	58,9
10/10/06	21,0	52,2	0,0	17,5	25,5	36,9	66,8
11/10/06	20,5	56,0	0,0	17,2	24,1	44,0	68,7
12/10/06	20,9	66,2	0,0	17,5	24,1	51,0	79,9
13/10/06	21,2	64,3	0,0	17,7	24,8	39,6	80,3
14/10/06	20,8	61,0	0,0	18,2	24,8	46,3	73,2
15/10/06	20,6	59,5	0,0	18,8	23,8	44,9	66,5
16/10/06	19,1	51,7	0,0	16,9	22,7	34,5	65,5
17/10/06	17,5	45,6	0,0	14,7	21,0	31,5	59,3
18/10/06	16,3	51,1	0,0	12,6	19,3	27,3	63,3
19/10/06	17,8	62,5	0,6	13,9	20,8	49,9	74,0
20/10/06	19,0	76,1	1,8	16,3	22,0	59,4	83,2
21/10/06	19,7	86,2	40,0	17,7	22,1	72,9	94,6
22/10/06	21,3	88,4	9,0	19,6	23,3	71,1	94,6
23/10/06	21,3	88,6	2,8	19,6	23,0	79,3	93,7
24/10/06	22,1	70,0	0,0	18,2	26,0	45,5	91,1
25/10/06	21,5	80,4	0,0	18,9	24,4	65,2	92,4
26/10/06	21,6	77,1	0,2	18,5	25,2	56,1	94,7
27/10/06	21,8	73,5	0,0	18,7	26,2	52,8	84,4
28/10/06	20,5	85,4	0,0	18,5	22,6	80,5	89,3
29/10/06	20,9	78,2	0,0	18,0	23,8	60,1	91,4
30/10/06	19,4	55,6	0,0	15,7	22,8	28,9	89,1
31/10/06	17,8	42,8	0,0	14,1	21,9	27,1	68,8

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI

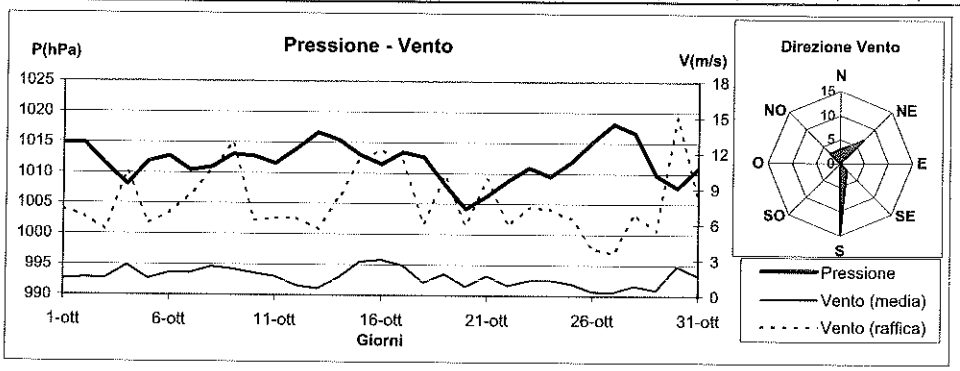
Temperatura
Min: 12.6°C il 18/10 alle ore 6.20
Max: 26.2°C il 3/10 alle ore 13.30
Umidità
Min: 27.1% il 31/10 alle ore 13.20
Max: 94.7% il 26/10 alle ore 02.20
Pressione
Min: 977.2 hPa il 20/10 alle ore 12.20
Max: 1019.2 hPa il 27/10 alle ore 22.20
Velocità del vento
Max: 15.0 m/s il 30/10 alle ore 15.40
Radiazione totale
Max: 791.1 W/m² il 8/10 alle ore 12.10
Radiazione UV-b
Max: 1.200 W/m² il 3/10 alle ore 11.50

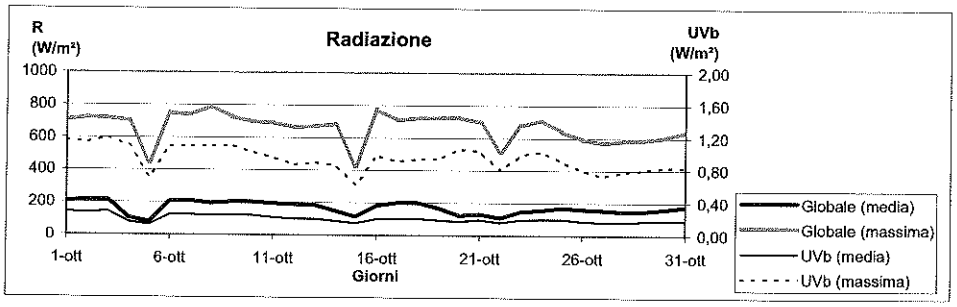




OTTOBRE 2006 (medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	Pmin (hPa)	Pmax (hPa)	VVmax(m/s)	Rmax(W/m²)	UVbmax(W/m²)
1/10/06	1014,8	180,0	1,3	205,5	0,285	1014,3	1015,6	7,2	705,8	1,160
2/10/06	1014,8	180,0	1,4	215,0	0,270	1013,7	1016,1	6,6	721,7	1,140
3/10/06	1011,3	180,0	1,4	214,5	0,286	1008,4	1014,4	5,5	717,4	1,200
4/10/06	1008,1	180,0	2,5	106,6	0,158	1007,0	1009,5	10,4	702,6	1,090
5/10/06	1011,8	315,0	1,4	78,4	0,122	1009,0	1014,4	6,0	438,6	0,710
6/10/06	1012,7	0,0	1,9	206,0	0,248	1010,9	1014,4	6,9	748,3	1,090
7/10/06	1010,3	315,0	1,8	209,3	0,249	1008,8	1012,0	8,4	738,1	1,090
8/10/06	1010,9	45,0	2,4	194,7	0,242	1009,0	1012,6	10,5	791,1	1,090
9/10/06	1013,0	45,0	2,2	202,6	0,249	1012,0	1014,1	12,8	726,2	1,100
10/10/06	1012,7	0,0	1,8	204,2	0,239	1011,3	1013,8	6,3	697,4	1,020
11/10/06	1011,6	315,0	1,6	195,9	0,218	1010,1	1012,6	6,5	689,5	0,950
12/10/06	1013,9	180,0	0,8	188,6	0,198	1012,0	1016,8	6,5	665,1	0,870
13/10/06	1016,7	180,0	0,5	186,4	0,199	1015,6	1018,0	5,6	670,5	0,890
14/10/06	1015,4	45,0	1,5	149,1	0,176	1014,0	1016,8	8,2	682,1	0,860
15/10/06	1013,0	45,0	2,8	113,6	0,148	1011,9	1014,4	11,5	422,0	0,620
16/10/06	1011,4	45,0	3,0	181,5	0,202	1010,1	1012,7	12,2	772,1	0,980
17/10/06	1013,4	45,0	2,5	201,7	0,209	1012,5	1014,4	11,3	706,8	0,910
18/10/06	1012,6	180,0	1,1	199,6	0,208	1010,7	1014,4	6,0	724,0	0,940
19/10/06	1008,2	135,0	1,8	169,5	0,192	1005,5	1011,4	10,1	722,2	0,940
20/10/06	1004,2	180,0	0,8	124,9	0,174	977,2	1006,3	5,9	727,1	1,060
21/10/06	1006,3	180,0	1,7	133,6	0,195	1004,6	1007,0	9,8	697,6	1,040
22/10/06	1008,8	180,0	0,9	109,6	0,160	1007,0	1010,7	5,9	516,0	0,810
23/10/06	1010,9	180,0	1,3	147,4	0,197	1010,1	1012,0	7,4	675,7	0,990
24/10/06	1009,5	180,0	1,3	157,4	0,199	1008,2	1010,8	7,3	710,7	1,030
25/10/06	1011,9	180,0	1,0	170,1	0,202	1009,5	1014,4	6,5	638,8	0,910
26/10/06	1015,2	180,0	0,4	161,1	0,178	1014,1	1016,8	4,0	592,1	0,800
27/10/06	1018,1	135,0	0,3	157,3	0,165	1016,8	1019,2	3,6	570,7	0,730
28/10/06	1016,6	180,0	0,8	148,2	0,166	1013,8	1019,2	6,9	583,4	0,780
29/10/06	1009,7	180,0	0,5	149,2	0,174	1006,4	1013,8	5,5	586,1	0,810
30/10/06	1007,7	45,0	2,5	163,4	0,184	1004,5	1011,4	15,0	603,7	0,840
31/10/06	1010,9	0,0	1,7	176,9	0,185	1009,5	1012,6	8,2	638,1	0,840



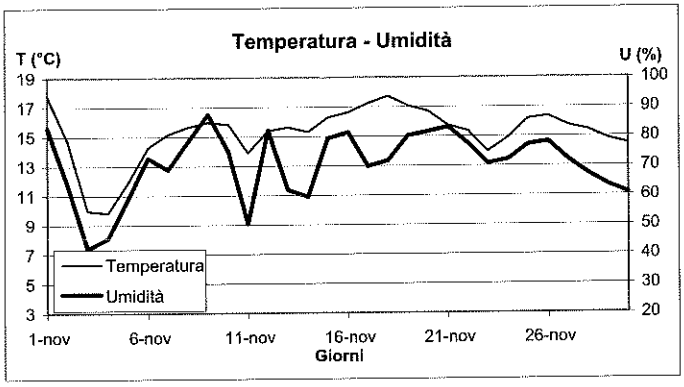


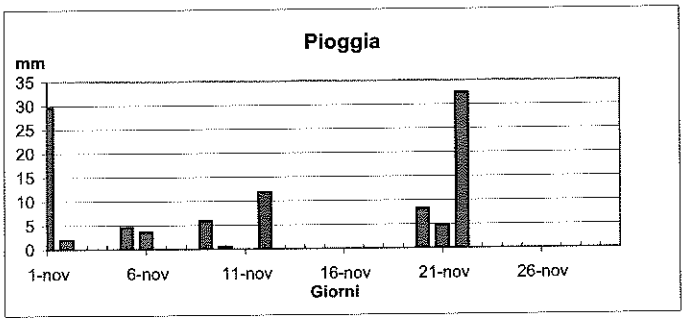
NOVEMBRE 2006 (medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)
1/11/06	17,8	82,9	29,6	15,3	19,4	64,3	93,1
2/11/06	14,7	63,4	2,0	9,7	19,2	47,7	87,7
3/11/06	10,0	41,9	0,0	7,2	12,9	30,3	53,6
4/11/06	9,8	45,5	0,0	7,2	13,0	30,6	60,0
5/11/06	11,9	58,9	4,6	7,1	16,0	46,1	87,5
6/11/06	14,3	72,8	3,6	11,4	17,7	52,3	89,8
7/11/06	15,2	68,8	0,0	11,7	19,5	49,7	81,1
8/11/06	15,7	78,4	0,0	12,0	18,6	68,4	84,9
9/11/06	16,0	87,5	5,8	14,5	17,6	80,1	92,6
10/11/06	15,8	75,1	0,4	12,5	20,4	50,1	91,7
11/11/06	13,9	50,4	0,0	10,8	17,3	24,4	71,1
12/11/06	15,4	82,1	11,8	12,8	18,1	68,1	91,4
13/11/06	15,6	61,9	0,0	13,2	19,2	33,4	92,4
14/11/06	15,3	59,4	0,0	10,4	18,4	40,0	79,2
15/11/06	16,3	79,3	0,0	13,9	18,9	66,0	87,6
16/11/06	16,6	81,4	0,0	14,6	18,9	72,8	86,5
17/11/06	17,3	69,8	0,0	13,9	21,3	50,8	85,8
18/11/06	17,7	71,7	0,0	14,8	20,5	55,8	85,7
19/11/06	17,1	80,1	0,0	14,2	20,7	56,6	93,3
20/11/06	16,7	81,5	8,2	14,7	19,3	68,0	88,7
21/11/06	15,7	83,1	4,8	14,2	16,6	71,8	90,7
22/11/06	15,3	77,4	32,4	13,2	18,1	63,3	91,3
23/11/06	14,0	70,7	0,0	10,4	18,6	45,6	83,7
24/11/06	14,9	72,0	0,0	11,6	19,3	48,1	80,0
25/11/06	16,2	77,0	0,0	13,5	19,0	62,2	87,8
26/11/06	16,3	78,1	0,0	13,1	20,4	62,9	87,5
27/11/06	15,7	72,0	0,0	13,3	20,1	56,1	80,3
28/11/06	15,4	67,2	0,0	12,3	20,2	50,2	78,3
29/11/06	14,8	63,4	0,0	11,9	19,1	42,7	75,2
30/11/06	14,5	60,7	0,0	12,2	18,3	44,5	72,7

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI

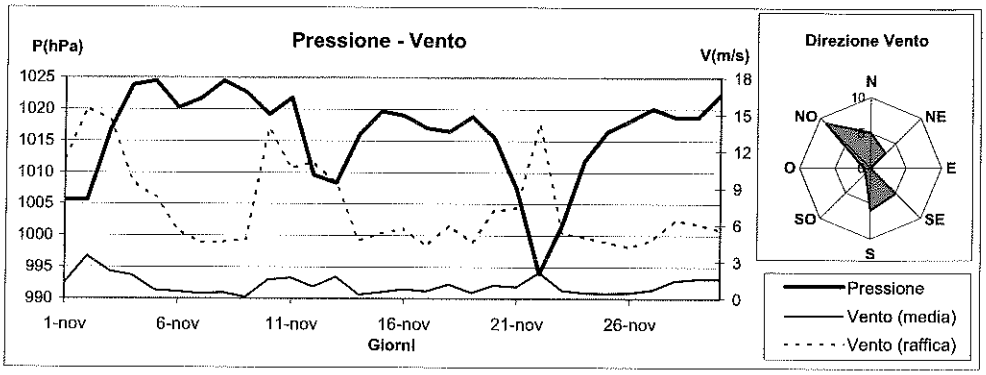
Temperatura
Min: 7.1°C il 5/11 alle ore 6.30
Max: 21.3°C il 17/11 alle ore 11.40
Umidità
Min: 24.4% il 11/11 alle ore 13.50
Max: 93.3% il 19/11 alle ore 08.20
Pressione
Min: 990.1 hPa il 22/11 alle ore 11.20
Max: 1026.5 hPa il 4/11 alle ore 22.10
Velocità del vento
Max: 15.5 m/s il 2/11 alle ore 12.00
Radiazione totale
Max: 689.6 W/m² il 3/11 alle ore 11.50
Radiazione UV-b
Max: 0.700 W/m² il 3/11 alle ore 12.10

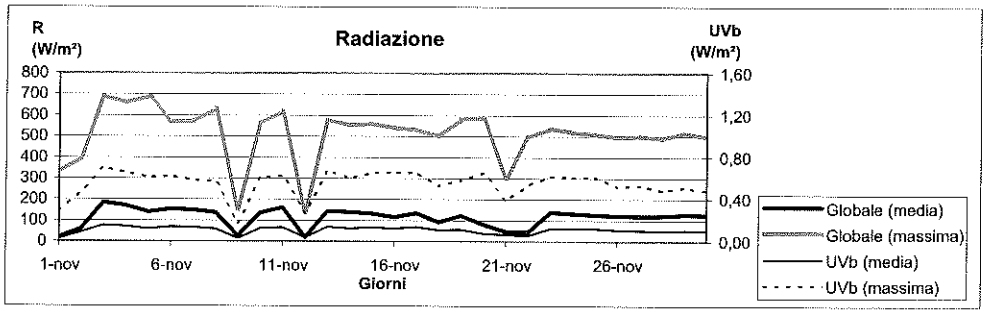




NOVEMBRE 2006 (medie giornaliere)

Data	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)	Pmin (hPa)	Pmax (hPa)	VVmax(m/s)	Rmax(W/m²)	UVbmax(W/m²)
1/11/06	1005,6	180,0	1,2	19,9	0,024	1002,1	1009,5	11,4	328,2	0,290
2/11/06	1005,6	45,0	3,5	60,0	0,086	1000,9	1013,2	15,5	396,2	0,470
3/11/06	1016,8	45,0	2,2	184,9	0,151	1013,2	1020,5	14,5	689,6	0,700
4/11/06	1023,8	0,0	1,9	170,0	0,140	1020,5	1026,5	9,6	657,5	0,650
5/11/06	1024,4	315,0	0,7	138,4	0,118	1022,1	1026,5	8,2	687,3	0,610
6/11/06	1020,2	315,0	0,6	152,3	0,135	1019,2	1021,7	5,6	568,1	0,620
7/11/06	1021,7	0,0	0,4	148,8	0,131	1020,5	1022,9	4,6	568,1	0,580
8/11/06	1024,5	180,0	0,5	136,6	0,116	1022,9	1025,6	4,6	629,3	0,570
9/11/06	1022,6	135,0	0,1	25,0	0,031	1019,9	1024,7	4,8	150,7	0,170
10/11/06	1019,1	45,0	1,5	134,0	0,121	1016,8	1023,5	13,8	558,6	0,610
11/11/06	1021,8	0,0	1,7	161,5	0,132	1018,5	1024,1	10,6	617,6	0,620
12/11/06	1009,6	225,0	1,0	19,2	0,036	1003,9	1018,1	11,1	137,4	0,270
13/11/06	1008,3	0,0	1,8	144,6	0,138	1003,8	1013,8	9,4	578,9	0,670
14/11/06	1016,0	135,0	0,3	138,5	0,125	1013,2	1019,3	4,7	552,3	0,600
15/11/06	1019,7	180,0	0,5	132,6	0,133	1019,2	1021,0	5,3	559,8	0,650
16/11/06	1019,0	180,0	0,8	116,8	0,121	1018,0	1020,4	5,7	541,2	0,650
17/11/06	1017,0	315,0	0,6	135,2	0,136	1016,2	1018,1	4,3	530,7	0,650
18/11/06	1016,5	180,0	1,2	92,7	0,107	1015,0	1018,6	6,0	499,6	0,530
19/11/06	1018,8	0,0	0,5	122,9	0,115	1018,0	1019,9	4,6	583,9	0,580
20/11/06	1015,4	180,0	1,1	80,1	0,074	1012,1	1018,4	7,1	584,6	0,650
21/11/06	1007,3	135,0	1,0	48,0	0,064	1001,6	1012,0	7,4	301,2	0,390
22/11/06	994,0	270,0	2,1	45,3	0,056	990,1	1001,5	14,2	494,9	0,540
23/11/06	1001,7	315,0	0,7	138,9	0,123	994,8	1007,7	5,3	537,8	0,620
24/11/06	1011,8	135,0	0,5	131,2	0,125	1007,7	1015,1	5,0	519,6	0,610
25/11/06	1016,5	135,0	0,4	127,9	0,123	1015,0	1018,1	4,6	510,9	0,610
26/11/06	1018,2	315,0	0,5	123,8	0,109	1017,4	1019,5	4,2	494,8	0,520
27/11/06	1020,0	315,0	0,7	121,4	0,104	1019,3	1021,1	4,8	500,9	0,530
28/11/06	1018,7	315,0	1,5	120,9	0,101	1017,4	1019,9	6,4	488,9	0,480
29/11/06	1018,7	315,0	1,6	126,8	0,103	1017,7	1021,0	6,1	515,9	0,510
30/11/06	1022,3	315,0	1,6	126,1	0,100	1020,5	1024,7	5,6	494,9	0,480



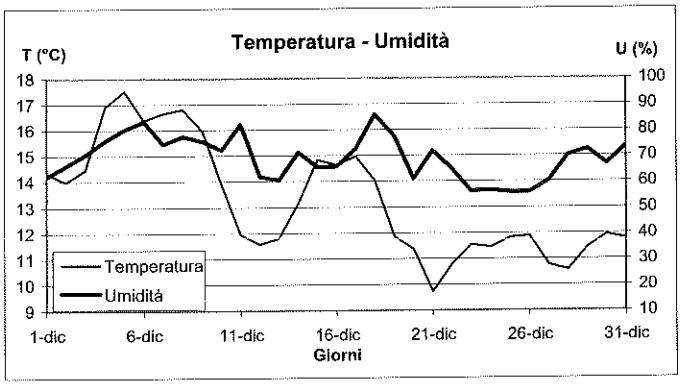


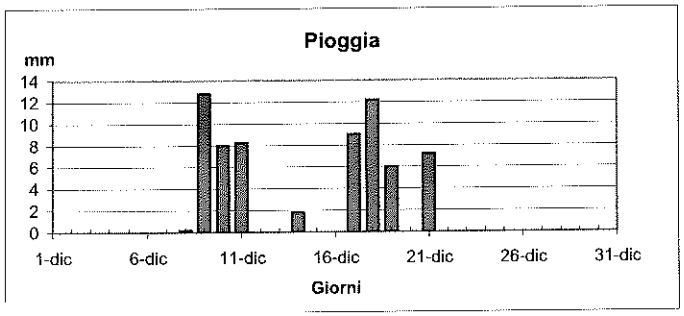
DICEMBRE 2006 (medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	T_{min} (°C)	T_{max} (°C)	U_{min} (%)	U_{max} (%)
1/12/06	14,3	62,0	0,0	12,0	18,5	47,7	68,9
2/12/06	14,0	66,2	0,0	11,3	17,7	52,6	72,3
3/12/06	14,5	70,4	0,0	11,3	17,8	52,3	79,1
4/12/06	16,9	75,9	0,0	14,7	19,6	58,7	83,0
5/12/06	17,5	80,2	0,0	15,4	19,6	70,0	87,1
6/12/06	16,4	83,3	0,0	14,5	18,4	73,2	89,0
7/12/06	16,6	74,5	0,0	14,3	19,7	59,2	84,8
8/12/06	16,8	77,6	0,2	14,6	18,3	70,9	86,0
9/12/06	16,0	75,6	12,8	13,4	17,9	62,2	89,5
10/12/06	13,9	72,1	8,0	11,5	17,1	54,4	88,8
11/12/06	11,9	82,2	8,2	10,5	13,4	71,8	91,0
12/12/06	11,6	61,9	0,0	9,3	14,5	47,2	76,6
13/12/06	11,8	60,4	0,0	8,9	15,2	48,0	68,8
14/12/06	13,2	71,3	1,8	11,5	14,5	65,6	81,4
15/12/06	14,8	65,6	0,0	12,1	19,8	51,3	73,3
16/12/06	14,6	65,8	0,0	11,4	19,2	42,2	75,9
17/12/06	15,0	72,6	9,0	12,8	17,7	62,3	88,9
18/12/06	14,0	85,9	12,2	12,5	17,0	72,4	92,6
19/12/06	11,9	77,5	6,0	10,6	13,1	64,1	88,3
20/12/06	11,4	61,1	0,0	9,8	14,0	49,1	66,5
21/12/06	9,7	71,9	7,2	8,8	10,8	62,9	79,7
22/12/06	10,8	64,7	0,0	9,7	11,5	60,1	71,6
23/12/06	11,5	56,2	0,0	10,1	13,8	46,2	63,3
24/12/06	11,4	56,5	0,0	9,6	14,7	42,7	65,6
25/12/06	11,8	55,8	0,0	9,2	15,0	45,8	63,5
26/12/06	11,9	55,8	0,0	9,7	15,7	40,7	63,5
27/12/06	10,8	60,2	0,0	8,6	14,4	45,8	68,6
28/12/06	10,6	70,0	0,0	7,6	14,1	53,7	77,0
29/12/06	11,5	72,4	0,0	7,8	15,2	55,9	84,5
30/12/06	11,9	66,7	0,0	8,4	16,0	47,5	78,9
31/12/06	11,8	73,6	0,0	8,5	15,6	59,7	84,9

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI

Temperatura
Min: 7.6°C il 28/12 alle ore 08.20
Max: 19.8°C il 15/12 alle ore 13.50
Umidità
Min: 40.7% il 26/12 alle ore 14.00
Max: 92.6% il 18/12 alle ore 5.40
Pressione
Min: 1006.4 hPa il 19/12 alle ore 5.00
Max: 1034.5 hPa il 31/12 alle ore 10.30
Velocità del vento
Max: 17.3 m/s il 9/12 alle ore 11.10
Radiazione totale
Max: 568.2 W/m² il 4/12 alle ore 11.30
Radiazione UV-b
Max: 0.520 W/m² il 18/12 alle ore 11.40



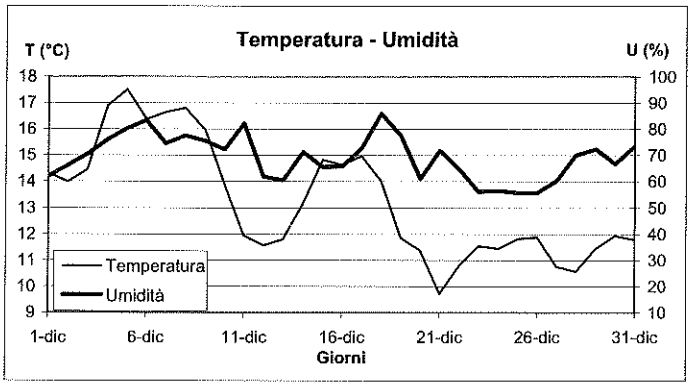


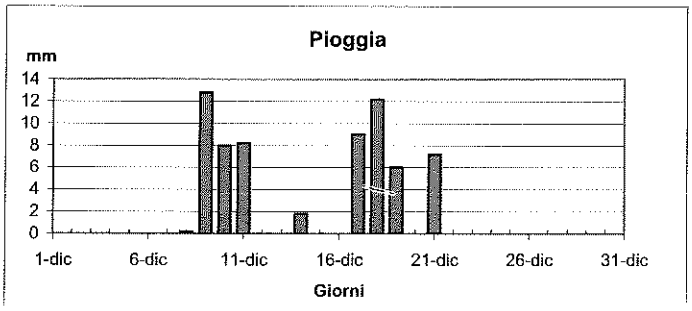
DICEMBRE 2006 (medie giornaliere)

Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	Tmin (°C)	Tmax (°C)	Umin (%)	Umax (%)
1/12/06	14,3	62,0	0,0	12,0	18,5	47,7	68,9
2/12/06	14,0	66,2	0,0	11,3	17,7	52,6	72,3
3/12/06	14,5	70,4	0,0	11,3	17,8	52,3	79,1
4/12/06	16,9	75,9	0,0	14,7	19,6	58,7	83,0
5/12/06	17,5	80,2	0,0	15,4	19,6	70,0	87,1
6/12/06	16,4	83,3	0,0	14,5	18,4	73,2	89,0
7/12/06	16,6	74,5	0,0	14,3	19,7	59,2	84,8
8/12/06	16,8	77,6	0,2	14,6	18,3	70,9	86,0
9/12/06	16,0	75,6	12,8	13,4	17,9	62,2	89,5
10/12/06	13,9	72,1	8,0	11,5	17,1	54,4	88,8
11/12/06	11,9	82,2	8,2	10,5	13,4	71,8	91,0
12/12/06	11,6	61,9	0,0	9,3	14,5	47,2	76,6
13/12/06	11,8	60,4	0,0	8,9	15,2	48,0	68,8
14/12/06	13,2	71,3	1,8	11,5	14,5	65,6	81,4
15/12/06	14,8	65,6	0,0	12,1	19,8	51,3	73,3
16/12/06	14,6	65,8	0,0	11,4	19,2	42,2	75,9
17/12/06	15,0	72,6	9,0	12,8	17,7	62,3	88,9
18/12/06	14,0	85,9	12,2	12,5	17,0	72,4	92,6
19/12/06	11,9	77,5	6,0	10,6	13,1	64,1	88,3
20/12/06	11,4	61,1	0,0	9,8	14,0	49,1	66,5
21/12/06	9,7	71,9	7,2	8,8	10,8	62,9	79,7
22/12/06	10,8	64,7	0,0	9,7	11,5	60,1	71,6
23/12/06	11,5	56,2	0,0	10,1	13,8	46,2	63,3
24/12/06	11,4	56,5	0,0	9,6	14,7	42,7	65,6
25/12/06	11,8	55,8	0,0	9,2	15,0	45,8	63,5
26/12/06	11,9	55,8	0,0	9,7	15,7	40,7	63,5
27/12/06	10,8	60,2	0,0	8,6	14,4	45,8	68,6
28/12/06	10,6	70,0	0,0	7,6	14,1	53,7	77,0
29/12/06	11,5	72,4	0,0	7,8	15,2	55,9	84,5
30/12/06	11,9	66,7	0,0	8,4	16,0	47,5	78,9
31/12/06	11,8	73,6	0,0	8,5	15,6	59,7	84,9

MASSIMI e MINIMI ASSOLUTI

Temperatura
Min: 7.6°C il 28/12 alle ore 08.20
Max: 19.8°C il 15/12 alle ore 13.50
Umidità
Min: 40.7% il 26/12 alle ore 14.00
Max: 92.6% il 18/12 alle ore 5.40
Pressione
Min: 1006.4 hPa il 19/12 alle ore 5.00
Max: 1034.5 hPa il 31/12 alle ore 10.30
Velocità del vento
Max: 17.3 m/s il 9/12 alle ore 11.10
Radiazione totale
Max: 568.2 W/m² il 4/12 alle ore 11.30
Radiazione UV-b
Max: 0.520 W/m² il 18/12 alle ore 11.40

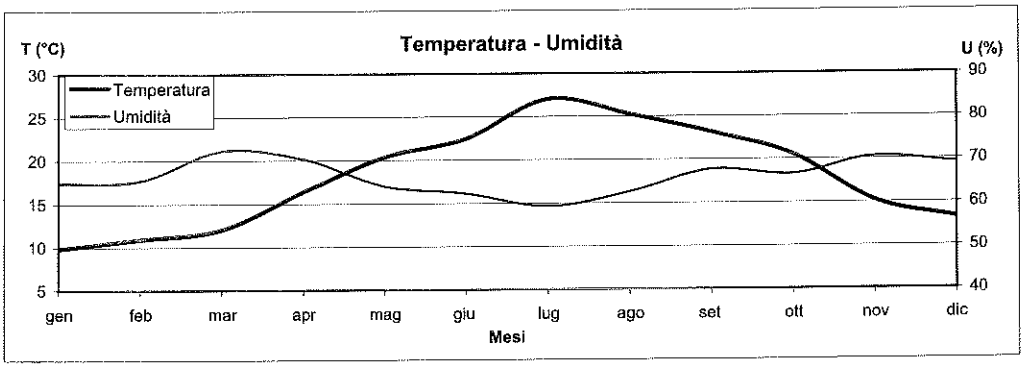


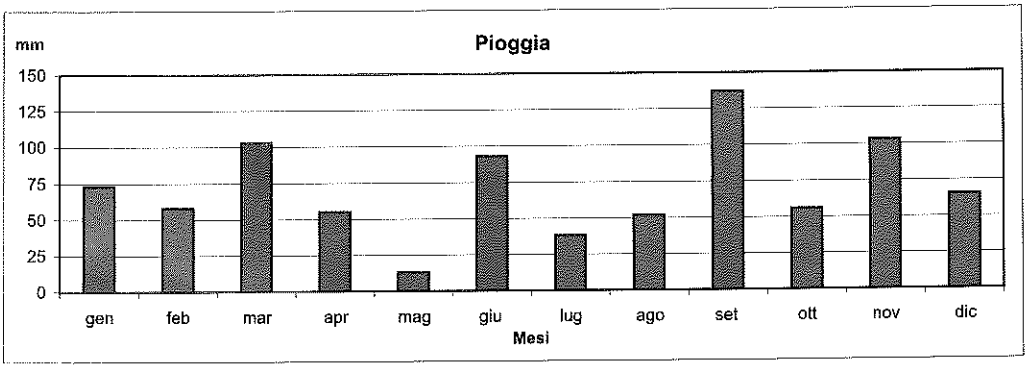


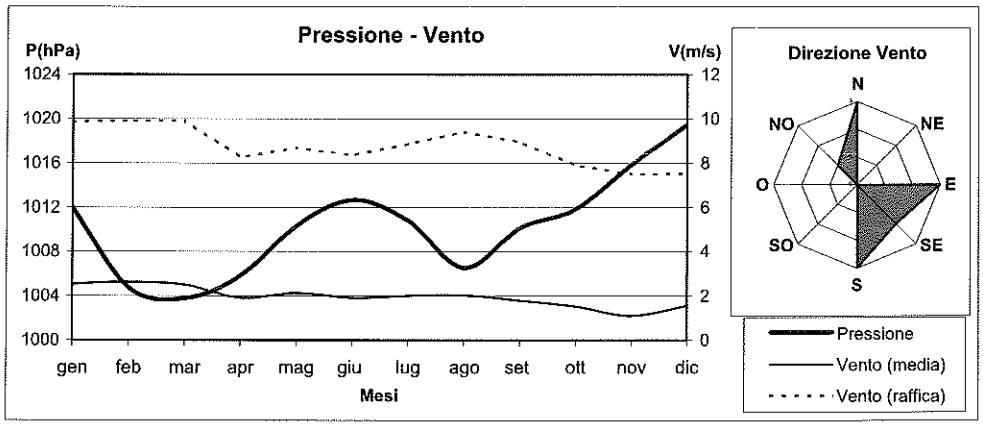
MEDIE MENSILI 2006

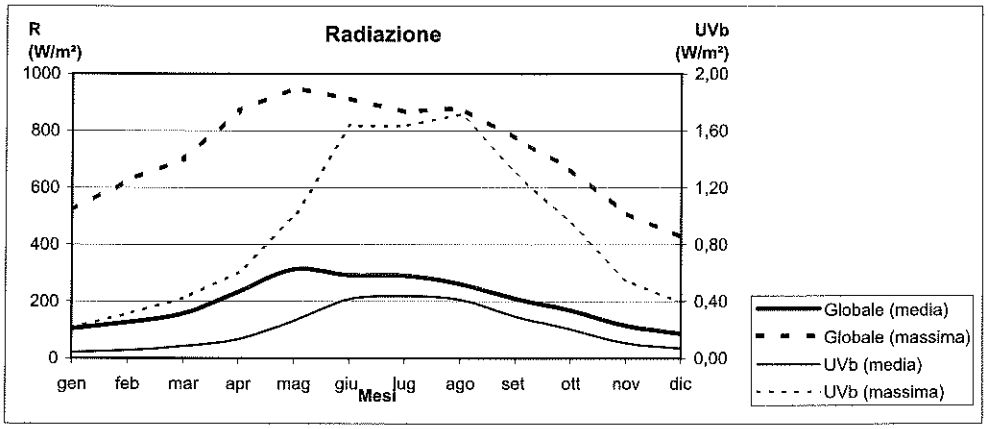
Data	T(°C)	U(%)	Pg(mm)	P(hPa)	DV(°N)	VV(m/s)	R(W/m²)	UVb(W/m²)
Gennaio	9,8	64,8	73,2	1012,0	0,0	2,5	103,5	0,040
Febbraio	10,9	65,4	58,0	1004,8	0,0	2,6	126,2	0,057
Marzo	12,0	72,2	103,4	1003,8	135,0	2,5	157,5	0,085
Aprile	16,4	70,3	55,0	1005,8	90,0	1,9	233,6	0,133
Maggio	20,4	64,0	13,0	1010,3	90,0	2,1	313,2	0,263
Giugno	22,5	62,3	93,2	1012,6	135,0	1,9	292,5	0,417
Luglio	27,0	59,3	38,0	1010,8	90,0	2,0	291,0	0,438
Agosto	25,2	62,6	51,8	1006,5	180,0	2,0	261,7	0,412
Settembre	23,2	67,7	137,2	1010,1	180,0	1,8	208,7	0,294
Ottobre	20,6	66,6	55,8	1011,8	180,0	1,5	168,4	0,202
Novembre	15,2	70,5	103,2	1015,9	315,0	1,1	114,1	0,106
Dicembre	13,2	69,2	65,4	1019,4	0,0	1,6	87,7	0,072
ANNO	18,0	66,2	847,2	1010,3	0,0	2,0	196,5	0,210

Data	T_{min} (°C)	T_{max} (°C)	U_{min} (%)	U_{max} (%)	P_{min} (hPa)	P_{max} (hPa)	VV_{max}(m/s)	R_{max}(W/m²)	UVb_{max}(W/m²)
Gennaio	7,6	12,5	51,3	75,3	1009,9	1014,2	9,9	520,3	0,214
Febbraio	8,7	13,4	50,0	79,2	1002,3	1007,7	9,9	626,1	0,311
Marzo	8,7	13,4	50,0	79,2	1000,9	1006,9	9,9	700,4	0,422
Aprile	13,8	19,3	50,3	85,3	1010,1	1014,5	8,3	870,4	0,605
Maggio	17,3	23,3	43,9	78,8	995,5	1012,4	8,7	950,8	0,997
Giugno	19,3	26,3	42,5	80,5	1010,7	1014,0	8,3	913,3	1,633
Luglio	23,9	30,6	43,1	76,5	1009,3	1012,4	8,9	866,3	1,634
Agosto	22,4	28,3	45,3	76,6	1005,1	1008,4	9,4	878,7	1,715
Settembre	20,4	26,3	51,1	82,6	1008,2	1012,1	8,9	772,5	1,306
Ottobre	17,7	23,7	50,2	79,9	1009,3	1013,6	7,9	663,9	0,945
Novembre	12,3	18,6	53,4	83,7	1013,3	1018,9	7,5	509,3	0,548
Dicembre	11,0	16,1	56,0	78,5	1017,4	1021,9	7,5	425,4	0,394
ANNO	15,3	21,0	48,9	79,7	1007,7	1013,1	8,8	724,8	0,894






Pressione - Vento
P(hPa)
V(m/s)
1024
1020
1016
1012
1008
1004
1000
12
10
8
6
4
2
0
gen feb mar apr mag giu lug ago set ott nov dic
Mesi
Direzione Vento
N
NE
E
SE
S
SO
O
NO
Pressione
Vento (media)
Vento (raffica)


Radiazione
R
(W/m²)
UVb
(W/m²)
1000
800
600
400
200
0
2,00
1,60
1,20
0,80
0,40
0,00
gen feb mar apr mag giu lug ago set ott nov dic
Mesi
Globale (media)
Globale (massima)
UVb (media)
UVb (massima)

ISTRUZIONI PER LA REALIZZAZIONE DEI DATTILOSCRITTI

Il *Rendiconto* pubblica, di norma in lingua italiana, le comunicazioni fatte dai soci in una delle adunanze ordinarie dell'Accademia. I soci possono presentare anche lavori di altri autori. In questo caso l'accettazione della *Nota* per la pubblicazione è condizionata al parere favorevole di una commissione designata dall'Accademia.

Nella stesura della *Nota* si raccomanda l'uso di Microsoft® Word 2000 o in alternativa di LaTeX™. Le *note* dovranno essere presentate su supporto cartaceo, in triplice copia, e su supporto magnetico (floppy disk o Cd-Rom). La stesura dovrà essere conforme al modello che è riportato in *Appendice* al volume annuale: non sono ammesse modifiche al modello fornito.

I disegni di formule e grafici, contenuti in un rettangolo ideale del formato massimo di 125x190 mm, non possono essere accettati se prodotti a mano libera, essi dovranno essere realizzati ad alto contrasto e stampati con una stampante laser dalla buona risoluzione (600 dpi). Le fotografie, anche di grafici e disegni, devono essere stampate ad alto contrasto. Una copia a bassa risoluzione o una fotocopia di ciascuna fotografia, grafico o disegno, sarà collocata opportunamente nel dattiloscritto accompagnata dalla relativa didascalia, l'originale sarà sempre allegato a parte. Le fotografie a mezzi toni e quelle a colori, devono rispondere a criteri di riproducibilità ed essere utilizzate solo se necessarie per la completezza dell'esposizione. Le intestazioni delle figure e le relative didascalie non devono confondersi col testo. È consentita la presentazione delle fotografie e dei disegni in formato digitale solo nel caso in cui la scansione sia effettuata ad alta risoluzione.

Ogni pagina, inclusa la prima, dovrà essere numerata progressivamente. I riferimenti bibliografici possono essere indicati nel testo numericamente, in ordine di citazione, o per autore, mantenendo lo stesso criterio di presentazione nella Sezione Riferimenti Bibliografici (*References*). I riferimenti dovranno, in ogni caso, riportare nell'ordine: i nomi degli autori, l'anno di pubblicazione, il titolo completo, il titolo della rivista, il numero e la pagina di inizio e di fine lavoro. La struttura del dattiloscritto, i caratteri da utilizzare, le loro dimensioni e le spaziature sono indicate nell'esempio in *Appendice.*

I dattiloscritti non conformi alle norme previste non potranno essere accettati per la pubblicazione.

Saranno forniti gratuitamente 50 estratti, senza copertina, di ciascuna *Nota*, anche nel caso in cui il numero degli autori sarà superiore a uno. Ulteriori estratti e/o la richiesta di una copertina personalizzata saranno a carico degli autori che ne dovranno fare esplicita richiesta all'atto della presentazione del dattiloscritto per opportuna comunicazione preventiva all'Editore che comunicherà l'ammontare della spesa.

Abstract - Abstract written in Times New Roman 9, justified; abstract written in Times New Roman 9, justified; abstract written in Times New Roman 9, justified; abstract written in Times New Roman 9, justified;

Al termine lasciare vuoto 1.5 righi

Riassunto - Scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato; scritto in Times New Roman 9, giustificato.

Al termine del secondo riassunto si lasciano vuoti 2 righi e si digita a sinistra in **grassetto maiuscolo con caratteri TNR 9** il titolo del primo paragrafo che deve essere Introduzione.

1 - INTRODUCTION

Si lascia 0.5 righi e si inizia la digitazione con caratteri **TNR 11 giustificato** indentando i capoversi di 0.6 cm.

Primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione in Times New Roman 11 primo capoverso dell'introduzione.

.....

Ultimo capoverso dell'introduzione. Ricordarsi che i capoversi vanno indentati di 0.6 cm.

Dopo questa sezione, e fra la fine di una sezione e l'intestazione dell'altra, si lasciano vuoti due righi. Si usa **il grassetto maiuscolo TNR 9** per tutte le intestazioni che saranno separate dal corpo della rispettiva sezione di 0.5 righi e per il corpo delle sezioni si useranno caratteri **TNR 11**, come per la sezione INTRODUZIONE. L'ultima sezione deve essere sempre RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI (REFERENCES). Se esistono, mettere nell'ordine, le seguenti sezioni: 2 - MATERIALI E METODI (MATERIALS AND METHODS), 3 - RISULTATI (RESULTS), 4 - DISCUSSIONE (DISCUSSION), o CONCLUSIONI (CONCLUSIONS), 5 -RIFERIMENTI

APPENDICE

NORME PER LA STESURA DI UN DATTILOSCRITTO

Prima pagina.

Si lasciano vuoti quattro righi dall'alto.

Titolo: **Grassetto, Times New Roman (TNR) 13 con testo centrato.**

La Secca delle Formiche di Vivara
(canale d'Ischia, Campania)
Osservazioni Geomorfologico-strutturali e Faunistiche

A distanza di 1 rigo digitare gli autori della nota con **caratteri TNR 11**:

Nota di Vincenzo Rosso[1], Nicola Verde[2] e Pasquale Bianco[1,*]

A distanza di 0.5 righi digitare il nome del presentatore e la data dell'adunanza con caratteri **TNR 9**:

Presentata dal socio Michele Russo
(Adunanza del 6 febbraio, 1999)

A distanza di 1.5 righi digitare in lingua inglese le Key words con caratteri **TNR 9** come indicato:

Key words: stratigraphy, island, DNA, proteinase, etc.

A distanza di 0.5 righi digitare, come indicato, due riassunti con caratteri **TNR 9** di cui uno in italiano e l'altro in inglese:

Esempio di prima pagina

Analisi sismologiche fatte nella terra d'Otranto nel decennio 1970-1980

Nota di Vincenzo Rosso[1], Nicola Verde[2] e Pasquale Bianco[1]*

Presentata dal socio Michele Russo
(Adunanza del 6 febbraio, 1999)

Key words: : stratigraphy, Apulia, protein, hemoglobin etc.

Abstract - Abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified; abstract written in English language, in Times New Roman 9, justified;

Riassunto - Scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano; scritto giustificato in Times New Roman 9, in italiano.

1 - INTRODUCTION

Primo capoverso dell'introduzione primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione, primo capoverso dell'introduzione.

(Al termine della prima pagina, a pié pagina si inserisce)

[1,2].. Indirizzi e le varie affiliazioni; tanti quanti necessari per i vari autori
* Author to whom correspondence should be addressed

(qui termina la nota a piè pagina e la pagina 1)

BIBLIOGRAFICI (REFERENCES). I riferimenti, di cui si forniscono esempi per periodici e libri, **vanno scritti in TNR 9 con i titoli in corsivo**:

Hudson, T.H. and Grillo, F.G. (1993) *Reactivation of an inactive human X chromosome.* Science, **230**, 157-163.
Abrahams, R. and Marsden, J. (1978) *Foundation of mechanics.* Benjamin, New York, NY

Eventuali Ringraziamenti (Acknowledgements) per finanziamenti o altro vanno inseriti a piè di pagina al termine di RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI usando **TMS 9**.

Es:
Acknowledgements: i contributi economici, i ringraziamenti per notizie, altro.

Ricordare che come note a pié pagina della prima pagina, dopo una linea di divisione, vanno inseriti in **Times New Roman 9** i richiami e le eventuali annotazioni riguardanti il titolo e gli autori come nell'esempio:

---

[1] Dipartimento 1, indirizzo 1; Dipartimento 2, indirizzo 2 e così per i vari numeri che nel titolo distinguono gli autori.

* Author to whom correspondence should be addressed (Autore a cui indirizzare la corrispondenza)